

# 基于响应面与重要性抽样的岩土工程可靠度 分析方法研究

程 晔<sup>1,2</sup>, 周翠英<sup>1,2</sup>, 文建华<sup>1,2</sup>, 黄林冲<sup>1,2</sup>

(1. 中山大学 工学院, 广东 广州 510275; 2. 中山大学 岩土工程与信息技术中心, 广东 广州 510275)

**摘要:** 由于功能函数非线性强且难以显式表达, 岩土工程可靠度分析以往多采用响应面方法解决, 但其求解的可靠度指标为几何可靠度。阐明几何可靠度与一般可靠度的实质和两者之间的差异, 指出对于功能函数非线性较强的岩土工程问题, 采用几何可靠度指标存在较大误差, 需进行改进。然后引入  $V$  空间重要抽样方法将基本变量随机空间通过 Rosenblatt 变换和线性正交变换转换至  $V$  空间, 在响应面方法得到岩土工程的设计验算点及其附近的响应面的基础上, 采用重要性抽样方法求解岩土工程可靠度。几个数值算例和工程实例的对比分析表明该方法可行、有效、精度较高, 适用于非线性强的岩土工程可靠度求解。

**关键词:** 岩石力学; 几何可靠度指标; 响应面方法; Monte Carlo 法; 重要性抽样

**中图分类号:** TU 45

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2010)06 - 1263 - 07

## GEOTECHNICAL ENGINEERING RELIABILITY ANALYSIS METHOD BASED ON RESPONSE SURFACE APPROACH AND IMPORTANCE SAMPLING

CHENG Ye<sup>1,2</sup>, ZHOU Cuiying<sup>1,2</sup>, WEN Jianhua<sup>1,2</sup>, HUANG Linchong<sup>1,2</sup>

(1. School of Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou, Guangdong 510275, China;

2. Research Center for Geotechnical Engineering and Information Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou, Guangdong 510275, China)

**Abstract:** The geotechnical engineering reliability is often analyzed by the response surface approach as its performance function of strong nonlinearity and it is difficult to explicitly express. But the result obtained by this approach is geometric reliability value. The substance and difference between geometric reliability value and ecumenical reliability value are clarified. It is pointed out that there is exiting error to substitute geometric reliability value for ecumenical reliability value to the strong nonlinear performance function problems in geotechnical engineering and it needs to be improved. Based on the checking points and its region response surface which worked out by response surface approach and importance sampling in  $V$ -space, the geotechnical engineering reliability value is worked out by counterchanging the original random variable space to independent random variable in  $V$ -space using Rosenblatt transformation and linear orthogonal transformation. The comparative analysis of several numerical examples and practical engineering shows that the approach proposed is feasible, effective with high precision and suitable for complex geotechnical engineering reliability analysis of strong nonlinear performance function.

**Key words:** rock mechanics; geometric reliability index; response surface approach; Monte Carlo method; importance sampling

**收稿日期:** 2009 - 12 - 31; **修回日期:** 2010 - 03 - 10

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(40672194); 高等学校博士学科点基金资助项目(20060558060)

**作者简介:** 程 晔(1974 -), 男, 博士, 1995年毕业于湖南大学土木系工程建筑工程专业, 现为在站博士后, 主要从事岩土工程方面的教学与研究。E-mail: chengye0515@21cn.com

# 1 引言

岩土工程可靠度分析难点在于：(1) 极限状态函数一般无显式表达，需采用数值分析手段；(2) 一般岩土工程的极限状态函数非线性程度较高。目前国内外常用的分析方法主要有 Monte Carlo 方法<sup>[1]</sup>、随机有限元方法<sup>[2, 3]</sup>和响应面方法<sup>[4, 5]</sup>。Monte Carlo 方法也称统计模拟法(statistical simulation method)，其收敛速度与基本随机变量数量、极限状态函数的复杂程度、模拟过程等无关，具有直接解决问题的能力，近年来还发展了各种效率更高的抽样方法如对偶抽样，分层抽样，重要性抽样<sup>[6, 7]</sup>等，但该方法仍存在计算量大，效率较低的缺点。随机有限元方法最早是将 Monte Carlo 技术直接引入结构分析<sup>[8]</sup>，其实质仍是 Monte Carlo 方法，目前随机有限元方法主要是指包括 Taylor 展开随机有限元法(TSFEM)，摄动随机有限元法(PSFEM)<sup>[9]</sup>，Neumann 展开随机有限元(NSFEM)<sup>[10]</sup>等在内的将有限元方程控制方程中的随机变量直接展开而形成的方法。目前缺少通用的商业随机有限元程序，而大型三维随机有限元程序编制也较困难，影响了此类方法的推广。响应面方法是目前最具生命力的岩土工程可靠度分析方法之一<sup>[11~14]</sup>，具有思路清晰，方法简便，计算量小的特点，但该方法求解的可靠度指标实质上是几何可靠度，不能完全代表其真正的可靠度。

