

基于顺序约束的命中概率多批次 试验统计评定方法

闫志强, 蒋英杰, 谢红卫

(国防科学技术大学机电工程与自动化学院, 长沙 410073)

摘 要: 针对多批次试验中由技术状态改进所带来的异总体统计问题,研究了顺序约束条件下的命中概率指标统计评定方法。首先在 X - Y 向不相关情况下,将命中概率指标归结为 X 向和 Y 向的准确度和密集度参数的估计。然后根据多批次试验规律,建立各个参数之间的顺序约束关系,基于 Bayes 方法获得验后分布密度核函数,并采用 MCMC(Markov Chain Monte Carlo)方法获得各参数的验后抽样分布,进而获得命中概率指标的抽样分布,以此计算命中概率的期望和置信限。此外,针对运动目标或末端机动的情况,分析了 X - Y 向相关情况下的命中概率指标计算方法。通过正交变换实现去相关处理,并在命中概率计算中引入旋转角度参数,从而解决运动目标情况下的多批次命中概率计算。最后,通过实例进行了验证,所得命中概率值优于传统方法所获得的统计结果,表明该方法对多批次试验具有良好的适应性和工程推广价值。

关键词: 命中概率; 多批次试验; 顺序约束; Bayes 方法; MCMC

中图分类号: TJ760.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1328(2010)04-1206-06

DOI:10.3873/j.issn.1000-1328.2010.04.043

0 引言

目前,各类新式制导方法的应用极大地提高了武器装备打击机动目标的能力。传统的准确度、密集度等指标难以综合反映系统的作战性能,此时一般选择命中概率作为衡量武器性能的指标。另外,在装备研制过程中,产品一般会经历多批次的靶场试验,各批次试验之间进行设计上的改进,因此产品的技术状态随批次呈现变动趋势。由于产品本身的复杂性、昂贵性、保密性等原因,各批次试射发数一般较少。此时需要利用多批次试验数据,采用小样本条件下的变动统计方法展开命中概率的评估。

关于“命中概率”指标的评定方法,早期文献大多集中在命中几类典型形状目标的概率^[1]、命中概率与毁伤概率的关系^[2]、命中概率的 UMVU 估计^[3]、命中概率的假设检验^[4-5]等方面。近十年来,人们逐渐关注于以下几个方面:Bayes 方法的应用、仿真方法或统计模拟法的应用^[6-7]、子母弹情况下的计算^[8-9]、目标机动或环境变化对命中概率的影响^[10]等。针对多批次武器试验评估的变动统计方法文献

相对较少。在早期的多批次精度评定方法中,序贯方法是应用较多的一种,尤其对于成败型试验具有成熟的理论基础。但其一般适用于同一总体的情况,很难扩展到异总体的情况。顺序约束方法是精度分析、可靠性分析中的一种重要的异总体统计方法,文献[11,12]针对多阶段的密集度指标建立顺序约束关系,并进行了 Bayes 分析。但其分析尚不完善,没有考虑落点准确度的变化情况以及命中概率指标的计算方法。

本文采用顺序约束关系对多批次试验情况下的命中概率指标评估作出分析,并采用 MCMC 方法计算参数验后分布,最终给出命中概率的验后分布,以此作为命中概率指标评定的依据。这种方法对于多批次试验条件下的异总体数据,具有良好的适应性和工程应用价值。

1 一般情况下的命中概率计算方法

对于面目标而言,一般认为导弹落点在目标所在平面内呈现二维正态分布,其分布密度如下:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-u_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-u_x)(y-u_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-u_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} \quad (1)$$

式中 (u_x, σ_x) 和 (u_y, σ_y) 分别为 X, Y 向正态分布均值和方差, ρ 为相关系数。通过适当选择坐标系或对坐标系进行旋转可以实现去相关处理, 得到具有如下形式的分布密度函数(对于同一分布, (1)(2) 两式中的参数取值可能不同):

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\frac{(x-u_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-u_y)^2}{2\sigma_y^2}\right] \quad (2)$$

