文章编号: 1000-5641(2010)03-0119-07

系数为广义左 Lipschitz 的倒向随机微分方程解的存在性

田德建，　江　龙，　邓　芳

(中国矿业大学 理学院, 徐州　221116)

摘要: 证明了一类生成元满足广义左 Lipschitz 条件的倒向随机微分方程解的存在性. 通过单调迭代方法构造了一列单调的解序列, 然后证明其极限存在, 并为原方程的解.并值得一提的是, 这里的生成元 g 既可以关于变量 y 不连续, 同时 g 关于变量 y 和 z 的变换范围也可以与时间参数 t 有关.

关键词: 倒向随机微分方程;　广义左 Lipschitz 条件;　存在性

中图分类号: O211.63　　**文献标识码**: A

On existence of solutions to backward stochastic differential equation with generalized left-Lipschitz coefficients

TIAN De-jian,　JIANG Long,　DENG Fang

(*School of Sciences, China University of Mining and Technology, Xuzhou*　221116, *China*)

Abstract: In this paper, we proved the existence of the solution to a backward stochastic differential equations (BSDE) with the generator satisfying the generalized left-Lipschitz condition. The key idea for dealing with the problem consists in constructing a monotonic sequence of solutions to BSDE and then passing to the limit. We construct a monotonic sequence of solutions by monotonic iteration technique. It is worth noting that the generator may be not continuous with respect to variable y and the varying of generator with respect to variables y and z may be not uniformly with respect to time parameter t.

Key words: BSDE;　generalized left-Lipschitz;　existence

0　引言及主要结论

考虑如下形式的倒向随机微分方程(简记 BSDE)

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}B_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

收稿日期:　2009-10

基金项目:　国家重点基础研究发展计划973项目(2007CB814901); 国家自然科学基金(10971220); 全国优秀博士论文专项基金(200919); 江苏省青蓝工程中青年学术带头人基金

第一作者:　田德建, 男, 硕士, 研究方向为随机分析与金融数学. E-mail: tiandejian1985@163.com.

其中$(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是完备概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的d 维标准Brown运动, $(\mathcal{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是$(B_t)_{t\geqslant 0}$ 产生的满足"通常条件"的自然σ-域流, 即$\mathcal{F}_t=\sigma\{B_s,0\leqslant s\leqslant t\}\vee\mathcal{N},t\in[0,T]$, T是给定的一个正数, $\mathcal{N}$为$\sigma\{B_s,0\leqslant s\leqslant t\}$的$P$ 可略集全体; ξ 为$\mathcal{F}_T$ 可测的平方可积的随机变量, 即$\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$; 函数$g(\omega,t,y,z):\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$, 对于任意$(y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, $(g(t,y,z))_{t\in[0,T]}$ 是循序可测过程, 一般称为BSDE (1)的生成元. 称(g,T,ξ)为BSDE (1)的标准参数, BSDE (1)简记为BSDE(g,T,ξ).

1990 年, Pardoux和彭实戈[1]在生成元g关于y,z满足一致Lipschitz条件下, 证明了BSDE (1)存在唯一的适应解. 由于BSDE在随机控制、偏微分方程和金融数学[2]中有着重要的应用, 所以其研究受到很多关注. 由于一致Lipschitz条件较强, 因此人们在减弱生成元条件上做了许多工作. 例如, Lepeltier和San Martin[3]在生成元关于y,z连续和线性增长的条件下, 证明了BSDE (1)解的存在性; Chen[4]在生成元关于y,z满足广义Lipschitz条件下, 证明了BSDE (1)解的存在唯一性; 贾广岩[5, 6]在g关于y满足左Lipschitz条件下, 利用单调迭代技术证明了方程(1)解的存在性. 最近, Zheng和Zhou[7]在类似于贾广岩[5]的条件下, 对反射BSDE也证明了解的存在性.

受Lepeltier和San Martin[3], Chen[4]特别是贾广岩[5, 6]的工作启发, 本文对生成元g满足的条件进行了进一步的减弱, 给出主要条件如下.

