高等代数

第二章　行列式

主讲人：梁治安、顾桂定、张远征、殷允川、王艳华、张振宇

上海财经大学应用数学系

March 2, 2008

目录

二、三阶行列式

二阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

目录

排列与逆序的定义

定义1

由n个自然数$1, 2, \cdots, n$组成的一个有序数组称为一个n级排列,记为$j_1 j_2 \cdots j_n$。

定义2

在一个n级排列$j_1 j_2 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n$中，如果$j_s > j_t$(即排在前面的数$j_s$比排在后面的数$j_t$大),则称$j_s$与$j_t$构成一个逆序，记为$j_s j_t$。排列$j_1 j_2 \cdots j_n$中逆序的总数称为排列的逆序数，记为$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$。

排列与逆序的定义

定义1

由n个自然数$1, 2, \cdots, n$组成的一个有序数组称为一个n**级排列**,记为$j_1 j_2 \cdots j_n$。

定义2

在一个n级排列$j_1 j_2 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n$中，如果$j_s > j_t$(即排在前面的数$j_s$比排在后面的数$j_t$大),则称$j_s$与$j_t$构成一个**逆序**，记为$j_s j_t$。排列$j_1 j_2 \cdots j_n$中逆序的总数称为排列的**逆序数**，记为$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$。

定义3

- 逆序数是非负整数。逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**。
- 按自然数的大小顺序由小到大排成的n级排列$1, 2, \cdots, n$称为**自然排列**，自然排列为偶排列。
- 如果把一个排列中的两个位置上的数互换，其余数保持不动，称为对该排列作一次**对换**，对换相邻位置上的两个数称为**相邻对换**。

n级排列的定义

定义3

- 逆序数是非负整数。逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列。
- 按自然数的大小顺序由小到大排成的n级排列$1, 2, \cdots, n$称为自然排列，自然排列为偶排列。
- 如果把一个排列中的两个位置上的数互换，其余数保持不动，称为对该排列作一次对换，对换相邻位置上的两个数称为相邻对换。

n级排列的定义

定义3

- 逆序数是非负整数。逆序数为奇数的排列称为奇排列; 逆序数为偶数的排列称为偶排列。
- 按自然数的大小顺序由小到大排成的n级排列$1, 2, \cdots, n$称为自然排列，自然排列为偶排列。
- 如果把一个排列中的两个位置上的数互换, 其余数保持不动，称为对该排列作一次对换, 对换相邻位置上的两个数称为相邻对换。

定理和推论

定理1

对换改变排列的奇偶性。

推论1

任何一个奇(偶)排列可经过奇(偶)数次对换变成自然排列。

推论2

在n个$n(n>1)$阶排列中,奇偶排列各半。

定理和推论

定理1

对换改变排列的奇偶性。

推论1

任何一个奇(偶)排列可经过奇(偶)数次对换变成自然排列。

推论2

在n个$n(n>1)$阶排列中,奇偶排列各半。

定理和推论

定理1

对换改变排列的奇偶性。

推论1

任何一个奇(偶)排列可经过奇(偶)数次对换变成自然排列。

推论2

在n个$n(n > 1)$阶排列中,奇偶排列各半。

目录

n阶行列式的定义

定义1 由n^2个元素$a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$排列成的数学符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为n阶行列式。它表示一个数，这个数是$n!$项的代数和，每一项是取自行列式不同行不同列的n个元素的乘积，每一项的n个元素按行指标构成自然排列时，由列指标构成的排列的奇偶性来确定该项的符号：当列指标构成的排列是偶排列时，该项取正号；当列指标构成的排列是奇排列时，该项取负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中$j_1j_2\cdots j_n$为n级排列，$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}$表示对所有n级排列求和。特别，当$n=1$时，我们规定$|a|=a$。

几个特殊行列式I

1. 下三角行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

2. 上三角行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

几个特殊行列式I

1. 下三角行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

2. 上三角行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

3. 对角行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

4. 反对角行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

几个特殊行列式II

3. 对角行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

4. 反对角行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

n阶行列式的其他表达形式

n阶行列式的另两种表示法:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

$$= \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

目录

转置行列式的定义

设行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

将D的行写成列（行列互换），得行列式

$$D^{\mathsf{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

称行列式D^{T}为行列式D的**转置行列式**。

行列式的性质

- 性质1 $D^{\mathsf{T}} = D$;
- 性质2 行列式的任一行（列）中各元素的公因子可提到行列式符号的外面;
- 推论 若行列式中有一行（列）的元素全为零，则行列式的值为零;
- 性质3 如果行列式中有一行(列)元素都是两个数的和，则该行列式可以拆成两个行列式的和;
- 性质4 如果行列式有两行(列)相同，那么行列式为零（所谓两行相同就是说两行对应元素相等）;
- 推论 如果行列式中两行(列)成比例，那么行列式为零;
- 性质5 把一行(列)的倍数加到另一行(列),行列式不变;
- 性质6 对换行列式中的两行(列)，行列式变号。