单发命中概率值可以通过对目标区域的积分获得 (D 为目标区域):

$$P_{hit} = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (3)$$

2 多批次试验的命中概率分析

多数情况下, 武器试验过程一般分多个批次进行, 每个批次包含若干单发射击试验。某个批次试验结束之后将对试验结果进行分析并加以改进。因此, 各个批次之间的产品技术状态不同, 各批次试验获得的落点分布也不服从同一总体。在最终的命中概率评定中, 需要依据产品技术状态的变化规律, 综合多批次试验数据作出统计推断。此外, 如果导弹末端没有机动或者打击目标为固定目标, 则各批次试验落点的散布规律一般呈现相似的倾向性, 可以选择某个固定坐标系, 使得各批次试验内的落点数据在 X, Y 两向上相关系数近似为 0^[13]。因此, 本节假定各批次试验数据分布密度函数均具有(2)式的形式。

设试验共有 s 个批次, 在第 i 批试验中共进行了 n_i 次射击, 获得 n_i 个落点数据 $(x_{ij}, y_{ij}), j = 1, 2, \dots, n_i$ 。在单个批次内参加试验的 n_i 个产品技术状态相同, 可以认为其落点来自同一个正态分布。 X 向落点坐标服从正态分布 $X_{ij} \sim N(u_{xi}, \sigma_{xi}^2)$, Y 向落点坐标服从正态分布 $Y_{ij} \sim N(u_{yi}, \sigma_{yi}^2)$ 。由于 X, Y 两向数据不相关, 因此可以将二者分开来考虑。

对于 X 向数据, 定义第 i 批试验中 X 向密集度为 $h_{xi} = \sigma_{xi}^{-2}$ 。由落点数据统计获得的样本均值和方差分别为: m_{xi}, w_{xi} 。其中:

$$\begin{aligned} m_{xi} &= \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, w_{xi} = \frac{1}{v_i} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - m_{xi})^2, \\ v_i &= n_i - 1 \end{aligned} \quad (4)$$

如果专家确认导弹准确度和密集度随着批次增加逐渐提高, 则各批次 X 向参数之间存在下列顺序约束关系^[12]:

$$\begin{aligned} \infty &> |u_{x1}| > |u_{x2}| > \dots > |u_{xs}| > 0 \\ 0 &< h_{x1} < h_{x2} < \dots < h_{xs} < \infty \end{aligned} \quad (5)$$

即 X 向正态分布均值参数绝对值 $|u_{xi}|$ 随批次增加逐渐减小, 即射击准确度越来越高; 同时, 正态分布方差参数随批次增加逐渐减小, 即密集度 h_{xi} 越来越大。相应可以推知, 命中概率随批次增加也越来越高。下面将利用上述顺序约束关系进行命中概率的变动统计分析。

由正态分布密度函数, 可得 s 个阶段 X 向落点分布参数的似然函数为:

$$\begin{aligned} L(h_{xi}, u_{xi}, i = 1, 2, \dots, s | n_i, m_{xi}, v_i, w_{xi}, \\ i = 1, 2, \dots, s) \\ = \prod_{i=1}^s \prod_{j=1}^{n_i} (2\pi)^{-0.5} h_{xi}^{0.5} \exp\left(-\frac{h_{xi}}{2}(x_{ij} - u_{xi})^2\right) \\ = \prod_{i=1}^s (2\pi)^{-\frac{n_i}{2}} h_{xi}^{\frac{n_i}{2}} \cdot \\ \exp\left[-\frac{h_{xi}}{2}(v_i w_{xi} + n_i(m_{xi} - u_{xi})^2)\right] \end{aligned} \quad (6)$$

由 Jeffreys 原则, 可得无信息验前分布为:

$$\begin{aligned} \pi_0(u_{xi}, h_{xi}, i = 1, 2, \dots, s) \\ = \sqrt{\det(I)} \propto \prod_{i=1}^s h_{xi}^{-0.5} \end{aligned} \quad (7)$$

同理可得, 当 (u_{x1}, u_{x2}, \dots) 已知时无信息验前为 $\pi_0(h_{x1}, h_{x2}, \dots) = \propto \prod_{i=1}^s h_{xi}^{-1}$; 当 (h_{x1}, h_{x2}, \dots) 已知时无信息验前为 $\pi_0(u_{x1}, u_{x2}, \dots) \propto 1$ 。

