高等代数

第四章　线性方程组

主讲人：梁治安、顾桂定、张远征、殷允川、王艳华、张振宇

上海财经大学应用数学系

February 21, 2008

向量的定义I

定义1

设$\mathbb{F}$是一个数域，$a_1, a_2, \cdots, a_n$是$\mathbb{F}$中的数，由$a_1, a_2, \cdots, a_n$组成的有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$称为数域$\mathbb{F}$上的一个n维向量，a_i称为它的分量。如果把这n个数依次排成一列$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，就称为$\mathbb{F}$上的$n$维列向量。

向量一般用粗体希腊小写字母$\alpha, \beta, \cdots$表示。

向量的定义I

定义1

设$\mathbb{F}$是一个数域，$a_1, a_2, \cdots, a_n$是$\mathbb{F}$中的数，由$a_1, a_2, \cdots, a_n$组成的有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$称为数域$\mathbb{F}$上的一个n维向量，a_i称为它的分量。如果把这n个数依次排成一列
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$
就称为$\mathbb{F}$上的n维列向量。

向量一般用粗体希腊小写字母$\alpha, \beta, \cdots$表示。

向量的定义II

定义2

如果n维向量$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathsf{T}}$，$\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathsf{T}}$的对应分量都相等，即$a_i = b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，就称这两个向量是**相等**的，记作$\alpha = \beta$。

向量的加减和数乘运算

定义3

设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathsf{T}}$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathsf{T}}$为数域$\mathbb{F}$上的$n$维向量，定义加法（减法）

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= (a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathsf{T}}\\ \alpha-\beta &= (a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)^{\mathsf{T}}\end{aligned}$$

数量乘法

$$k\cdot\alpha=(k\cdot a_1,k\cdot a_2,\cdots,k\cdot a_n)^{\mathsf{T}},\quad k\in\mathbb{F}$$

定义4

分量全为零的向量称为零向量，记作$\mathbf{0}$；向量$(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)^{\mathsf{T}}$称为向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathsf{T}}$的负向量，记作$-\alpha$。

向量的加减和数乘运算

定义3

设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^\mathsf{T}$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^\mathsf{T}$为数域$\mathbb{F}$上的$n$维向量，定义加法（减法）

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= (a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^\mathsf{T}\\ \alpha-\beta &= (a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)^\mathsf{T}\end{aligned}$$

数量乘法

$$k\cdot\alpha=(k\cdot a_1,k\cdot a_2,\cdots,k\cdot a_n)^\mathsf{T},\quad k\in\mathbb{F}$$

定义4

分量全为零的向量称为零向量，记作$\mathbf{0}$；向量$(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)^\mathsf{T}$称为向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^\mathsf{T}$的负向量，记作$-\alpha$。

向量的运算规则

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$;

(5) $1\cdot\alpha=\alpha$;

(6) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta, \qquad k\in\mathbb{F}$;

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

(8) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$。

向量的运算规则

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$;

(5) $1\cdot\alpha=\alpha$;

(6) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta, \qquad k\in\mathbb{F}$;

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

(8) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$。

向量的运算规则

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(3) $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$;

(4) $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$;

(5) $1 \cdot \alpha = \alpha$;

(6) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta, \qquad k \in \mathbb{F}$;

(7) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;

(8) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$。

向量的运算规则

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(3) $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$;

(4) $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$;

(5) $1 \cdot \alpha = \alpha$;

(6) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta, \qquad k \in \mathbb{F}$;

(7) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;

(8) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$。

向量的运算规则

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$;

(5) $1\cdot\alpha=\alpha$;

(6) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta, \qquad k\in\mathbb{F}$;

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

(8) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$。

向量的运算规则

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$;

(5) $1\cdot\alpha=\alpha$;

(6) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta, \qquad k\in\mathbb{F}$;

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

(8) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$。

向量的运算规则

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(3) $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$;

(4) $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$;