(H1) g关于y是右连续的; g关于y满足广义左Lipschitz条件, 即存在函数$b:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$, 满足$\int_0^T b(t)\mathrm{d}t<+\infty$, 使得$\forall y_1\geqslant y_2\in\mathbb{R},z\in\mathbb{R}^d$, 有

$$|g(t,y_1,z)-g(t,y_2,z)\geqslant -b(t)(y_1-y_2),\quad P\text{-}a.s.,\forall t\in[0,T];$$

(H2) 生成元g关于z满足广义Lipschitz条件, 即存在函数$c:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$, 满足$\int_0^T c^2(t)\mathrm{d}t<+\infty$, 使得$\forall y\in\mathbb{R},z_1,z_2\in\mathbb{R}^d$, 有

$$|g(t,y,z_1)-g(t,y,z_2)|\leqslant c(t)|z_1-z_2|,\quad P\text{-}a.s.,\forall t\in[0,T];$$

(H3) 存在生成元$g_i:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}(i=1,2)$, 使得$\forall(t,y,z)$, 有

$$g_1(t,y,z)\leqslant g(t,y,z)\leqslant g_2(t,y,z),\quad P\text{-}a.s..$$

并且, 对于任意给定的$\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$, BSDE$(g_1,T,\xi)$和BSDE$(g_2,T,\xi)$分别存在一个解$(\underline{Y}^0,\underline{Z}^0)$和$(\bar{Y}^0,\bar{Z}^0)$, 满足$\underline{Y}_t^0\leqslant\bar{Y}_t^0$, $\forall t\in[0,T]$, $P\text{-}a.s.$, 且$\mathrm{E}[(\int_0^T|g_1(s,\underline{Y}_s^0,\underline{Z}_s^0)|\mathrm{d}s)^2]+\mathrm{E}[(\int_0^T|g_2(s,\bar{Y}_s^0,\bar{Z}_s^0)|\mathrm{d}s)^2]<+\infty$.

本文的主要结论是:

定理 1 设g满足(H1–H3), 则对任意$\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$, BSDE$(g,T,\xi)$至少存在一个解.

1 预备工作

首先引入两个常用的随机过程空间:

$$\mathcal{S}^2(0,T,\mathbb{R})\triangleq\{\psi:\psi\text{是连续实值循序可测过程且 }\mathrm{E}[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\psi_t|^2]<+\infty\},$$
$$\mathcal{H}^2(0,T,\mathbb{R}^d)\triangleq\{\psi:\psi\text{是}\mathbb{R}^d\text{值循序可测过程且}\parallel\psi\parallel^2=\mathrm{E}[\int_0^T|\psi_t|^2dt]<+\infty\}.$$

BSDE(g,T,ξ)的解是指$\mathcal{S}^2(0,T,\mathbb{R})\times\mathcal{H}^2(0,T,\mathbb{R}^d)$上的一对随机过程$(y_t,z_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$满足方程(1).

介绍下面两个引理, 分别为广义 Lipschitz 条件下 BSDE 解的存在唯一性定理和相应的比较定理.

引理 1[4]　生成元$g:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ 满足下列条件:

(A1)　对任意的$(y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, g(\cdot,y,z)$是一个循序可测过程, 且使得式子$(\mathrm{E})[(\int_0^T|g(s,0,0)|\mathrm{d}s)^2]<+\infty$ 成立;

(A2)　g 满足广义 Lipschitz 条件, 即 $\forall y_1,y_2\in\mathbb{R},z_1,z_2\in\mathbb{R}^d$ 有

$$|g(t,y_1,z_1)-g(t,y_2,z_2)|\leqslant b(t)|y_1-y_2|+c(t)|z_1-z_2|,\quad \forall t\in[0,T],$$

其中, $b(t)$ 和 $c(t)$ 为非负确定性函数且满足 $\int_0^T[b(t)+c^2(t)]\mathrm{d}t<+\infty$.