这里取验前分布为 $\prod_{i=1}^s h_{xi}^{-0.5}$, 则其 Bayes 验后分布为:

$$\begin{aligned} \pi(u_{xi}, h_{xi}, i = 1, 2, \dots, s) \\ \propto L(h_{xi}, u_{xi}, i = 1, \dots, s | n_i, m_{xi}, \\ v_i, w_{xi}, i = 1, \dots, s) \prod_{i=1}^s h_{xi}^{-0.5} \\ \propto \prod_{i=1}^s h_{xi}^{\frac{v_i}{2}} \exp\left[-\frac{h_{xi}}{2}(v_i w_{xi} + n_i(m_{xi} - u_{xi})^2)\right] \end{aligned} \quad (8)$$

落在 Y 向的分布情况与此类似,存在顺序约束关系:

$$\begin{aligned} \infty > |u_{y1}| > |u_{y2}| > \cdots > |u_{ys}| > 0 \\ 0 < h_{y1} < h_{y2} < \cdots < h_{ys} < \infty \end{aligned} \quad (9)$$

同理可得 Y 向分布参数的 Bayes 验后分布为:

$$\begin{aligned} \pi(u_{yi}, h_{yi}, i = 1, 2, \dots, s) \\ \propto \prod_{i=1}^s h_{yi}^{\frac{v_i}{2}} \exp\left[-\frac{h_{yi}}{2}(v_i w_{yi} + n_i(m_{yi} - u_{yi})^2)\right] \end{aligned} \quad (10)$$

对于上述验后分布的求解,文献[12]提供了一种近似计算方法,获得了级数形式的解析解,但仅适用于 u_{xi} ($i = 1, 2, \dots, s$) 已知情况,而对于式(5)(9)所示的约束关系,很难获得解析形式的解。此外,也可以采用数值积分的方法,但当参数较多时,积分较为繁琐。本文考虑采用 MCMC(Markov Chain Monte Carlo)方法来求解。

3 参数验后分布求解的 MCMC 方法

由(8)式可以看出,当其他参数已知时, u_{xi} 服从正态分布 $N(m_{xi}, 1/(h_{xi}n_i))$; 考虑到顺序约束关系,可知 u_{xi} 服从在区间 $(-|u_{x(i-1)}|, -|u_{x(i+1)}|) \cup (|u_{x(i+1)}|, |u_{x(i-1)}|)$ 上截尾的正态分布 $N(m_{xi}, 1/(h_{xi}n_i))$ 。同理,当其他参数已知时, h_{xi} 服从伽马分布 $\Gamma\left(\frac{n_i + 1}{2}, \frac{1}{2}[v_i w_{xi} + n_i(m_{xi} - u_{xi})^2]\right)$; 考虑到顺序约束关系,可知: h_{xi} 服从 $(h_{x(i-1)}, h_{x(i+1)})$ 区间上截尾的伽马分布

$$\Gamma\left(\frac{n_i + 1}{2}, \frac{1}{2}[v_i w_{xi} + n_i(m_{xi} - u_{xi})^2]\right)$$

在基于 Gibbs 抽样的 MCMC 方法中,各个参数按照各自的满条件分布进行抽样。 X 方向上的参数 $(u_{xi}, h_{xi}, i = 1, 2, \dots, s)$ 的 MCMC 验后计算步骤如下(其中 $\theta^{(k)}$ 表示参数 θ 第 k 次抽样获得的值):

① 首先对参数向量赋初值: $u_{xi}^{(0)}, h_{xi}^{(0)}, (i = 1, 2, \dots, s)$ 。注意初值应满足约束关系式(5)和(9)。设对于 $\forall k \in Z, u_{x0}^{(k)} = \infty, u_{x(s+1)}^{(k)} = 0, h_{x0}^{(k)} = 0, h_{x(s+1)}^{(k)} = \infty$ 。取 $k = 1, i = 1$ 。

② 由正态分布 $N(m_{xi}, 1/(h_{xi}^{(k-1)}n_i))$ 中抽样产生 u_{xi}^* 。如果:

$$u_{xi}^* \notin (-|u_{x(i-1)}^{(k-1)}|, -|u_{x(i+1)}^{(k-1)}|) \cup (|u_{x(i+1)}^{(k-1)}|, |u_{x(i-1)}^{(k-1)}|)$$

则转向②。否则,取 $u_{xi}^{(k)} = u_{xi}^*, i = i + 1$ 。若 $i > s$, 则取 $i = 1$ 并转向③, 否则转向②。