由于响应面方法只能在验算点附近较高精度逼近原隐式功能函数，而无法保证全局逼近原隐式功能函数，所以直接以求得的响应面方程采用 Monte Carlo 方法抽样模拟也不是很合理。

因此本文在响应面方法求得设计验算点和响应面方程的基础上，采用重要性抽样方法，将抽样区间限定于验算点附近，以响应面作为近似功能函数进行抽样，求解岩土工程的实际可靠度。

# 2 几何可靠度指标的局限

目前岩土工程可靠度分析的响应面方法采用二次多项式<sup>[12]</sup>、BP 神经网络<sup>[13]</sup>、径向基神经网络<sup>[14]</sup>等方法构造响应面，然后采用一次二阶矩法或各种优化方法(如复合形法、遗传算法<sup>[15]</sup>、退火算法<sup>[16]</sup>等)求解验算点和可靠指标，其求解的可靠指标一般为几何可靠度指标。从数学的观点看，几何可靠度

指标是简单可靠度指标从平面极限状态曲面向一般极限状态曲面集的粗糙推广<sup>[17]</sup>，其并不能区分在标准正态空间中距原点最近的公共点处相切的那些极限状态曲面。

图 1 清晰地表明了标准正态空间下具有相同几何可靠度指标  $\beta$  的几个不同功能函数可靠域，其中  $g_2(X_1, X_2)=0$  为一线性功能函数的失效面， $g_1(X_1, X_2)=0$ ， $g_3(X_1, X_2)=0$ ， $g_4(X_1, X_2)=0$  为非线性功能函数的失效面，由图 1 可看出，4 个不同的功能函数，其几何可靠指标均为  $\beta$ ，显然 4 个极限状态函数的可靠度并不相同。根据失效面到坐标原点的最短距离(可靠度指标  $\beta$ )来度量具有线性功能函数的可靠度，其结果是精确的，但当功能函数为非线性时，失效面将不再是一个平面，此时该距离不能再准确地反映出岩土工程可靠度的大小，存在一定误差。

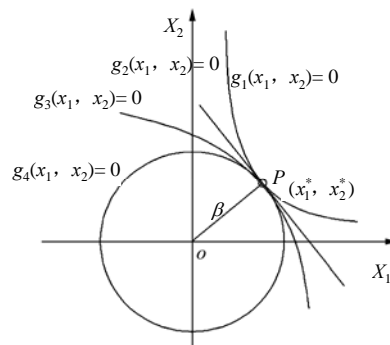
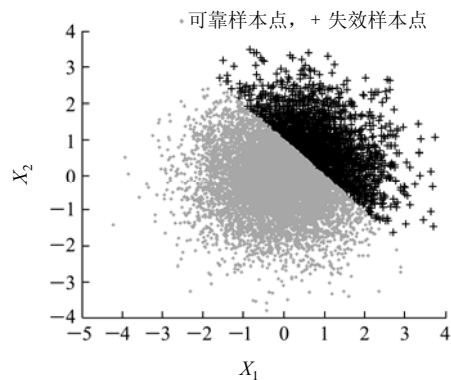


图 1 具有相同可靠指标  $\beta$  的不同功能函数

Fig.1 Several performance functions with the same reliability index  $\beta$

图 2(a), (b)分别为功能函数  $g_2$ ， $g_4$  直接 Monte Carlo 抽样 10 000 次的结果，显然对于非线性程度较高的功能函数，其真正可靠度与几何可靠度指标之间存在明显差异。



(a) 功能函数  $g_2$

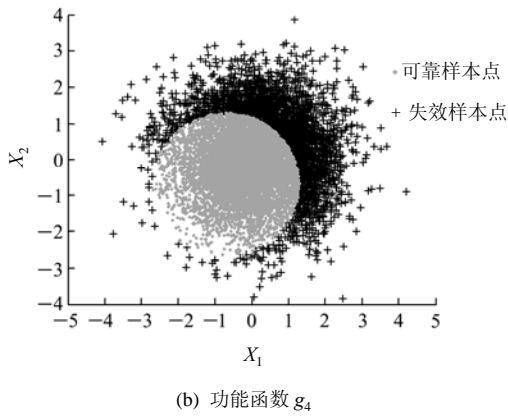


图 2 功能函数  $g_4$  样本点散布图

Fig.2 Scattergrams of performance function  $g_4$

### 3 重要性抽样方法

通常一般可靠度指标定义<sup>[1]</sup>为

$$\beta(a) = \Phi^{-1} \left( \int_{S_a} \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n \right) \quad (1)$$