(5) $1 \cdot \alpha = \alpha$;

(6) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta, \qquad k \in \mathbb{F}$;

(7) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;

(8) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$。

向量的运算规则

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$;

(5) $1\cdot\alpha=\alpha$;

(6) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta, \qquad k\in\mathbb{F}$;

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

(8) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$。

向量由向量组线性表出

定义1

向量α称为向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$的一个**线性组合**，如果有数域$\mathbb{F}$上的一组数$k_1, k_2, \cdots, k_r$，使得$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$。也称为向量$\alpha$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$**线性表出**。

例1 零向量$\mathbf{0}$是任意向量组的线性组合（只要取系数全为0即可）。

例2 任一个n维向量$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$都可表示为向量组

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots\cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

的一个线性组合。向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$称为$n$维单位向量。

向量由向量组线性表出

定义1

向量α称为向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$的一个**线性组合**，如果有数域$\mathbb{F}$上的一组数$k_1, k_2, \cdots, k_r$，使得$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$。也称为向量$\alpha$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$**线性表出**。

例1 零向量$\mathbf{0}$是任意向量组的线性组合（只要取系数全为0即可）。

例2 任一个n维向量$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$都可表示为向量组

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots\cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

的一个线性组合。向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$称为**$n$维单位向量**。

向量由向量组线性表出

定义1

向量α称为向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$的一个**线性组合**，如果有数域$\mathbb{F}$上的一组数$k_1, k_2, \cdots, k_r$，使得$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$。也称为向量$\alpha$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$**线性表出**。

例1 零向量$\mathbf{0}$是任意向量组的线性组合（只要取系数全为0即可）。

例2 任一个n维向量$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$都可表示为向量组

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots\cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

的一个线性组合。向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$称为**$n$维单位向量**。

向量组的等价

定义2

对于两个向量组$(V_1)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$(V_2)\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，若向量组$(V_1)$中的每个向量$\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$都可由向量组$(V_2)$线性表出。那么向量组$(V_1)$就称为可由向量组$(V_2)$线性表出；如果两个向量组互相可以线性表出，就称这两个向量组为等价的。

命题1

如果向量组$(V_2)\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由向量组$(V_1)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出，向量组$(V_3)\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$可由$(V_2)$线性表出，那么$(V_3)$可由$(V_1)$线性表出。

推论

如果向量组(V_2)与(V_1)等价，(V_3)与(V_2)等价，则(V_3)与(V_1)等价。

向量组的等价

定义2

对于两个向量组$(V_1)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$(V_2)\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，若向量组$(V_1)$中的每个向量$\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$都可由向量组$(V_2)$线性表出。那么向量组$(V_1)$就称为可由向量组$(V_2)$线性表出；如果两个向量组互相可以线性表出，就称这两个向量组为等价的。

命题1

如果向量组$(V_2)\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由向量组$(V_1)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出，向量组$(V_3)\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$可由$(V_2)$线性表出，那么$(V_3)$可由$(V_1)$线性表出。

推论

如果向量组(V_2)与(V_1)等价，(V_3)与(V_2)等价，则(V_3)与(V_1)等价。

向量组的等价

定义2

对于两个向量组$(V_1)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$(V_2)\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，若向量组$(V_1)$中的每个向量$\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$都可由向量组$(V_2)$线性表出。那么向量组$(V_1)$就称为可由向量组$(V_2)$线性表出；如果两个向量组互相可以线性表出，就称这两个向量组为等价的。

命题1

如果向量组$(V_2)\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由向量组$(V_1)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出，向量组$(V_3)\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$可由$(V_2)$线性表出，那么$(V_3)$可由$(V_1)$线性表出。

推论

如果向量组(V_2)与(V_1)等价，(V_3)与(V_2)等价，则(V_3)与(V_1)等价。

向量组的线性相关

定义3

对于数域$\mathbb{F}$上的n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 1)$，如果存在$\mathbb{F}$中的不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$，则称向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$**线性相关**。