③ 由伽马分布

$$\Gamma\left(\frac{n_i + 1}{2}, \frac{1}{2}[v_i w_{xi} + n_i(m_{xi} - u_{xi}^{(k)})^2]\right)$$

抽样产生 h_{xi}^* 。若 $h_{xi}^* \notin (h_{x(i-1)}^{(k-1)}, h_{x(i+1)}^{(k-1)})$, 则转向③。否则,取 $h_{xi}^{(k)} = h_{xi}^*, i = i + 1$ 。若 $i > s$, 则取 $k = k + 1, i = 1$, 并转向②, 否则转向③。

按照上述步骤可以产生一系列抽样值,当抽样次数 k 足够大时,可以选取后面成熟的 $M(M > 5000)$ 个点进行统计计算,从而获得 X 向参数 $(u_{xi}, h_{xi}, i = 1, 2, \dots, s)$ 的 Bayes 验后分布。 Y 向参数 $(u_{yi}, h_{yi}, i = 1, 2, \dots, s)$ 的计算步骤与此类似。

工程上一般关注于产品最终所达到的状态,因此只需考虑最末批次的正态分布参数的验后分布 $\pi(u_{xs}, h_{xs}, u_{ys}, h_{ys})$, 以此出发就可以算出试验结束时的命中概率。一种简单的处理方式是由 $\pi(u_{xs}, h_{xs}, u_{ys}, h_{ys})$ 求得各个参数的验后期望,然后带入式(2)和(3),获得命中概率点估计。但该估计值为有偏估计,且无法获得命中概率的置信区间。另外一种方式是将(3)式对 $\pi(u_{xs}, h_{xs}, u_{ys}, h_{ys})$ 进行积分,或者将参数 u_{xs}, u_{ys} 和 h_{ys}, h_{ys} 的验后分布分别拟合为正态分布和 Gamma 分布,然后再将(3)式对各个参数进行积分,但计算较为繁琐。为获得命中概率的区间估计,可以从 $\pi(u_{xs}, h_{xs}, u_{ys}, h_{ys})$ 进行抽样,每次抽样获得的一组参数值带入(3)中求得一个值,多次抽样后,即可获得命中概率值的抽样分布,从中可以获得命中概率的验后均值和置信区间。这种方法施行简单,并且可以直接选取 MCMC 验后计算过程中的成熟数据作为 $\pi(u_{xs}, h_{xs}, u_{ys}, h_{ys})$ 的抽样值。

4 两向相关情况下的处理方法

前面讨论了 X, Y 向不相关情况下的变动统计方法,一般适用于目标固定或没有末端机动情况。但对于运动目标,尤其是不具有轴角对称性的面目标,导弹一般会在弹道末端进行机动,以达到更高的命中概率和毁伤程度。此时很难选取一个固定的坐标系来实现所有批次内落点的去相关处理。对于运动目标,一般可以选取某个固连于目标上的坐标系,来统计落点散布情况。此时得到的单个批次内的落点分布与另一批次的落点分布不仅在分布参数 (u_x, h_x, u_y, h_y) 上有差别,而且 X, Y 向相关系数 ρ 也不同,即第 i 批次对应的相关系数 ρ_i 不等于第 j 批次对应的相关系数 ρ_j 。由于有相关系数的存在,此

时的参数 (u_x, h_x, u_y, h_y) 并不能直接反映落点准确度和密集度的变化情况,也无法建立各参数所对应的顺序约束关系。此时,应当对各个批次落点数据分别进行正交变换,即针对第 i 批次内的落点数据,根据相关系数 ρ_i 和 X, Y 向标准差 $(\sigma_{xi}, \sigma_{yi})$, 将坐标系逆时针旋转某个特定角度 θ_i , 使新的 X', Y' 轴分别位于二维正态分布方差最大和最小的方向上。为了建立后续的顺序约束关系,特意将 X 轴旋转到方差最大的方向上,将 Y 轴旋转到方差最小的方向上。经计算可知:

$$\theta_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\rho_i\sigma_{xi}\sigma_{yi}}{\sigma_{xi}^2 - \sigma_{yi}^2}\right), & \sigma_{xi}^2 > \sigma_{yi}^2 \\ \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\rho_i\sigma_{xi}\sigma_{yi}}{\sigma_{xi}^2 - \sigma_{yi}^2}\right) + \operatorname{sgn}(\rho_i) \frac{\pi}{2}, & \sigma_{xi}^2 < \sigma_{yi}^2 \\ \operatorname{sgn}(\rho_i) \frac{\pi}{4}, & \sigma_{xi}^2 = \sigma_{yi}^2 \end{cases} \quad (11)$$