式中:  $S_a$  为安全集,  $\Phi^{-1}$  正态概率分布函数的反函数,  $\varphi(x_i)(i=1, 2, \dots, n)$  为正态分布概率密度函数。

可靠概率为

$$P = \int_{S_a} \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n \quad (2)$$

失效概率为

$$P_f = 1 - P = P\{\bar{S}_a\} = \int_{\bar{S}_a} \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n \quad (3)$$

式中:  $\{\bar{S}_a\}$  为失效集。

式(3)用 Monte Carlo 法可写为

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[\bar{S}_a] \quad (4)$$

式中:  $N$  为抽样模拟总数;  $I[\cdot]$  为特殊符号函数, 当  $\hat{X}_i \in \bar{S}_a$  时,  $I[\bar{S}_a]=1$ , 反之, 则  $I[\bar{S}_a]=0$ 。

为使 Monte Carlo 方法分析可靠度达到一定的精度, 需要的模拟次数相当大, 因此赵国藩等<sup>[1]</sup>学者提出了效率更高的重要性抽样方法。

假如存在一个抽样密度函数  $h(\mathbf{X})$ , 满足下列关系:

$$\int_{\bar{S}_a} h(\mathbf{X})d\mathbf{X} = 1 \quad (h(\mathbf{X}) \neq 0, \mathbf{X} \in \bar{S}_a) \quad (5)$$

$$P_f = \int_{\bar{S}_a} \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n = \int_{\bar{S}_a} \varphi(\mathbf{X})d\mathbf{X} = \int_{\bar{S}_a} \frac{f(\mathbf{X})}{h(\mathbf{X})} h(\mathbf{X})d\mathbf{X} \quad (6)$$

根据 Monte Carlo 法, 式(4)的无偏估计为

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[\bar{S}_a] \frac{f(\hat{X}_i)}{h(\hat{X}_i)} \quad (7)$$

式中:  $\hat{X}_i$  为取自于抽样密度函数  $h(\mathbf{X})$  的样本向量。

重要性抽样的实现可采用下述方法, 先将原始基本随机变量空间通过 Rosenblatt 变换  $x = T_{xu}(u)$  至标准正态分布空间—— $U$  空间, 再将其在验算点  $u^*$  处按二阶 Taylor 展开:

$$G(u) \approx G_u(u^*)(u - u^*) + \frac{1}{2}(u - u^*)^T G_{uu}(u^*)(u - u^*) \quad (8)$$

式中:  $G_u(u^*)$  和  $G_{uu}(u^*)$  为  $G(u)$  在  $u^*$  处的一阶和二阶导数。

进而将其通过正交变换  $z = \mathbf{H}u$ , 使得  $z_n$  在  $u^*$  处平行于  $-G_u(u^*)/|G_u(u^*)|$  的方向余弦,  $\mathbf{H}$  通过标准 Gram-Schmidt 方程求得。因此将(8)式表示为

$$G(z) = -(z_n - \beta) + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \tilde{z} \\ z_n - \beta \end{Bmatrix}^T \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \tilde{z} \\ z_n - \beta \end{Bmatrix} \quad (9)$$

其中,

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}^T, \quad \mathbf{A} = \mathbf{H} \frac{G_{uu}(u^*)}{|G_u(u^*)|} \mathbf{H}^T$$

功能函数在  $u^*$  处的主曲率, 利用特征方程可以求得, 即

$$\overline{\mathbf{P}}\mathbf{A}\overline{\mathbf{P}}^T = \bar{\kappa} \quad (10)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{Pz} = \mathbf{PH}u = \mathbf{T}_{uv}u \quad (11)$$

最后根据式(11)就将随机变量从  $U$  空间变换至与主曲率坐标系相应的  $V$  空间, 如图 3 所示。抽样中心位于  $V_n$  轴上, 到功能函数曲面验算点的距离为  $k_i b_i$ , 其中  $b_i$  为抽样椭圆在  $V_n$  轴上的半轴长度。抽样椭圆半轴为