则 $\forall\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$, BSDE$(g,T,\xi)$ 存在唯一的适应解.

引理 2[8]　设 $\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$, g^1, g^2 都满足条件(A1)和(A2), 设 $(y^i,z^i)(i=1,2)$ 分别是 BSDE(g^i,T,ξ) 的解. 若 $\forall(t,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, 有 $g^1(t,y,z)\geqslant g^2(t,y,z)$, 则 P-$a.s.$, $y_t^1\geqslant y_t^2$, $\forall t\in[0,T]$.

注 1　事实上, 在 Chen 和 Wang[8]的证明过程中, 可以发现, 如果 BSDE (g^1,T,ξ) 和 BSDE (g^2,T,ξ)分别有解(y^1,z^1)和(y^2,z^2), 若g^1满足条件(A1)和(A2)并且$g^1(t,y_t^2,z_t^2)\geqslant g^2(t,y_t^2,z_t^2)$(或者$g^2$满足(A1)和(A2)并且$g^1(t,y_t^1,z_t^1)\geqslant g^2(t,y_t^1,z_t^1)$), 引理 2 依然成立.

应用经典的常微分方程和偏微分方程中的单调迭代技术[9]和贾广岩[5,6]的思想来进行我们的证明工作. 构造一列 BSDE, 形如

$$\bar{Y}_t^0=\xi+\int_t^T g_2(s,\bar{Y}_s^0,\bar{Z}_s^0)\mathrm{d}s-\int_t^T\bar{Z}_s^0\mathrm{d}B_s,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\bar{Y}_t^{i+1}=\xi&+\int_t^T\left[g(s,\bar{Y}_s^i,\bar{Z}_s^i)+b(s)(\bar{Y}_s^i-\bar{Y}_s^{i+1})+c(s)|\bar{Z}_s^i-\bar{Z}_s^{i+1}|\right]\mathrm{d}s\\&-\int_t^T\bar{Z}_s^{i+1}\mathrm{d}B_s,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,\end{aligned}\tag{3}$$

$$\underline{Y}_t^0=\xi+\int_t^T g_1(s,\underline{Y}_s^0,\underline{Z}_s^0)\mathrm{d}s-\int_t^T\underline{Z}_s^0\mathrm{d}B_s,\qquad 0\leqslant t\leqslant T.\tag{4}$$

由假设(H3)知, 方程(2)和方程(4)有解, 且$(\bar{Y}^0,\bar{Z}^0)$和$(\underline{Y}^0,\underline{Z}^0)$分别是方程(2)和方程(4)的解. 方程(3)解的存在唯一性可以从下面引理 3 的证明过程中得出.

引理 3　设 g 满足(H1-H3), 则对任意的非负整数 i, 有

(i) $\mathrm{E}[(\int_0^T|g(s,\bar{Y}_s^i,\bar{Z}_s^i)|\mathrm{d}s)^2]<\infty$;

(ii) 方程(3)有唯一解$(\bar{Y}_t^{i+1},\bar{Z}_t^{i+1})$;

(iii) $\underline{Y}_t^0\leqslant\bar{Y}_t^{i+1}\leqslant\bar{Y}_t^i\leqslant\bar{Y}_t^0$, P-$a.s.$, $\forall t\in[0,T]$.

证　明　用归纳法. 当 $i=0$ 时, 由条件(H1-H2), 有 $\forall y_1\geqslant y_2\in\mathbb{R},z_1,z_2\in\mathbb{R}^d,P$-$a.s.$,

$$g(t,y_1,z_1)-g(t,y_2,z_2)\geqslant-b(t)(y_1-y_2)-c(t)|z_1-z_2|,\quad\forall t\in[0,T].\tag{5}$$

由(H3)可知, $\underline{Y}_t^0\leqslant\bar{Y}_t^0$, 所以利用(5)式可得

$$g(s,\underline{Y}_s^0,\underline{Z}_s^0)-b(s)(\bar{Y}_s^0-\underline{Y}_s^0)-c(s)|\bar{Z}_s^0-\underline{Z}_s^0|\leqslant g(s,\bar{Y}_s^0,\bar{Z}_s^0).$$