可知: $\theta_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 。其中:

$$\rho_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}} \quad (12)$$

正交变换矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

此时可通过新坐标系下的落点坐标 $(x'_{ij}, y'_{ij})^T$ 计算正态分布参数 $u'_{xi}, u'_{yi}, h'_{xi}, h'_{yi}$, 其中:

$$\begin{aligned} (x'_{ij}, y'_{ij})^T &= C(x_{ij}, y_{ij})^T \\ (u'_{xi}, u'_{yi})^T &= C(u_{xi}, u_{yi})^T \end{aligned} \quad (14)$$

此时,可以认为随着批次增加,各批次分布参数呈现如下顺序约束关系:

$$\begin{aligned} \infty > |u'_{x1}| > |u'_{x2}| > \dots > |u'_{xs}| > 0 \\ 0 < h'_{x1} < h'_{x2} < \dots < h'_{xs} < \infty \end{aligned} \quad (15)$$

Y 方向与此类似。此时就可以应用第 2,3 节中的方法进行统计推断,获得最终批次正态分布准确度、密集度参数的 Bayes 验后分布。但是,与固定目标情况不同,在计算命中概率时,必须考虑各批次旋转角度 θ_i 的不同。如果产品设计时对 θ 没有任何控制,那么可以将各批次试验实际计算得到的 θ_i 取值忽略掉,认为 θ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 范围内均匀分布。如果在产品设计时出于提高命中概率或其他产

品性能的考虑,要求 θ 尽可能地趋于某个固定角度 α (如 $\alpha = 0$, 使得散布方差最大的方向尽量与目标长轴方向一致),那么可以认为 θ 在某个小范围内呈现均匀分布,或截尾的正态分布,此时就需要从 s 批试验获得的实际 θ_i 值中估计出其分布。如果批次较少,也可以从有限的 θ_i 值中进行 Bootstrap 抽样,将其作为后续命中概率计算的 θ_i 样本。如果经设计部门确认,最末批次的转角值 θ_s 可作为产品定型后的技术状态,那么也可以只取 θ_s 值。在考虑转角的情况下,命中概率计算式为:

$$P_{hit} = \iint_{\tilde{b}} f(x, y | u'_{xs}, h'_{xs}, u'_{ys}, h'_{ys}, \theta) dx dy \quad (16)$$

每次由 $\pi(u'_{xs}, h'_{xs}, u'_{ys}, h'_{ys}, \theta)$ 分布中抽样并带入上式得到一个命中概率值,多次抽样后即可获得 P_{hit} 的分布情况。

需要注意的是,上述分析的前提是: θ 角的分布与其他参数 $u'_{xs}, h'_{xs}, u'_{ys}, h'_{ys}$ 的分布相互独立,即 $\pi(\theta | u'_{xs}, h'_{xs}, u'_{ys}, h'_{ys}) = \pi(\theta)$ 。这与产品本身的设计特性和攻击过程规律有关,一般情况下是成立的。如果 θ_i 样本较少,无法通过统计方法来证实,也可以由产品设计方对这一点加以分析,以确定各参数间的相依性。如果确实存在相依性,可以用条件分布的形式将其规律表达出来,并在仿真过程中首先产生 $u'_{xs}, h'_{xs}, u'_{ys}, h'_{ys}$ 的分布,然后依据该条件分布生成 θ 的分布。

5 实例分析与比较

假设打击目标为 $60 \text{ m} \times 40 \text{ m}$ 的长方形运动目标,落点坐标系以目标对称中心为原点, X 轴沿目标长方形长边方向。落点数据如表 1 所示,试验分 3 个批次进行,各批次之间存在技术状态的改进,准确度和密集度逐渐提高,命中概率也随之提高。但由于各批次样本较小,需要融合多批次数据进行分析。