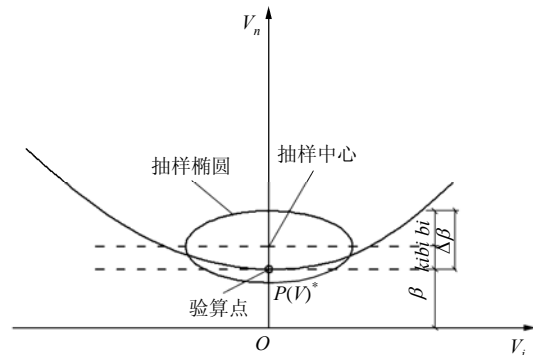


图 3 V 空间的重要性抽样区域

Fig.3 Importance sampling region in V-Space

$$b_i = \Delta\beta / (1 + k_i), \quad a_i = 2\Delta\beta\sqrt{1 - k_i^2} \quad (12)$$

$$k_i = \tanh[(1 + \beta\kappa_i) \tanh^{-1}(k_0)] \tag{13}$$

式中： $a_i$ 为椭圆另一半轴长度； $\Delta\beta$ 为与模拟精度相关参数，适宜取值范围为0.7~1.4； $k_i$ 为图3中抽样中心至功能函数曲面验算点距离参数。 $\kappa_i$ 为功能函数在 $u^*$ 处的主曲率，按式(10)求得。

参考赵国藩等<sup>[1]</sup>的研究， $k_0 = 0.492$ ， $\Delta\beta = 1.0$ 。重要抽样函数 $h(v)$ 选择 $n$ 维相互独立的正态分布概率密度函数 $N(\hat{\mu}_{sv}, \sigma_{\hat{\mu}_{sv}})$ ，抽样函数的均值为

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu}_{sv, i} &= 0 \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \\ \hat{\mu}_{sv, n} &= \beta + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} k_i b_i \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

抽样方差为

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_{sv, i} &= \alpha_s a_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \\ \hat{\sigma}_{sv, n} &= \alpha_s \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} b_i \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

式中： $\alpha$ 为置信系数，可取 $\alpha = 0.95$ 。

### 4 响应面方法

响应面方法最早由数学家 G. E. P. Box 和 K. B. Wilson 于 1951 年提出，后来 1985 年 F. S. Wong<sup>[18]</sup>首先将该方法运用于岩土工程边坡可靠度分析。该方法通过一系列确定性“试验”构造一个曲面来模拟真实曲面，该曲面即称之为响应面。一般先设计一系列变量值，每一组变量值构成一个试验点也称样本点，利用确定性分析方法获得每个样本点的功能函数值，通过变量组和功能函数值组构造一个明确的函数关系，用以近似代替难以直接表达的真实功能函数，再利用常用的可靠度分析方法求解。本文以 C. G. Bucher 和 U. Bourgund<sup>[5]</sup>于 1990 年提出了二次响应面法为例说明其分析过程。近似响应面函数一般取如下形式的不含交叉项的二次曲面：

$$y' = g'(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 \tag{16}$$

式中： $a_0, b_i, c_i$ 为表达式的待定系数，亦称为近似响应面的修匀系数。显然近似响应面的待定系数个数为 $2n+1$ ，需要至少 $2n+1$ 个试验点来确定。具体求解过程如下：

- (1) 假定初始展开点  $X^1 = \{x_1^1, x_2^1, \dots, x_i^1, \dots, x_n^1\}$ ，一般取随机变量均值点。
- (2) 利用数值分析手段计算功能函数  $g(x_1^1, x_2^1,$

$\dots, x_i^1, \dots, x_n^1)$  和  $g(x_1^1, x_2^1, \dots, x_i^1 \pm f\sigma_i, \dots, x_n^1)$  得到  $2n+1$  个样本点，其中系数  $f$  一般第一步取 3，以后各步取 1。

(3) 利用  $2n+1$  个样本点求出式(16)的所有系数  $a_0, b_i, c_i$ ，得到二次多项式近似的功能函数，即岩土工程体系的近似极限功能函数。

(4) 利用常用的可靠度求解方法求解验算点  $x^{*k}$  和可靠度指标  $\beta^k$ ，其中上标  $k$  表示迭代步。

(5) 判断收敛条件： $|\beta^{(k)} - \beta^{(k-1)}| < \varepsilon$ ，如果不满足，则用插值法得到新的展开点，即

$$X_m^{(k)} = X^{(k)} + (X^{*(k)} - X^{(k)}) \frac{g(X^{(k)})}{g(X^{(k)}) - g(X^{*(k)})} \tag{17}$$

然后返回第(2)步进行迭代，直至收敛。

### 5 基于重要性抽样的一般可靠度的响应面方法

由于直接采用重要性抽样方法的模拟次数还是较大，而岩土工程的有限元分析成本较高，因此直接采用 Monte Carlo 重要性抽样来解决岩土工程的可靠度分析问题，效率仍不高。另一方面对于隐式功能函数岩土工程可靠度，直接采用重要性抽样方法，其抽样中心和抽样区域难以确定；而响应面方法可通过较少次数的确定性分析较精确求出验算点和验算点附近的拟合精度较高的响应面。并且 O. Ditlevsen 和 H. O. Madsen<sup>[17]</sup>也曾指出：几何可靠度指标和验算点处极限状态曲面曲率特性决定可靠度指标。因此可引入  $V$  空间重要性抽样方法，根据验算点坐标及其主曲率和几何可靠度等参数构造抽样函数进行重要性抽样。具体分析步骤如下：