行列式的性质

- 性质1 $D^{\mathsf{T}} = D$;
- 性质2 行列式的任一行（列）中各元素的公因子可提到行列式符号的外面;
- 推论 若行列式中有一行（列）的元素全为零，则行列式的值为零;
- 性质3 如果行列式中有一行(列)元素都是两个数的和，则该行列式可以拆成两个行列式的和;
- 性质4 如果行列式有两行(列)相同，那么行列式为零（所谓两行相同就是说两行对应元素相等）;
- 推论 如果行列式中两行(列)成比例，那么行列式为零;
- 性质5 把一行(列)的倍数加到另一行(列),行列式不变;
- 性质6 对换行列式中的两行(列)，行列式变号。

行列式的性质

- 性质1 $D^{\mathsf{T}} = D$;
- 性质2 行列式的任一行（列）中各元素的公因子可提到行列式符号的外面;
- 推论 若行列式中有一行（列）的元素全为零，则行列式的值为零;
- 性质3 如果行列式中有一行(列)元素都是两个数的和，则该行列式可以拆成两个行列式的和;
- 性质4 如果行列式有两行(列)相同，那么行列式为零（所谓两行相同就是说两行对应元素相等）；
- 推论 如果行列式中两行(列)成比例，那么行列式为零;
- 性质5 把一行(列)的倍数加到另一行(列),行列式不变;
- 性质6 对换行列式中的两行(列)，行列式变号。

行列式的性质

- 性质1 $D^{\mathsf{T}} = D$;
- 性质2 行列式的任一行（列）中各元素的公因子可提到行列式符号的外面;
- 推论 若行列式中有一行（列）的元素全为零，则行列式的值为零;
- 性质3 如果行列式中有一行(列)元素都是两个数的和, 则该行列式可以拆成两个行列式的和;
- 性质4 如果行列式有两行(列)相同，那么行列式为零（所谓两行相同就是说两行对应元素相等）；
- 推论 如果行列式中两行(列)成比例，那么行列式为零;
- 性质5 把一行(列)的倍数加到另一行(列),行列式不变;
- 性质6 对换行列式中的两行(列)，行列式变号。

行列式的性质

- 性质1 $D^{\mathsf{T}} = D$;
- 性质2 行列式的任一行（列）中各元素的公因子可提到行列式符号的外面;
- 推论 若行列式中有一行（列）的元素全为零，则行列式的值为零;
- 性质3 如果行列式中有一行(列)元素都是两个数的和，则该行列式可以拆成两个行列式的和;
- 性质4 如果行列式有两行(列)相同，那么行列式为零（所谓两行相同就是说两行对应元素相等）;
- 推论 如果行列式中两行(列)成比例，那么行列式为零;
- 性质5 把一行(列)的倍数加到另一行(列),行列式不变;
- 性质6 对换行列式中的两行(列)，行列式变号。

行列式的性质

- 性质1 $D^{\mathsf{T}} = D$;
- 性质2 行列式的任一行（列）中各元素的公因子可提到行列式符号的外面;
- 推论 若行列式中有一行（列）的元素全为零，则行列式的值为零;
- 性质3 如果行列式中有一行(列)元素都是两个数的和，则该行列式可以拆成两个行列式的和;
- 性质4 如果行列式有两行(列)相同，那么行列式为零（所谓两行相同就是说两行对应元素相等）;
- 推论 如果行列式中两行(列)成比例，那么行列式为零;
- 性质5 把一行(列)的倍数加到另一行(列),行列式不变;
- 性质6 对换行列式中的两行(列)，行列式变号。