首先分别求取各批次试验中 X, Y 向相关系数及方差,通过(11)式得到正交变换所需旋转的角度: $\theta_1 = -0.201, \theta_2 = -0.603, \theta_3 = -0.475$ (单位:弧度)。由(13)式可得各批次各自所对应的正交变换矩阵,将原始数据转换到新的坐标系 $X'OY'$ 下。此时得到 X', Y' 向的参数 MLE 如表 2 所示。按照顺序约束关系,采用 MCMC 方法计算 Bayes 验后分布,得到各个分布参数的验后均值和方差如表 2 所示。

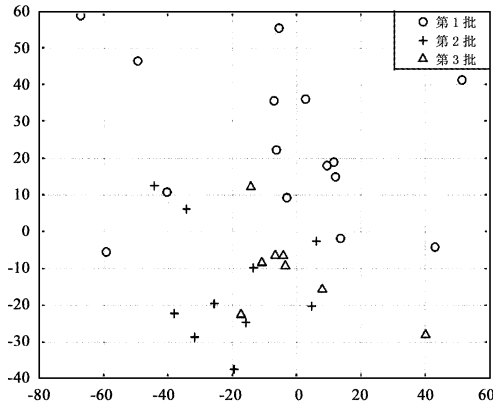


图 1 多批次试验落点分布图/m

Fig. 1 Plotting of multi-batch tests points of fall/m

表 1 多批次试验落点数据/m

Table 1 Multi-batch test points of fall/m

| (x_{1j}, y_{1j}) | | (x_{2j}, y_{2j}) | | (x_{3j}, y_{3j}) | |
|--------------------|-------|--------------------|--------|--------------------|--------|
| -49.34 | 46.36 | 6.22 | -2.62 | 8.09 | -15.72 |
| -59.29 | -5.54 | -31.58 | -28.65 | -10.75 | -8.41 |
| -40.39 | 10.72 | -13.34 | -9.82 | 40.19 | -28.02 |
| -5.46 | 55.39 | -34.17 | 6.11 | -3.48 | -9.28 |
| 2.74 | 36.05 | -25.56 | -19.67 | -17.25 | -22.59 |
| -67.16 | 58.77 | -44.18 | 12.49 | -14.20 | 12.13 |
| 9.56 | 17.99 | -19.42 | -37.42 | -6.53 | -6.49 |
| 11.62 | 18.89 | 4.79 | -20.30 | -4.08 | -6.55 |
| -6.23 | 22.27 | -15.67 | -24.69 | | |
| 51.48 | 41.25 | -38.01 | -22.28 | | |
| -6.94 | 35.61 | | | | |
| 43.11 | -4.16 | | | | |
| 12.17 | 14.91 | | | | |
| 13.71 | -1.86 | | | | |
| -3.01 | 9.24 | | | | |

表 2 MLE 与 Bayes 验后估计的比较

Table 2 Comparison of MLE and Bayesian posterior

| | MLE | 验后均值 | 验后标准差 |
|-----------|--------|--------|--------|
| u'_{x1} | -10.85 | -16.74 | 8.53 |
| h'_{x1} | 0.0008 | 0.0008 | 0.0003 |
| u'_{y1} | 22.00 | 26.24 | 4.28 |
| h'_{y1} | 0.0025 | 0.0025 | 0.0009 |
| u'_{x2} | -9.06 | -8.74 | 5.69 |
| h'_{x2} | 0.003 | 0.0025 | 0.001 |
| u'_{y2} | -24.05 | -21.36 | 3.70 |
| h'_{y2} | 0.0046 | 0.0054 | 0.002 |
| u'_{x3} | 3.97 | 2.05 | 4.30 |
| h'_{x3} | 0.0025 | 0.004 | 0.0014 |
| u'_{y3} | -9.90 | -9.75 | 3.15 |
| h'_{y3} | 0.0127 | 0.0154 | 0.0069 |

由表中数据可以看出,对于正态分布参数,除第 1 批次外, X', Y' 方向的准确度、密集度的 Bayes 验后估计大多高于仅利用单批次数据获得的 MLE 估

计。对于偏转角度 θ , 其经验分布可以采用第 4 节所述方法进行选取。继而利用 $\pi(u'_{x3}, h'_{x3}, u'_{y3}, h'_{y3}, \theta)$ 计算命中概率。