注

(1) 由一个向量组成的向量组$\{\alpha_1\}$线性相关的充分必要条件是$\alpha_1 = \mathbf{0}$;

(2) 含有零向量的向量组也都线性相关。

向量组的线性相关

定义3

对于数域$\mathbb{F}$上的n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 1)$，如果存在$\mathbb{F}$中的不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$，则称向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$**线性相关**。

注

(1) 由一个向量组成的向量组$\{\alpha_1\}$线性相关的充分必要条件是$\alpha_1 = \mathbf{0}$;

(2) 含有零向量的向量组也都线性相关。

向量组的线性相关

定义3

对于数域$\mathbb{F}$上的n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 1)$，如果存在$\mathbb{F}$中的不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$，则称向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$线性相关。

注

(1) 由一个向量组成的向量组$\{\alpha_1\}$线性相关的充分必要条件是$\alpha_1 = \mathbf{0}$;

(2) 含有零向量的向量组也都线性相关。

向量组的线性相关

定义3

对于数域$\mathbb{F}$上的n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 1)$，如果存在$\mathbb{F}$中的不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$，则称向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$**线性相关**。

注

(1) 由一个向量组成的向量组$\{\alpha_1\}$线性相关的充分必要条件是$\alpha_1 = \mathbf{0}$;

(2) 含有零向量的向量组也都线性相关。

向量组线性相关的等价表述

定义3'

设$s \geq 2$，如果向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$中有一个向量可由其余的向量线性表出，则向量组是线性相关的。

命题2

当$s \geq 2$时，定义3与定义3'等价。

命题3

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关当且仅当其中某个向量$\alpha_i$可由它前面的向量$\alpha_j (j < i)$线性表出。

向量组线性相关的等价表述

定义3'

设$s \geq 2$，如果向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$中有一个向量可由其余的向量线性表出，则向量组是线性相关的。

命题2

当$s \geq 2$时，定义3与定义3'等价。

命题3

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关当且仅当其中某个向量$\alpha_i$可由它前面的向量$\alpha_j (j < i)$线性表出。

向量组线性相关的等价表述

定义3'

设$s \geq 2$，如果向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$中有一个向量可由其余的向量线性表出，则向量组是线性相关的。

命题2

当$s \geq 2$时，定义3与定义3'等价。

命题3

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关当且仅当其中某个向量$\alpha_i$可由它前面的向量$\alpha_j (j < i)$线性表出。

向量组的线性无关

定义4

若一向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 1)$不线性相关，即不存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$，则称向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$**线性无关**。或者等价地说：
由$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$可以推出$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$。

例3 n维单位向量$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_s$组成的向量组是线性无关的

向量组的线性无关

定义4

若一向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 1)$不线性相关，即不存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$，则称向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$线性无关。或者等价地说：
由$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$可以推出$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$。

例3 n维单位向量$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_s$组成的向量组是线性无关的

向量组的部分相关和整体相关

命题3

（部分相关则整体相关；整体无关则任意部分都无关）如果一个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$包含一个部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k}$线性相关，则整个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关；如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，那么它的每个部分组都线性无关。

例4 (1) 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$线性无关。

(2) 证明向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_1+\alpha_4$线性相关。

例5 如果β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出，且表示法唯一，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关。

例6 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关；$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$线性无关，问：

(1) α_1能否由$\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出；

(2) α_{s+1}能否由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出.

向量组的部分相关和整体相关

命题3

（部分相关则整体相关；整体无关则任意部分都无关）如果一个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$包含一个部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k}$线性相关，则整个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关；如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，那么它的每个部分组都线性无关。

例4 (1) 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$线性无关。

(2) 证明向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_1+\alpha_4$线性相关。

例5 如果β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出，且表示法唯一，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关。

例6 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关；$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$线性无关，问：

(1) α_1能否由$\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出；

(2) α_{s+1}能否由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出.