又由条件(H3), 可得

$$g_1(s,\underline{Y}_s^0,\underline{Z}_s^0)-b(s)(\bar{Y}_s^0-\underline{Y}_s^0)-c(s)|\bar{Z}_s^0-\underline{Z}_s^0|\leqslant g(s,\bar{Y}_s^0,\bar{Z}_s^0)\leqslant g_2(s,\bar{Y}_s^0,\bar{Z}_s^0).\tag{6}$$

由(H1-H3), 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\left(\int_0^T b(s)|\bar{Y}_s^0-\underline{Y}_s^0|\mathrm{d}s\right)^2\right] &\leqslant \mathrm{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\bar{Y}_s^0-\underline{Y}_s^0|^2\left(\int_0^T b(s)\mathrm{d}s\right)^2\right]\\
&=\left(\int_0^T b(s)\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\bar{Y}_s^0-\underline{Y}_s^0|^2\right]<\infty, \qquad (7)\\
\mathrm{E}\left[\left(\int_0^T c(s)|\bar{Z}_s^0-\underline{Z}_s^0|\mathrm{d}s\right)^2\right] &\leqslant \mathrm{E}\left[\int_0^T c^2(s)\mathrm{d}s\int_0^T|\bar{Z}_s^0-\underline{Z}_s^0|^2\mathrm{d}s\right]\\
&=\int_0^T c^2(s)\mathrm{d}s\mathrm{E}\left[\int_0^T|\bar{Z}_s^0-\underline{Z}_s^0|^2\mathrm{d}s\right]<\infty. \qquad (8)
\end{aligned}$$

由(H3)中g_1, g_2 的可积性, 以及(6)–(8)式, 可得

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_0^T|g(s,\bar{Y}_s^0,\bar{Z}_s^0)|\mathrm{d}s\right)^2\right]<\infty. \qquad (9)$$

故由引理 1 可知当$i=0$ 时方程(3)存在唯一解$(\bar{Y}_t^1,\bar{Z}_t^1)$.

对(6)式应用引理 2 以及注 1 可知

$$\underline{Y}_t^0\leqslant\bar{Y}_t^1\leqslant\bar{Y}_t^0,\quad P\text{-}a.s.,\quad \forall t\in[0,T].$$

当$i=1$, 由于$\underline{Y}_t^0\leqslant\bar{Y}_t^1\leqslant\bar{Y}_t^0$, 类似于不等式(6), 可得

$$\begin{aligned}
&g_1(s,\underline{Y}_s^0,\underline{Z}_s^0)-b(s)(\bar{Y}_s^1-\underline{Y}_s^0)-c(s)|\bar{Z}_s^1-\underline{Z}_s^0|\leqslant g(s,\bar{Y}_s^1,\bar{Z}_s^1),\\
&g(s,\bar{Y}_s^1,\bar{Z}_s^1)\leqslant g(s,\bar{Y}_s^0,\bar{Z}_s^0)+b(s)(\bar{Y}_s^0-\bar{Y}_s^1)+c(s)|\bar{Z}_s^0-\bar{Z}_s^1|.
\end{aligned}$$

由(H3)中g_1的可积性和(9)式, 以及类似于(7)式和(8)式的结果, 我们有

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_0^T|g(s,\bar{Y}_s^1,\bar{Z}_s^1)|\mathrm{d}s\right)^2\right]<\infty.$$

故由引理 1 可知 $i=1$ 时方程(3)存在唯一解$(\bar{Y}_t^2,\bar{Z}_t^2)$. 应用引理 2 以及注 1, 可知

$$\underline{Y}_t^0\leqslant\bar{Y}_t^2\leqslant\bar{Y}_t^1,\quad P\text{-}a.s.,\quad \forall t\in[0,T].$$