- (1) 假定初始迭代点  $X^{(1)} = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\}$ ，一般取均值点。
- (2) 通过岩土工程有限元等数值方法计算功能函数值  $g(X^{(1)})$  以及  $g(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_i^{(1)} \pm f^{(1)}\sigma_i, \dots, x_n^{(1)})$  或，可得  $2n+1$  个样本点，其中系数  $f$  一般第一步取 3，以后各步取 1。
- (3) 利用上步所得  $2n+1$  个样本点，求解式(16)的待定系数  $a_0, b_i, c_i$ 。
- (4) 用最优化方法求解验算点  $x^{*(k)}$  及可靠指标  $\beta(k)$ 。
- (5) 计算  $|\beta(k) - \beta(k-1)| < \varepsilon$ ，如条件满足，则输出  $\beta$ ；如不满足，则  $X_m^{(k)} = X^{(k)} + (X^{*(k)} - X^{(k)})$ 。

$\frac{g(X^{(k)})}{g(X^{(k)}) - g(X^{*(k)})}$  为样本中心点, 返回(2)进行下一步迭代, 直至收敛为止。

(6) 输出响应面验算点  $X^{(*)}$  和相应的拟合响应面式(16), 按式(10), (11)分别计算验算点  $X^{(*)}$  处的主曲率  $\bar{\kappa}$  和  $V$  空间与  $U$  空间的转换矩阵  $T_{uv}$ 。

(7) 按式(12), (13)确定  $v_i \sim v_n$  平面内抽样椭圆的中心和轴长。

(8) 按式(14), (15)计算重要抽样函数  $h(v)$  的均值和标准方差。

(9) 由  $h(v)$  产生一组样本  $\hat{v}$ , 利用  $T_{uv}$  和 Rosenblatt 变换转换成  $\hat{u}$  和  $\hat{x}$ 。

(10) 检验样本是否在失效区域  $\bar{S}_a$  内, 并计算  $f(\hat{v})/h(\hat{v})$  的比值。

(11) 重复  $N$  次步骤(9)~(10)。

(12) 计算失效概率。

## 6 算 例

本文选取蒋向华等<sup>[14]</sup>研究中 3 个算例来说明本文方法的可行性和有效性。

### 6.1 算例 1

极限状态方程  $g(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 4.0$ , 其中随机变量满足  $x_1 \sim N(3.0, 1.0)$ ,  $x_2 \sim N(2.9, 1.0)$ 。

表 1 为算例 1 采用 4 种方法计算后的结果对比: Matlab 优化工具箱解答, 蒋向华等<sup>[14]</sup>的计算结果, 本文方法的计算结果和一般可靠度精确解。其中 Matlab 优化工具箱解答为根据几何可靠度特点, 采用 Matlab 优化工具箱求解得到的验算点和可靠度指标; 蒋向华等<sup>[14]</sup>的计算采用了改进样本取点的响应面方法, 其实质也为几何可靠度; 一般可靠度精确解是直接采用 Monte Carlo 方法模拟  $1 \times 10^5$  次得到。本文方法结果为响应面方法迭代 8 次收敛后得到验算点和响应面方程, 再用重要性抽样方法模拟 2 000 次得到失效概率, 然后反算得到一般可靠度指标  $\beta$ 。

表 1 本文方法与其他方法结果比较

Table 1 Comparison of results obtained by other method and method in this paper

可靠度	算法	失效概率	可靠指标	验算点	
				$x_1$	$x_2$
几何	Matlab 优化工具箱解答	0.008 403 7	2.390 9	1.273 3	1.246 2
	蒋向华等 <sup>[14]</sup> 计算结果	0.008 400 0	2.390 9	1.273 3	1.246 2
一般	本文方法	0.003 766 7	2.672 3	1.273 3	1.246 2
	精确解	0.003 766 3	2.672 3	-	-

从表 1 中可看出: (1) 本文方法求得的失效概率比一般可靠度精确解大 0.01%, 说明本文方法具有很高的计算精度; (2) 按蒋向华等<sup>[14]</sup>的计算结果和 Matlab 优化工具箱计算出的失效概率比按本文方法计算得到的失效概率大 123.11%。说明了几何可靠度指标替代一般可靠度指标误差较大。

### 6.2 算例 2

极限状态方程  $g(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_2^2 - 18$ , 其中随机变量  $x_1 \sim N(10.0, 5.0)$ ,  $x_2 \sim N(9.9, 5.0)$  均服从正态分布。