向量组的部分相关和整体相关

命题3

（部分相关则整体相关；整体无关则任意部分都无关）如果一个向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$包含一个部分组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_k}$线性相关，则整个向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关；如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关，那么它的每个部分组都线性无关。

例4 (1) 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，证明$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$线性无关。

(2) 证明向量组$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_4$线性相关。

例5 如果β可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出，且表示法唯一，证明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关。

例6 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关；$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$线性无关，问：

(1) α_1能否由$\alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出；

(2) α_{s+1}能否由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出.

向量组的部分相关和整体相关

命题3

（部分相关则整体相关；整体无关则任意部分都无关）如果一个向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$包含一个部分组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_k}$线性相关，则整个向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关；如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关，那么它的每个部分组都线性无关。

例4 (1) 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，证明$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$线性无关。

(2) 证明向量组$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_4$线性相关。

例5 如果β可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出，且表示法唯一，证明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关。

例6 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关；$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$线性无关，问：

(1) α_1能否由$\alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出；

(2) α_{s+1}能否由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出.

向量组的极大线性无关组定义

定义1

对于一个向量组(可能只有有限个向量, 也可能有无限多个向量), 如果在这组向量中存在一部分向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 满足下列条件:
(1) 线性无关;
(2) 在这组向量中任意取出一个向量添加到, 则, 必线性相关.
那么称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是这个向量组的一个极大线性无关组, 简称极大无关组.
如果一个向量组是线性无关的, 则这个向量组的极大线性无关组就是这个向量组自身.

命题1

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是由非零向量组成的向量组, 如果其中的每个向量$\alpha_i(2 \le i \le s)$都不是它前面的向量的线性组合,
则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关.

命题2

任意一个极大线性无关组与向量组本身等价.

引理1

设$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$与$\beta_1, \cdots, \beta_s$是两个向量组, 如果
(1) 向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$可由$\beta_1, \cdots, \beta_s$线性表出,
(2) 向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性无关,
则$r \le s$.

向量组的极大线性无关组

命题1

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是由非零向量组成的向量组, 如果其中的每个向量$\alpha_i(2 \le i \le s)$都不是它前面的向量的线性组合,
则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关.

命题2

任意一个极大线性无关组与向量组本身等价.

引理1

设$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$与$\beta_1, \cdots, \beta_s$是两个向量组, 如果
(1) 向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$可由$\beta_1, \cdots, \beta_s$线性表出,
(2) 向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性无关,
则$r \le s$.

向量组的极大线性无关组

命题1

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是由非零向量组成的向量组, 如果其中的每个向量$\alpha_i (2 \leq i \leq s)$都不是它前面的向量的线性组合,
则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关.

命题2

任意一个极大线性无关组与向量组本身等价.

引理1

设$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$与$\beta_1, \cdots, \beta_s$是两个向量组，如果
(1) 向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$可由$\beta_1, \cdots, \beta_s$线性表出，
(2) 向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性无关，
则$r \leq s$.

向量组的秩

定理1

任一向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量。

任一向量组A的任一极大线性无关组所含向量个数称为向量组的秩．记作rank(A)，或$r(A)$.

推论1

设向量组A的秩为r，则A的任何一个线性无关的部分组中所含向量的个数不超过r.

推论2

如果向量组A可由向量组B线性表出，则$r(A) \le r(B)$，进而等价向量组的秩相等.

向量组的秩

定理1

任一向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量。

任一向量组A的任一极大线性无关组所含向量个数称为向量组的秩. 记作rank(A), 或$r(A)$.

推论1

设向量组A的秩为r, 则A的任何一个线性无关的部分组中所含向量的个数不超过r.

推论2

如果向量组A可由向量组B线性表出, 则$r(A) \leq r(B)$, 进而等价向量组的秩相等.

向量组的秩

定理1

任一向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量。

任一向量组A的任一极大线性无关组所含向量个数称为向量组的秩．记作rank(A)，或$r(A)$.