假设当$i=k-1$ 时结论成立, 即有$\mathrm{E}[(\int_0^T|g(s,\bar{Y}_s^{k-1},\bar{Z}_s^{k-1})|\mathrm{d}s)^2]<\infty$, 方程(3)有唯一解$(\bar{Y}_t^k,\bar{Z}_t^k)$ 且$\underline{Y}_t^0\leqslant\bar{Y}_t^k\leqslant\bar{Y}_t^{k-1}\leqslant\bar{Y}_t^0$. 同样类似于不等式(6), 可得

$$\begin{aligned}
&g_1(s,\underline{Y}_s^0,\underline{Z}_s^0)-b(s)(\bar{Y}_s^k-\underline{Y}_s^0)-c(s)|\bar{Z}_s^k-\underline{Z}_s^0|\leqslant g(s,\bar{Y}_s^k,\bar{Z}_s^k),\\
&g(s,\bar{Y}_s^k,\bar{Z}_s^k)\leqslant g(s,\bar{Y}_s^{k-1},\bar{Z}_s^{k-1})+b(s)(\bar{Y}_s^{k-1}-\bar{Y}_s^k)+c(s)|\bar{Z}_s^{k-1}-\bar{Z}_s^k|.
\end{aligned}$$

由假设同理可得

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_0^T|g(s,\bar{Y}_s^k,\bar{Z}_s^k)|\mathrm{d}s\right)^2\right]<\infty.$$

由引理 1 知 $i=k$ 时方程(3)存在唯一解$(\bar{Y}_t^{k+1},\bar{Z}_t^{k+1})$. 应用引理 2 以及注 1 可知

$$\underline{Y}_t^0 \leqslant \bar{Y}_t^{k+1} \leqslant \bar{Y}_t^k, P\text{-}a.s., \quad \forall t \in [0,T].$$

至此, 引理 3 证毕.

引理 4　设 g 满足(H1-H3), 则 $\sup\limits_i \mathrm{E}[\int_0^T |\bar{Z}_s^i|^2 \mathrm{d}s] < \infty$.

证　明　由引理 3 (iii)知$\{(\bar{Y}_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^{\infty}$ 在$\mathcal{S}^2(0,T,\mathbb{R})$中收敛, 将其极限记为$(\bar{Y}_t)_{t\in[0,T]}$. 则有

$$\sup_i \mathrm{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\bar{Y}_t^i|^2\Big] \leqslant \mathrm{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\bar{Y}_t^0|^2\Big] + \mathrm{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\underline{Y}_t^0|^2\Big] \triangleq C_0 < \infty. \tag{10}$$

对$|\bar{Y}_t^{i+1}|^2$ 使用Itô 公式，可得

$$\mathrm{E}\Big[|\bar{Y}_t^{i+1}|^2\Big] + \mathrm{E}\int_t^T |\bar{Z}_s^{i+1}|^2 \mathrm{d}s = \mathrm{E}\Big[\xi^2\Big] + M_t^i, \tag{11}$$

其中, $M_t^i = 2\mathrm{E}\int_t^T \bar{Y}_s^{i+1}[g(s,\bar{Y}_s^i,\bar{Z}_s^i) + b(s)(\bar{Y}_s^i - \bar{Y}_s^{i+1}) + c(s)|\bar{Z}_s^i - \bar{Z}_s^{i+1}|]\mathrm{d}s$.