命中概率的计算可以在原始坐标系中进行,此时需要将所有参数转换到原始坐标系中进行积分。此外,也可以在旋转后的坐标系中进行计算,此时只需将目标反向(顺时针)旋转 θ 角即可。

由于 θ 仅有三个样本 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 可供利用,首先设定 θ 取 3 个样本值 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的概率分别为 1/3, 也即从 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 中进行 Bootstrap 抽样。此时获得的 P_{hit} 验后均值为:0.7853, 标准差为:0.0882。如果经专家认定,可只取 θ_3 作为 θ 的取值,此时计算获得的 P_{hit} 验后均值为:0.7834, 标准差为 0.0877。

如果采用经典统计方法,只利用第 3 阶段数据,计算获得的命中概率值为:0.7324。或者简单地认为 3 个批次试验为同一总体,将 3 个阶段数据混合在一起,计算获得的命中概率估计值为:0.3975。

可以看出,采用顺序约束关系获得命中概率值高于经典统计方法,其原因在于基于顺序约束关系,使得历史数据对当前批次参数的分布区间进行了有效的压缩,不仅有助于获得更高的命中概率值,并且能够缩短其置信区间。需要注意的是,上述推理的前提是顺序约束关系必须成立。在大样本的情况下,可以基于经典统计中的假设检验方法对这种约束关系进行判断,而在小样本情况下,则需要经过专家对其他信息的分析加以判断。

6 结论

本文分析了多批次试验的特点和存在的问题,提出采用顺序约束方法解决试验中的命中概率指标统计评定问题。分别讨论了 X, Y 向不相关和相关两种情况下的 Bayes 分析方法,并在验后计算中采用 MCMC 方法来获得验后抽样分布。得到了以下结论:

(1) 采用顺序约束模型可以反映多批次试验在技术状态上的改进。通过对准确度参数、密集度参数建立顺序约束关系,并在 Bayes 方法的参数验后计算过程中采用 MCMC 方法,可以获得各参数的验后分布抽样。相较于传统方法,这种方法能够提高命中概率估计值,缩短参数置信区间,是一种融合多批次信息的有效方法。

(2) 针对两向相关情况,通过提取各批次内两向相关系数,对各批次数据分别进行正交变换,从而

实现去相关处理。通过对多批次试验中旋转角度的分布进行估计,并在命中概率指标计算中引入这一参数,从而解决相关情况下的多批次试验统计评定问题。通过实例体现了该方法的适应性。

此外,需要说明的是,虽然本文讨论了顺序约束关系下的参数 Bayes 验后计算方法,但这种方法并不排斥等式约束的情形。如果两个或多个参数间存在等式约束关系(例如 $u_{xi} = u_{xj}$),只需将该等式带入验后分布密度核函数(8)或(10)中,并相应修改参数的满条件分布形式,同样可以使用 MCMC 方法进行验后分布的计算。

参考文献:

- [1] 程云门. 评定射击效率原理[M]. 北京: 解放军出版社, 1986. [CHENG Yun-men, The Principles of Shooting Effectiveness Assessment[M]. Beijing: PLA Press, 1986.]
- [2] 潘承泮. 武器系统射击效力[M]. 北京: 兵器工业出版社, 1994. [PAN Cheng-pan. The Shooting Effectiveness of Weapon Systems[M]. Beijing: Weapon Industry Press, 1994.]
- [3] 张金槐. 命中概率的一致最小方差无偏估计[J]. 国防科技大学学报, 1984, 4: 65 - 76. [ZHANG Jin-huai. The uniformly minimum variance unbiased estimate of hitting probability[J]. Journal of National University of Defense Technology, 1984, 4: 65 - 76.]
- [4] 杨经卿. 评定飞航导弹单发命中概率的方法研究[J]. 战术导弹技术, 1995, 6: 1 - 9. [YANG Jing-qing. A study for evaluation method of the hit probability by single shot for cruise missile[J]. Tactical Missile Technology, 1995, 6: 1 - 9.]
- [5] 周新华. 导弹系统命中概率检验方法研究[J]. 飞行试验, 1993, 9(1): 22 - 27. [ZHOU Xin-hua. Research on hypothesis testing of weapon system hitting probability[J]. Journal of Flying Testing, 1993, 9(3): 22 - 27.]
- [6] 王兆胜. 远程炮武器系统射击精度研究与射击精度战技指标论证[D]. 南京: 南京理工大学, 2003. [WANG Zhao-sheng. The study of firing accuracy and firing accuracy tactical & technical requirement reasoning for long range gunnery system[D]. Nanjing: Nanjing University of Science & Technology, 2003.]
- [7] LI Q, WANG H, LIU J. Small sample bayesian analyses in assessment of weapon performance[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2007, 18(3): 545 - 550.
- [8] 王兆胜, 刘志强, 刘全文. 子母弹射击精度的仿真研究[J]. 火力与指挥控制, 2007, 32(3): 76 - 78. [WANG Zhao-sheng, LIU Zhi-qiang, LIU Quan-wen. Simulation study on firing accuracy of cargo-projectile[J]. Fire Control and Command Control, 2007, 3, 32(3): 76 - 78.]
- [9] 王树山, 买瑞敏. 集束箭弹命中概率分析的 Monte-Carlo 方法[J]. 北京理工大学学报, 2005, 25(4): 286 - 288. [WANG Shu-shan, MAI Rui-min. Monte-carlo analysis method on hit probability of multi-arrow canisters[J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2005, 25(4): 286 - 288.]
- [10] 陈建荣, 郭齐胜, 刘军. 地面运动目标攻击命中概率模型及仿真[J]. 火力与指挥控制, 2007, 32(7): 43 - 46. [CHEN Jian-rong, GUO Qi-sheng, LIU Jun. Hit probability model of attacking the mobile ground target and simulation[J]. Fire Control and Command Control, 2007, 32(7): 43 - 46.]
- [11] 张士峰, 杨万君. 异总体统计问题的 Bayes 分析[J]. 战术导弹技术, 2003, 3: 33 - 37. [ZHANG Shi-feng, YANG Wan-jun. Bayesian analysis for statistical problems of diverse population[J]. Tactical Missile Technology, 2003, 3: 33 - 37.]
- [12] 周源泉. 估计逐次提高试制产品精度的 Bayes 方法[J]. 电子学报, 1984, 12(4): 51 - 56. [ZHOU Yuan-quan. A Bayesian approach for precision growth[J]. Acta Electronica Sinica, 1984, 12(4): 51 - 56.]
- [13] 王正向. 导弹单发命中概率小子样问题研究[J]. 系统工程与电子技术, 1993, 3: 27 - 44. [WANG Zheng-xiang. A study on small sample problem of missile hit probability[J]. Systems Engineering and Electronics, 1993, 3: 27 - 44.]

作者简介: 闫志强(1981 -), 男, 博士生, 主要研究方向为武器装备试验与鉴定、可靠性增长试验管理与评估。

通信地址: 湖南长沙国防科学技术大学机电工程与自动化学院 314 教研室(410073)

电话: (0731)84573370 - 807

E-mail: zeno.yan@gmail.com

Evaluation of Hitting Probability for Multi-batch Tests Based on Ordinal Constraints

YAN Zhi-qiang, JIANG Ying-jie, XIE Hong-wei

(Coll. of Mechatronic Engineering and Automation. National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: To solve the problem of diverse population statistics arising from the advancement of technical levels in multi-batch tests, the hitting probability evaluation method is studied based on ordinal constraints. For the condition of X - Y independence, the evaluation of hitting probability comes down to the estimation of the accuracy and precision parameters. A group of ordinal constraints are established based on the inherent rules of multi-batch tests. By virtue of MCMC (Markov Chain Monte Carlo) sampling, the Bayesian analysis is carried out to obtain the posterior kernel density and hence the sampling distribution of hitting probability. And then the expectation and confidence interval of hitting probability can be computed accordingly. Besides, for the cases of targets moving or weapons terminal maneuver, the computation of hitting probability is analyzed in the condition of X - Y correlation. Different orthogonal transforms are used to realize the decorrelation in each batch, and the parameter of rotation angle is introduced into the computation of hitting probability, thus to solve the evaluation for the special case. An example for validation is carried out, with better results than conventional methods, which shows its sound applicability and generalization in engineering.

Key words: Hitting probability; Multi-batch test; Ordinal constraints; Bayesian method; MCMC