推论1

设向量组A的秩为r，则A的任何一个线性无关的部分组中所含向量的个数不超过r.

推论2

如果向量组A可由向量组B线性表出，则$r(A) \leq r(B)$，进而等价向量组的秩相等.

向量组的秩

定理1

任一向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量。

任一向量组A的任一极大线性无关组所含向量个数称为向量组的秩．记作$\mathrm{rank}(A)$，或$r(A)$.

推论1

设向量组A的秩为r，则A的任何一个线性无关的部分组中所含向量的个数不超过r.

推论2

如果向量组A可由向量组B线性表出，则$r(A) \le r(B)$，进而等价向量组的秩相等.

矩阵的行秩和列秩

定义1

任一矩阵A的行向量组的秩称为这个矩阵的行秩，A的列向量组的秩称为A的列秩.

阶梯形矩阵的定义

定义2

一个矩阵称为阶梯形(或行阶梯形), 若它有以下性质:
1. 每一非零行在每一零行之上;
2. 每一先导元素所在的列位于前一行先导元素的右边;
3. 某一先导元素所在列下方的元素都是零.

若一个矩阵还满足以下性质, 称它为简化阶梯形(或简化行阶梯形)
4. 每一非零行的先导元素是1;
5. 每一先导元素1是该元素所在列的唯一非零元素.

命题1

任一矩阵都可经初等行变换化成阶梯形; 任一矩阵都可经初等变换化成简化阶梯形. 阶梯形矩阵的秩就等于其中非零行的个数.

阶梯形矩阵的定义

定义2

一个矩阵称为阶梯形(或行阶梯形), 若它有以下性质:

1. 每一非零行在每一零行之上;
2. 每一先导元素所在的列位于前一行先导元素的右边;
3. 某一先导元素所在列下方的元素都是零.

若一个矩阵还满足以下性质, 称它为简化阶梯形(或简化行阶梯形)

4. 每一非零行的先导元素是1;
5. 每一先导元素1是该元素所在列的唯一非零元素.

命题1

任一矩阵都可经初等行变换化成阶梯形; 任一矩阵都可经初等变换化成简化阶梯形. 阶梯形矩阵的秩就等于其中非零行的个数.

关于矩阵秩的一些引理、定理和推论

- 引理1 初等行变换不改变矩阵的行秩; 初等列变换不改变矩阵的列秩.
- 引理2 矩阵的行秩在初等列变换下不变，列秩在初等行变换下不变.
- 定理1 矩阵的行秩与列秩在初等变换下不变.
- 推论1 任一矩阵的行秩等于列秩.
- 定义3 矩阵A的行秩和列秩统称为A的秩, 记为$\mathrm{rank}(A)$或$r(A)$.
- 推论2 任一矩阵A的转置A^{T}与A有相同的秩.
- 推论3 下列条件等价
  (1) n阶方阵A的n个行向量(或列向量)线性无关;
  (2) A的行列式不等于零;
  (3) $r(A)=n$;
  (4) A是可逆矩阵.
- 推论4 两个$m\times n$矩阵等价的充要条件是它们有相同的秩.

关于矩阵秩的一些引理、定理和推论

- 引理1 初等行变换不改变矩阵的行秩; 初等列变换不改变矩阵的列秩.
- 引理2 矩阵的行秩在初等列变换下不变，列秩在初等行变换下不变.
- 定理1 矩阵的行秩与列秩在初等变换下不变.
- 推论1 任一矩阵的行秩等于列秩.
- 定义3 矩阵A的行秩和列秩统称为A的秩, 记为rank(A)或$r(A)$.
- 推论2 任一矩阵A的转置A^T与A有相同的秩.
- 推论3 下列条件等价
  (1) n阶方阵A的n个行向量(或列向量)线性无关;
  (2) A的行列式不等于零;
  (3) $r(A) = n$;
  (4) A是可逆矩阵.
- 推论4 两个$m \times n$矩阵等价的充要条件是它们有相同的秩.