由引理 3 (iii)和不等式(6)以及条件(H3)可得

$$\begin{aligned} |g(s,\bar{Y}_s^i,\bar{Z}_s^i)| \leqslant{}& |g_1(s,\underline{Y}_s^0,\underline{Z}_s^0)| + |g_2(s,\bar{Y}_s^0,\bar{Z}_s^0)| + 2b(s)\left(|\underline{Y}_s^0| + |\bar{Y}_s^0| + |\bar{Y}_s^i|\right) \\ &+ 2c(s)\left(|\underline{Z}_s^0| + |\bar{Z}_s^0| + |\bar{Z}_s^i|\right). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} M_0^i \leqslant{}& 2\mathrm{E}\int_0^T |\bar{Y}_s^{i+1}|\left|g(s,\bar{Y}_s^i,\bar{Z}_s^i) + b(s)(\bar{Y}_s^i - \bar{Y}_s^{i+1}) + c(s)|\bar{Z}_s^i - \bar{Z}_s^{i+1}|\right|\mathrm{d}s \\ \leqslant{}& 6\mathrm{E}\int_0^T |\bar{Y}_s^{i+1}|\Big[b(s)\left(|\underline{Y}_s^0| + |\bar{Y}_s^0| + |\bar{Y}_s^i| + |\bar{Y}_s^{i+1}|\right) + |g_1(s,\underline{Y}_s^0,\underline{Z}_s^0)| \\ &+ |g_2(s,\bar{Y}_s^0,\bar{Z}_s^0)|\Big]\mathrm{d}s + 6\mathrm{E}\int_0^T c(s)|\bar{Y}_s^{i+1}|\left(|\underline{Z}_s^0| + |\bar{Z}_s^0| + |\bar{Z}_s^i| + |\bar{Z}_s^{i+1}|\right)\mathrm{d}s \\ \leqslant{}& C_1 + 6\mathrm{E}\int_0^T c(s)|\bar{Y}_s^{i+1}|\left(|\underline{Z}_s^0| + |\bar{Z}_s^0| + |\bar{Z}_s^i| + |\bar{Z}_s^{i+1}|\right)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

其中, C_1不依赖于i的选取. 事实上, 由条件(H1)中$b(t)$的可积性、条件(H3)以及(10)式可知

$$\begin{aligned} C_1 \triangleq 6\sup_i \mathrm{E}\int_0^T |\bar{Y}_s^{i+1}|\Big[&b(s)\left(|\underline{Y}_s^0| + |\bar{Y}_s^0| + |\bar{Y}_s^i| + |\bar{Y}_s^{i+1}|\right) \\ &+ |g_1(s,\underline{Y}_s^0,\underline{Z}_s^0)| + |g_2(s,\bar{Y}_s^0,\bar{Z}_s^0)|\Big]\mathrm{d}s < \infty. \end{aligned}$$

进而利用Hölder不等式以及(10)式, 可得

$$M_0^i \leqslant C_1 + 6\sqrt{C_0}\mathrm{E}\left[\left(\int_0^T c(s)(|\underline{Z}_s^0| + |\bar{Z}_s^0| + |\bar{Z}_s^i| + |\bar{Z}_s^{i+1}|)\mathrm{d}s\right)^2\right]^{1/2}. \tag{12}$$

由于$\forall a,b,c\geqslant 0, (a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$ 以及$\sqrt{a+b+c} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, 因此(12)式可

化为

$$M_0^i \leqslant C_1 + 6\sqrt{C_0}\mathrm{E}\left[3\left(\int_0^T c(s)(|\underline{Z}_s^0| + |\bar{Z}_s^0|)\mathrm{d}s\right)^2\right]^{1/2}$$

$$+ 6\sqrt{C_0}\mathrm{E}\left[3\left(\int_0^T c(s)|\bar{Z}_s^i|\mathrm{d}s\right)^2\right]^{1/2} + 6\sqrt{C_0}\mathrm{E}\left[3\left(\int_0^T c(s)|\bar{Z}_s^{i+1}|\mathrm{d}s\right)^2\right]^{1/2}.$$

令$C_2 \triangleq C_1 + \mathrm{E}[\xi^2] + 6\sqrt{C_0}\mathrm{E}[3(\int_0^T c(s)(|\underline{Z}_s^0| + |\bar{Z}_s^0|)\mathrm{d}s)^2]^{1/2}$, 返回到(11)式, 有

$$\mathrm{E}\int_0^T |\bar{Z}_s^{i+1}|^2 ds \leqslant C_2 + 18\sqrt{C_0}\mathrm{E}\left[\left(\int_0^T c(s)|\bar{Z}_s^i|\mathrm{d}s\right)^2\right]^{1/2}$$

$$+ 18\sqrt{C_0}\mathrm{E}\left[\left(\int_0^T c(s)|\bar{Z}_s^{i+1}|\mathrm{d}s\right)^2\right]^{1/2}.$$