从表 2 中同样可看出: (1) 本文方法所得失效概率比精确解大 0.12%; (2) 按蒋向华等<sup>[14]</sup>的计算结果和 Matlab 优化工具箱计算出的失效概率比按一般可靠度精确解失效概率大 522.77%。

表 2 本文方法与其他方法结果比较

Table 2 Comparison of results obtained by other method and method in this paper

可靠度	算法	失效概率	可靠指标	验算点	
				$x_1$	$x_2$
几何	Matlab 优化工具箱解答	0.010 774	2.298 3	1.685 4	1.968 0
	蒋向华等 <sup>[14]</sup> 计算结果	0.010 780	2.298 2	1.673 3	1.980 5
一般	本文方法	0.001 732	2.923 6	1.685 4	1.968 1
	精确解	0.001 730	2.923 6	-	-

### 6.3 算例 3

极限状态方程:  $Z = \exp(1 + x_1 - x_2) + \exp(5 - 5x_1 - x_2) - 1$ , 其中随机变量  $x_1, x_2$  均服从标准正态分布。

表 3 为算例 3 四种不同方法计算结果的对比, 各种方法结果含义与算例 1, 2 相同。从表 3 可看出, 与算例 1 和 2 结果类似; (1) 本文方法结果与精确解相差 0.03%; (2) 蒋向华等<sup>[14]</sup>的计算结果和 Matlab 优化工具箱计算出的失效概率比按本文方法

表 3 本文方法与其他方法结果比较

Table 3 Comparison of results obtained by other methods and method in this paper

可靠度	算法	失效概率	可靠指标	验算点	
				$x_1$	$x_2$
几何	Matlab 优化工具箱解答	0.010 741 0	2.299 4	0.864 09	2.131 0
	蒋向华等 <sup>[14]</sup> 计算结果	0.010 738 0	2.299 5	0.862 80	2.131 6
一般	本文方法	0.002 834 1	2.766 5	0.864 09	2.131 0
	精确解	0.002 833 3	2.766 5	-	-

得到的失效概率大 278.99%。

从上述 3 个算例可看出，极限状态方程非线性程度越高，几何可靠度指标与一般可靠度指标相差越大，并且 3 个算例的失效概率若采用几何可靠度指标反算，误差均在 100% 以上，由此可见复杂非线性功能函数可靠度不能采用几何可靠度来度量。

### 7 邯鄹西石门铁矿采空区工程实例

该工程应用实例资料取自苏永华等<sup>[12, 20]</sup>的算例，苏永华等<sup>[15]</sup>也用这个算例验证了含交叉项二次多项式响应面方法的精度。

邯鄹西石门铁矿矿区经长期开采，已经留下了大于  $2 \times 10^6 \text{ m}^3$  的地下空间。为利用该空间作为尾矿回填库并在其地面建设工业广场，对其进行多方位的考察和评价。从保护地面建筑物为出发点建立评价准则，以最大的水平变形容许值  $[\mu]_{\max}$  建立结构的功能函数。根据该工业广场的重要性程度，其保护等级属于 II 级建筑物，容许的最大水平变形为 3.0 mm/m。所以功能函数为

$$Z = [\mu]_{\max} - \mu \tag{18}$$

式中： $[\mu]_{\max} = 3.0 \text{ mm/m}$ ； $\mu$  为地表变形，为控制地表变形的围岩力学参数的函数，即  $\mu = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 。显然该功能函数难以直接得到显式表达。

该工程地质情况较为简单，主要由上盘石灰岩和下盘闪长岩组成，在分析中随机变量只考虑最基本的岩体力学参数，变形模量  $E$ ，泊松比  $\nu$ ，单轴抗压强度  $R_c$ ，单轴抗拉强度  $R_t$ 。通过处理和分析，变异性较大的岩体力学参数，均服从正态分布，各自统计特征值见表岩体力学参数如表 4 所示。

表 4 岩体力学参数表

Table 4 Statistic data of mechanical parameters of rock masses

部位	抗压强度		抗拉强度		泊松比		变形模量		黏聚力	内摩擦角
	均值	方差	均值	方差	均值	方差	均值	方差		
	/MPa	/MPa <sup>2</sup>	/MPa	/MPa <sup>2</sup>	均值	方差	/GPa	/GPa <sup>2</sup>		
上盘	38.41	12.05	2.78	0.21	0.245	0.045	13.58	5.77	10.94	12.7
下盘	15.00	2.95	0.97	0.21	0.276	0.042	3.58	0.99	3.72	5.4