关于矩阵秩的一些引理、定理和推论

- 引理1 初等行变换不改变矩阵的行秩；初等列变换不改变矩阵的列秩.
- 引理2 矩阵的行秩在初等列变换下不变，列秩在初等行变换下不变.
- 定理1 矩阵的行秩与列秩在初等变换下不变.
- 推论1 任一矩阵的行秩等于列秩.
- 定义3 矩阵A的行秩和列秩统称为A的秩，记为rank(A)或$r(A)$.
- 推论2 任一矩阵A的转置A^T与A有相同的秩.
- 推论3 下列条件等价

  (1) n阶方阵A的n个行向量(或列向量)线性无关；

  (2) A的行列式不等于零；

  (3) $r(A) = n$；

  (4) A是可逆矩阵.
- 推论4 两个$m \times n$矩阵等价的充要条件是它们有相同的秩.

关于矩阵秩的一些引理、定理和推论

- 引理1 初等行变换不改变矩阵的行秩; 初等列变换不改变矩阵的列秩.
- 引理2 矩阵的行秩在初等列变换下不变，列秩在初等行变换下不变.
- 定理1 矩阵的行秩与列秩在初等变换下不变.
- 推论1 任一矩阵的行秩等于列秩.
- 定义3 矩阵A的行秩和列秩统称为A的秩, 记为$\mathrm{rank}(A)$或$r(A)$.
- 推论2 任一矩阵A的转置A^T与A有相同的秩.
- 推论3 下列条件等价
  (1) n阶方阵A的n个行向量(或列向量)线性无关;
  (2) A的行列式不等于零;
  (3) $r(A) = n$;
  (4) A是可逆矩阵.
- 推论4 两个$m \times n$矩阵等价的充要条件是它们有相同的秩.

关于矩阵秩的一些引理、定理和推论

- 引理1 初等行变换不改变矩阵的行秩; 初等列变换不改变矩阵的列秩.
- 引理2 矩阵的行秩在初等列变换下不变，列秩在初等行变换下不变.
- 定理1 矩阵的行秩与列秩在初等变换下不变.
- 推论1 任一矩阵的行秩等于列秩.
- 定义3 矩阵A的行秩和列秩统称为A的秩, 记为rank(A)或$r(A)$.
- 推论2 任一矩阵A的转置A^{T}与A有相同的秩.
- 推论3 下列条件等价
  (1) n阶方阵A的n个行向量(或列向量)线性无关;
  (2) A的行列式不等于零;
  (3) $r(A) = n$;
  (4) A是可逆矩阵.
- 推论4 两个$m \times n$矩阵等价的充要条件是它们有相同的秩.

关于矩阵秩的一些引理、定理和推论

- 引理1 初等行变换不改变矩阵的行秩; 初等列变换不改变矩阵的列秩.
- 引理2 矩阵的行秩在初等列变换下不变，列秩在初等行变换下不变.
- 定理1 矩阵的行秩与列秩在初等变换下不变.
- 推论1 任一矩阵的行秩等于列秩.
- 定义3 矩阵A的行秩和列秩统称为A的秩, 记为rank(A)或$r(A)$.
- 推论2 任一矩阵A的转置A^{T}与A有相同的秩.
- 推论3 下列条件等价
  (1) n阶方阵A的n个行向量(或列向量)线性无关;
  (2) A的行列式不等于零;
  (3) $r(A)=n$;
  (4) A是可逆矩阵.
- 推论4 两个$m\times n$矩阵等价的充要条件是它们有相同的秩.