由 Hölder 不等式, $ab \leqslant \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon, (\varepsilon > 0)$ 以及条件(H2)中 $c(t)$ 的可积性, 可得

$$\mathrm{E}\int_0^T |\bar{Z}_s^{i+1}|^2\mathrm{d}s \leqslant C_2 + 18\sqrt{C_0}\mathrm{E}\left[\int_0^T c^2(s)\mathrm{d}s\int_0^T |\bar{Z}_s^i|^2\mathrm{d}s\right]^{1/2}$$

$$+ 18\sqrt{C_0}\mathrm{E}\left[\int_0^T c^2(s)\mathrm{d}s\int_0^T |\bar{Z}_s^{i+1}|^2\mathrm{d}s\right]^{1/2}$$

$$\leqslant C_2 + 2\times 4\times 18^2 C_0\int_0^T c^2(s)\mathrm{d}s$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\mathrm{E}\left[\int_0^T |\bar{Z}_s^i|^2\mathrm{d}s\right] + \mathrm{E}\left[\int_0^T |\bar{Z}_s^{i+1}|^2\mathrm{d}s\right]\right).$$

令$C_3 \triangleq C_2 + 2\times 4\times 18^2 C_0\int_0^T c^2(s)\mathrm{d}s$, 因此可得

$$\mathrm{E}\int_0^T |\bar{Z}_s^{i+1}|^2\mathrm{d}s \leqslant \frac{4}{3}C_3 + \frac{1}{3}\mathrm{E}\int_0^T |\bar{Z}_s^i|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \frac{4}{3}C_3\sum_{k=0}^{i}\frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^{i+1}}\mathrm{E}\int_0^T |\bar{Z}_s^0|^2\mathrm{d}s \leqslant 2C_3 + \frac{1}{3}\mathrm{E}\int_0^T |\bar{Z}_s^0|^2\mathrm{d}s.$$

至此, 我们证明了$\sup\limits_i \mathrm{E}[\int_0^T |\bar{Z}_s^i|^2\mathrm{d}s] < \infty$.

2 定理 1 的证明

应用引理 3 和引理 4 , 就可以证明本文的主要结论定理 1 . 令

$$\varphi_s^{p+1} = g(s, \bar{Y}_s^p, \bar{Z}_s^p) + b(s)(\bar{Y}_s^p - \bar{Y}_s^{p+1}) + c(s)|\bar{Z}_s^p - \bar{Z}_s^{p+1}|.$$

运用引理 4 中同样的处理办法, 可以证明

$$\sup_i \mathrm{E}\left[\left(\int_0^T |\bar{\varphi}_s^i|\mathrm{d}s\right)^2\right] < +\infty.$$

对$|\bar{Y}_t^p-\bar{Y}_t^q|^2$ 用Itô 公式, 有

$$|\bar{Y}_0^p-\bar{Y}_0^q|^2+\mathrm{E}\int_0^T|\bar{Z}_s^p-\bar{Z}_s^q|^2\mathrm{d}s=2\mathrm{E}\int_0^T(\bar{Y}_s^p-\bar{Y}_s^q)(\bar{\varphi}_s^p-\bar{\varphi}_s^q)\mathrm{d}s.$$

因此有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\int_0^T|\bar{Z}_s^p-\bar{Z}_s^q|^2\mathrm{d}s&\leqslant 2\mathrm{E}\int_0^T(\bar{Y}_s^p-\bar{Y}_s^q)(\bar{\varphi}_s^p-\bar{\varphi}_s^q)\mathrm{d}s\\&\leqslant 2\mathrm{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\bar{Y}_s^p-\bar{Y}_s^q|\int_0^T(|\bar{\varphi}_s^p|+|\bar{\varphi}_s^q|)\mathrm{d}s\right]\\&\leqslant 2\mathrm{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\bar{Y}_s^p-\bar{Y}_s^q|^2\Big]^{1/2}\mathrm{E}\left[\left(\int_0^T(|\bar{\varphi}_s^p|+|\bar{\varphi}_s^q|)\mathrm{d}s\right)^2\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