苏永华等<sup>[15, 20]</sup>分别采用了带交叉项二次多项式和不带交叉项二次多项式响应面方法分析得到了该矿区地下开采空间使用的失效概率与可靠度。

本文采用通用有限元软件 ANSYS，根据苏永华等<sup>[15, 20]</sup>建立相同的二维有限元模型，初始迭代点置于 8 个变量均值处，试验点第一次  $f = 3$ ，一共取 17 个试验点，通过有限元分析后得到 17 个方程，采用 Matlab 软件求解第一次构造的响应面，然后再采用 Matlab 优化工具箱求解验算点和可靠指标  $\beta$  按照式(17)改进展开点后重复上述过程，直至可靠度指标  $\beta$  收敛，得到验算点和相应的响应面函数。

然后将随机变量空间通过正交变换，转换至主曲率坐标系。求出主曲率  $\kappa_i (i = 1, 2, \dots, n - 1)$ 。抽样中心位于  $V_n$  轴，根据式(12)得到抽样椭圆的半轴长度作为抽样的区域。以相互独立的正态分布概率密度函数作为抽样函数，根据式(14)，(15)计算抽样函数的均值与方差，进行 2 000 次抽样，最后用式(7)求得失效概率，结果如表 5 所示。

表 5 计算结果比较表

Table 5 Calculation results of different approaches

计算方法	$E_1$ /GPa	$R_{t1}$ /MPa	$R_{c1}$ /MPa	$\mu_1$ /(m · mm <sup>-1</sup> )	$E_2$ /GPa
本文方法	3.288	1.305	14.050	0.254	9.669
苏永华等 <sup>[20]</sup> 方法	3.287	1.300	14.061	0.255	9.792
苏永华等 <sup>[20]</sup> 方法	4.247	1.089	12.792	0.267	7.273
Monte Carlo 方法 <sup>[7]</sup>	8 000 次抽样				
计算方法	$R_{t2}$ /MPa	$R_{c2}$ /MPa	$\mu_2$ /(m · mm <sup>-1</sup> )	$\beta$	失效概率 /%
本文方法	2.556	52.269	0.298		11.4
苏永华等 <sup>[20]</sup> 方法	2.545	51.836	0.296	1.60	5.4
苏永华等 <sup>[20]</sup> 方法	3.414	62.446	0.247	1.27	10.2
Monte Carlo 方法 <sup>[7]</sup>	8 000 次抽样				11.8

从表 5 可看出，因为本文求解设计验算点的响应面方法与苏永华等<sup>[20]</sup>相同，设计验算点结果也基本相同，但通过本文提出的方法，求得的失效概率已经非常接近直接 Monte Carlo 方法模拟所得的失效概率。本文方法仅仅增加了 2 000 次显式功能函数的抽样计算，而有限元分析次数并未增加，实际上以 54 次有限元模拟的代价就接近了直接 Monte Carlo 法 8 000 次有限元模拟的精度，有效提高了分析效率。另外，从表 5 中可看出按苏永华等<sup>[15, 20]</sup>方法求得的失效概率与 Monte Carlo 方法求得的失效概率之间存在较大差异，实际上反映出了几何可靠度指标与一般可靠度指标之间的差异。

### 8 结 论

本文在对比分析几何可靠度指标与一般可靠度

指标差异的基础上, 采用响应面方法与  $V$  空间重要性抽样相结合的方法求解岩土工程可靠度, 得到如下结论:

(1) 非线性功能函数岩土工程的一般可靠度指标与几何可靠度指标存在较大差异, 在非线程度较高时不宜采用几何可靠度指标来度量岩土工程的可靠度。

(2) 本文方法充分利用了响应面方法得到的验算点与验算点附近精度较高的响应面函数, 以普通响应面方法相当的分析代价可得到较高精度分析结果。

(3) 本文将响应面方法与  $V$  空间重要性抽样方法有机结合, 为解决隐式非线性功能函数的岩土工程可靠度分析问题提供了一个新的思路和方法。

### 参考文献(References):

- [1] 赵国藩, 金伟良, 贡金鑫. 结构可靠度理论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000.(ZHAO Guofan, JIN Weiliang, GONG Jinxin. Theory of structural reliability[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2000.(in Chinese))
- [2] 刘 宁. 可靠度随机有限元法及其工程应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2001.(LIU Ning. Reliability analysis stochastic FEM and its application in engineering[M]. Beijing: China Water Power Press, 2001.(in Chinese))
- [3] 王建军, 于长波, 李其汉. 工程中的随机有限元方法[J]. 应用力学学报, 2009, 26(2): 297 - 303.(WANG Jianjun, YU Changbo, LI Qihan. Stochastic finite element methods in engineering[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2009, 26(2): 297 - 303.(in Chinese))
- [4] FARAVELLI L. A response surface approach for reliability analysis[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1989, 115(12): 2 763 - 2 781.
- [5] BUCHER C G, BOURGUND U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems[J]. Structural Safety, 1990, 7(1): 57 - 66.
- [6] ANIMESH D, SANKARAN M. Reliability estimation with time-variant loads and resistances[J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 2000, 126(5): 612 - 620.
- [7] 杨飞跃, 张建仁. 结构可靠度分析的特殊边缘区间抽样法[J]. 工程力学, 2009, 26(9): 56 - 60.(YANG Feiyue, ZHANG Jianren. Special border domain sampling method for structural reliability analysis[J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(9): 56 - 60.(in Chinese))
- [8] SHINOZUKA M, ASTILL J. Random eigenvalue problems in structural mechanics[J]. AIAA Journal, 1972, 10(4): 456 - 462.
- [9] KAMINSKI M. On generalized stochastic perturbation-based finite element method[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2006, 22(1): 23 - 31.
- [10] YAMAZAKI F, SHINOZUKA M, DASGUPTA G. Neumann expansion for stochastic finite element analysis[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1988, 114(8): 1 335 - 1 354.
- [11] 佟晓利, 赵国藩. 一种与结构可靠度分析几何法相结合的响应面方法[J]. 土木工程学报, 1997, 30(4): 51 - 57.(TONG Xiaoli, ZHAO Guofan. The response surface method in conjunction with Geometric method in structural reliability analysis[J]. China Civil Engineering Journal, 1997, 30(4): 51 - 57.(in Chinese))
- [12] 苏永华, 方祖烈, 高 谦. 用响应面方法分析特殊地下岩体空间的可靠性[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(1): 55 - 58.(SU Yonghua, FANG Zulie, GAO Qian. Reliability analysis of special underground rockmass by response surface method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2000, 19(1): 55 - 58.(in Chinese))
- [13] 桂劲松, 康海贵. 结构可靠度分析的改进 BP 神经网络响应面法[J]. 应用力学学报, 2005, 22(1): 127 - 131.(GUI Jinsong, KANG Haigui. Improved BP ANN response surface method for structure reliability analysis[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2005, 22(1): 127 - 131.(in Chinese))
- [14] 蒋向华, 杨晓光, 王延荣. 结构可靠度逐步逼近径向神经网络响应面法[J]. 航空动力学报, 2008, 23(1): 26 - 31.(JIANG Xianghua, YANG Xiaoguang, WANG Yanrong. An iterative RBF ANN response surface method for structural reliability analysis[J]. Chinese Journal of Aerospace Power, 2008, 23(1): 26 - 31.(in Chinese))
- [15] 苏永华, 赵明华, 刘晓明. 用遗传算法搜索验算点的复杂响应面函数可靠度分析方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(增 2): 5 868 - 5 873.(SU Yonghua, ZHAO Minghua, LIU Xiaoming. Reliability degree analysis method of complicated response surface function to search checking point with genetic algorithm method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(Supp.2): 5 868 - 5 873.(in Chinese))
- [16] 伊卫林, 黄鸿雁, 韩万金. 基于模拟退火算法与响应面模型的三维气动优化设计方法[J]. 空气动力学学报, 2008, 26(1): 36 - 41.(YI Weilin, HUANG Hongyan, HAN Wanjin. Three-dimensional aerodynamic optimization design method using simulated annealing and response surface model[J]. Chinese Acta Aerodynamica Sinica, 2008, 26(1): 36 - 41.(in Chinese))
- [17] DITLEVSEN O, MADSEN H O. 结构可靠度方法[M]. 何 军译. 上海: 同济大学出版社, 2005.(DITLEVSEN O, MADSEN H O. Structural reliability methods[M]. Translated by HE Jun. Shanghai: Tongji University Press, 2005.(in Chinese))
- [18] WONG F S. Slope reliability and response surface method[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, 111(1): 32 - 53.
- [19] 李生勇, 张 哲, 石 磊, 等. 一种在响应面法中选取样本点的新方法[J]. 计算力学学报, 2007, 24(6): 899 - 903.(LI Shengyong, ZHANG Zhe, SHI Lei, et al. A new method for selecting sampling points in response surface method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2009, 24(6): 899 - 903.(in Chinese))
- [20] 苏永华, 王旭春, 张宗社. 岩体工程可靠性分析的响应面方法及其应用[J]. 工程地质学报, 2001, 9(4): 381 - 386.(SU Yonghua, WANG Xuchun, ZHANG Zongshe. Response surface method of rock mass engineering stability reliability analysis and its application[J]. Journal of Engineering Geological, 2001, 9(4): 381 - 386.(in Chinese))