关于矩阵秩的一些引理、定理和推论

- 引理1 初等行变换不改变矩阵的行秩; 初等列变换不改变矩阵的列秩.
- 引理2 矩阵的行秩在初等列变换下不变，列秩在初等行变换下不变.
- 定理1 矩阵的行秩与列秩在初等变换下不变.
- 推论1 任一矩阵的行秩等于列秩.
- 定义3 矩阵A的行秩和列秩统称为A的秩, 记为$\mathrm{rank}(A)$或$r(A)$.
- 推论2 任一矩阵A的转置A^{T}与A有相同的秩.
- 推论3 下列条件等价
  (1) n阶方阵A的n个行向量(或列向量)线性无关;
  (2) A的行列式不等于零;
  (3) $r(A) = n$;
  (4) A是可逆矩阵.
- 推论4 两个$m \times n$矩阵等价的充要条件是它们有相同的秩.

关于矩阵秩的一些引理、定理和推论

- 引理1 初等行变换不改变矩阵的行秩; 初等列变换不改变矩阵的列秩.
- 引理2 矩阵的行秩在初等列变换下不变，列秩在初等行变换下不变.
- 定理1 矩阵的行秩与列秩在初等变换下不变.
- 推论1 任一矩阵的行秩等于列秩.
- 定义3 矩阵A的行秩和列秩统称为A的秩, 记为rank(A)或$r(A)$.
- 推论2 任一矩阵A的转置A^{T}与A有相同的秩.
- 推论3 下列条件等价
  (1) n阶方阵A的n个行向量(或列向量)线性无关;
  (2) A的行列式不等于零;
  (3) $r(A) = n$;
  (4) A是可逆矩阵.
- 推论4 两个$m \times n$矩阵等价的充要条件是它们有相同的秩.

矩阵秩与行列式的关系

定义4

在矩阵$A = (a_{ij})_{m\times n}$中任意选定k行与k列, 位于这些行与列交叉点处的k^2个元素按原来的次序构成一个k阶行列式, 称为A的一个k阶子式.

定理2

一个矩阵的秩是r的充分必要条件是: 矩阵中有一个r阶子式不为零, 同时所有$r+1$阶子式全为零.

矩阵秩与行列式的关系

定义4

在矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$中任意选定k行与k列, 位于这些行与列交叉点处的k^2个元素按原来的次序构成一个k阶行列式, 称为A的一个k阶子式.

定理2

一个矩阵的秩是r的充分必要条件是: 矩阵中有一个r阶子式不为零, 同时所有$r+1$阶子式全为零.

线性方程组的表达形式I

一般形式：$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right.$；

矩阵形式：$A\boldsymbol{x}=\beta$，其中$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ bx_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$；

向量形式: $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$，其中$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$.

增广矩阵: $\bar{A} = (A \vdots B)$.

线性方程组的消元解法

解线性方程租的初等变换:

1. 对换变换 将某两个方程互换位置;
2. 倍乘变换 用一个非零数去乘某一方程;
3. 倍加变换 将某一方程的若干倍加到另一方程.

线性方程组所作的初等变换分别对应于其增广矩阵的初等行变换, 方程组在变换前后的同解关系可理解为其增广矩阵经初等行变换后行向量组的等价关系.

线性方程组的消元解法

解线性方程租的初等变换:

1. 对换变换 将某两个方程互换位置;
2. 倍乘变换 用一个非零数去乘某一方程;
3. 倍加变换 将某一方程的若干倍加到另一方程.

线性方程组所作的初等变换分别对应于其增广矩阵的初等行变换, 方程组在变换前后的同解关系可理解为其增广矩阵经初等行变换后行向量组的等价关系.

线性方程组的消元解法

解线性方程租的初等变换:

1. **对换变换** 将某两个方程互换位置;
2. **倍乘变换** 用一个非零数去乘某一方程;
3. **倍加变换** 将某一方程的若干倍加到另一方程.

线性方程组所作的初等变换分别对应于其增广矩阵的初等行变换, 方程组在变换前后的同解关系可理解为其增广矩阵经初等行变换后行向量组的等价关系.