又由引理 3 知, $\{(\bar{Y}_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^\infty$ 在$\mathcal{S}^2(0,T,\mathbb{R})$ 中收敛, 极限为$(\bar{Y}_t)_{t\in[0,T]}$. 因此$\{(\bar{Z}_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^\infty$ 是完备空间$\mathcal{H}^2(0,T,\mathbb{R}^d)$中的Cauchy 列, 故其极限存在, 并将极限记为$(\bar{Z}_t)_{t\in[0,T]}$.

由于 g 关于 y 右连续, 令$i\to+\infty$, 对方程(3)两边同时取极限, 即得

$$\bar{Y}_t=\xi+\int_t^T g(s,\bar{Y}_s,\bar{Z}_s)\mathrm{d}s-\int_t^T\bar{Z}_s\mathrm{d}B_s,\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

所以$(\bar{Y}_t,\bar{Z}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是 BSDE(g,T,ξ) 的解. 证毕.

注 2　类似于文献[6]中的情形, 可以证明我们这里得到的解是最大解.

推论 1　设 g 满足(H1)和(H2)且$|g(\omega,t,y,z)|\leqslant a_t(\omega)+b(t)|y|+c(t)|z|$ 时, 其中$a_t(\omega)$ 满足$\mathrm{E}[(\int_0^T|a_t(\omega)|\mathrm{d}t)^2]<+\infty$, 那么 BSDE$(g,T,\xi)$有解.

证　明　取$g_1=a_t(\omega)+b(t)|y|+c(t)|z|$, $g_2=-a_t(\omega)-b(t)|y|-c(t)|z|$. 可以验证生成元 g 满足(H3), 利用定理 1 即知推论 1 成立. 证毕.

例 1　设生成元 $g=I_{t\neq 0}I_{y\geqslant 0}\frac{\sqrt{|y|}}{\sqrt{t}}$, 其中 $I_{\{\cdot\}}$ 表示示性函数. 可以验证 g 满足条件(H1-H3), 所以它所对应的BSDE (g,T,ξ)解存在.

[参　考　文　献]

[1] PARDOUX E, PENG S. Adapted solution of a backward stochastic differential equation[J]. Systems Control Letters, 1990, 14(1): 55-61.

[2] El KAROUI N, PENG S, QUENEZM M C. Backward stochastic differential equations in finance[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(1): 1-71.

[3] LEPELTIER J P, MARTIN J S. Backward stochastic differential equations with continuous coefficients[J]. Statist Probab Lett, 1997, 34: 425-430.

[4] CHEN Z. Existence and uniqueness for BSDE with stopping time[J]. Chinese Science Bulletin, 1998, 43: 96-99.

[5] JIA G. A generalized existence theorem of BSDEs[J]. C R Acad Sci Paris, Ser I, 2006, 342(9): 685-688.

[6] 贾广岩. 系数为左 Lipschitz 的倒向随机微分方程解的存在性[J]. 数学年刊, 2007, 28A(5): 601-610.
JIA G Y. On existence of backward stochastic differential equations with left-Lipschiz coefficient [J]. Chinese Annals of Mathematis, 2007, 28A(5): 601-610.

[7] ZHENG S, ZHOU S. A generalized existence theorem of reflected BSDEs with double obstacles[J]. Statist Probab Lett, 2008, 78: 528-536.

[8] CHEN Z, WANG B. Infinite time interval BSDEs and the convergence of g-martingales[J]. J Aust Math Soc A, 2000, 69: 187-211.

[9] HEIKKILÄ S, LAKSHMIKANTHAM V. Monotone Iterative Techniques for Discontinuous Nonlinear Differential Equations[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1994.