线性方程组的消元解法

解线性方程租的初等变换：

1. **对换变换** 将某两个方程互换位置；
2. **倍乘变换** 用一个非零数去乘某一方程；
3. **倍加变换** 将某一方程的若干倍加到另一方程.

线性方程组所作的初等变换分别对应于其增广矩阵的初等行变换，方程组在变换前后的同解关系可理解为其增广矩阵经初等行变换后行向量组的等价关系.

解的存在定理

定理1

对于线性方程组，有下列结论:

(1) 若系数矩阵A与增广矩阵$\bar{A}$的秩都等于未知量的个数n，则该方程组有且只有唯一的一组解;

(2) 若系数矩阵A与增广矩阵$\bar{A}$的秩相等但小于n，即$r(A) = r(\bar{A}) < n$，则方程组有无穷多组解;

(3) 若$r(A) \neq r(\bar{A})$，则该方程组无解.

解的性质和基础解系

- **解的性质：** 齐次线性方程组解的线性组合还是方程组的解。
- **基础解系：**

定义1

齐次线性方程组的一组解$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$称为它的一个**基础解系**，如果

(1) 方程组的任一解都可以表示成$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$的线性组合；

(2) $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$线性无关.

解的性质和基础解系

- 解的性质： 齐次线性方程组解的线性组合还是方程组的解。
- 基础解系：

定义1

齐次线性方程组的一组解$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$称为它的一个基础解系，如果
(1) 方程组的任一解都可以表示成$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$的线性组合;
(2) $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$线性无关.

解的结构

定理2

设有齐次线性方程组

$$Ax = \mathbf{0}$$

其中$A=(a_{ij})_{m\times n}$. 若$r(A)=r<n$, 则该方程组有非零解, 并且基础解系$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$所含向量的个数等于$n-r$, 从而该方程组的任一组解均可由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性表出.

称$Ax=\mathbf{0}$为非齐次线性方程组$Ax=\beta$的导出组。

解的性质

(1) 方程组$Ax=\beta$的一个解与它的导出组的一个解之和还是这个方程组的一个解.

(2) 方程组$Ax=\beta$的两个解的差是其导出组的解.

称$Ax=\mathbf{0}$为非齐次线性方程组$Ax=\beta$的导出组。

解的性质

(1) 方程组$Ax=\beta$的一个解与它的导出组的一个解之和还是这个方程组的一个解.

(2) 方程组$Ax=\beta$的两个解的差是其导出组的解.

称$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$为非齐次线性方程组$A\boldsymbol{x}=\beta$的导出组。

解的性质

(1) 方程组$A\boldsymbol{x}=\beta$的一个解与它的导出组的一个解之和还是这个方程组的一个解.

(2) 方程组$A\boldsymbol{x}=\beta$的两个解的差是其导出组的解.

定理3

设有非齐次线性方程组$A\boldsymbol{x}=\beta$, 它的系数矩阵A与增广矩阵$\bar{A}$的秩等于$r, r<n$. 假定γ是$A\boldsymbol{x}=\beta$的任一特解, 导出组的基础解系为$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$, 则其所有解都可表示成如下形状:

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}+\gamma$$

其中$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$为任何数.

例1 求解下列方程组:

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4+x_5=1, \\ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4-3x_5=0, \\ 3x_1+5x_2+2x_3-2x_4-10x_5=-1. \end{cases}$$

解的结构定理

定理3

设有非齐次线性方程组$A\boldsymbol{x}=\beta$, 它的系数矩阵A与增广矩阵$\bar{A}$的秩等于$r, r<n$. 假定γ是$A\boldsymbol{x}=\beta$的任一特解, 导出组的基础解系为$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$, 则其所有解都可表示成如下形状:

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}+\gamma$$

其中$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$为任何数.

例1 求解下列方程组:

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4+x_5=1, \\ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4-3x_5=0, \\ 3x_1+5x_2+2x_3-2x_4-10x_5=-1. \end{cases}$$