行列式的性质

- 性质1 $D^{\mathsf{T}} = D$;
- 性质2 行列式的任一行（列）中各元素的公因子可提到行列式符号的外面;
- 推论 若行列式中有一行（列）的元素全为零，则行列式的值为零;
- 性质3 如果行列式中有一行(列)元素都是两个数的和，则该行列式可以拆成两个行列式的和;
- 性质4 如果行列式有两行(列)相同，那么行列式为零（所谓两行相同就是说两行对应元素相等）;
- 推论 如果行列式中两行(列)成比例，那么行列式为零;
- 性质5 把一行(列)的倍数加到另一行(列),行列式不变;
- 性质6 对换行列式中的两行(列)，行列式变号。

行列式的性质

- 性质1 $D^{\mathsf{T}} = D$;
- 性质2 行列式的任一行（列）中各元素的公因子可提到行列式符号的外面;
- 推论 若行列式中有一行（列）的元素全为零，则行列式的值为零;
- 性质3 如果行列式中有一行(列)元素都是两个数的和，则该行列式可以拆成两个行列式的和;
- 性质4 如果行列式有两行(列)相同，那么行列式为零（所谓两行相同就是说两行对应元素相等）;
- 推论 如果行列式中两行(列)成比例，那么行列式为零;
- 性质5 把一行(列)的倍数加到另一行(列),行列式不变;
- 性质6 对换行列式中的两行(列)，行列式变号。

一些记号

- 一般地, 可以用符号$(i)+c(k)$写在等号上面表示第k行乘以c加到第i行; 写在等号下面表示第k列乘以c加到第i列;
- 一般用$i \leftrightarrow j$写在等号上面表示交换第i行与第j行; 写在等号下面表示交换第i列与第j列。

一些记号

- 一般地，可以用符号$(i)+c(k)$写在等号上面表示第k行乘以c加到第i行；写在等号下面表示第k列乘以c加到第i列；
- 一般用$i \leftrightarrow j$写在等号上面表示交换第i行与第j行；写在等号下面表示交换第i列与第j列。

提示：计算行列式的基本方法— 化行列式为三角形行列式。

例1 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$。

例2 计算n阶行列式$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$。

提示：计算行列式的基本方法— 化行列式为三角形行列式。

例1 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$。

例2 计算n阶行列式$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$。

行列式计算的例题II

例3 $D_n = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$，$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \neq 0$。

例4 计算n阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$

例3 $D_n=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$，$a_1a_2\cdots a_{n-1}\neq 0$。

例4 计算n阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$

代数余子式的定义

定义1 在n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，划去元素a_{ij}所在的第i行和第j列，剩下的元素按原来的顺序构成一个$n-1$阶行列式，称为元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}；称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素a_{ij}的代数余子式，记作A_{ij}

行列式按行（列）展开定理

定理1（行列式按行（列）展开定理）

n阶行列式D的值等于它的任意一行（列）各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}, \qquad (i=1,2,\cdots,n) \\ \text{或}D &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}, \qquad (j=1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

推论（重要恒等式）

n阶行列式D的任一行（列）元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn} &= 0, \quad (i\neq s) \\ \text{或}a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt} &= 0, \quad (j\neq t) \end{aligned}$$

行列式按行（列）展开定理

定理1（行列式按行（列）展开定理）

n阶行列式D的值等于它的任意一行（列）各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}, & (i=1,2,\cdots,n) \\ \text{或}D &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}, & (j=1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

推论（重要恒等式）

n阶行列式D的任一行（列）元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn} &= 0, & (i\neq s) \\ \text{或}a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt} &= 0, & (j\neq t) \end{aligned}$$

定理1和推论的另一种表述方法

注： 定理1及其推论可表述为：

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=\begin{cases} D, & i=s \\ 0, & i\neq s \end{cases}$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\begin{cases} D, & j=t \\ 0, & j\neq t \end{cases}$$

行列式计算的其他一些方法

提示：结合行列式的性质，先将行列式化成某一行或某一列大部分元素为零，再利用行列式的展开定理，将大大简化行列式的计算。

例5 计算4阶行列式$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$。

例6 计算n阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$。

行列式计算的其他一些方法

提示：结合行列式的性质，先将行列式化成某一行或某一列大部分元素为零，再利用行列式的展开定理，将大大简化行列式的计算。

例5 计算4阶行列式$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$。

例6 计算n阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$。

行列式计算的其他一些方法

提示：结合行列式的性质，先将行列式化成某一行或某一列大部分元素为零，再利用行列式的展开定理，将大大简化行列式的计算。

例5 计算4阶行列式$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$。

例6 计算n阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$。

例7 证明范德蒙德（Van der monde）行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j),$$

$$n \ge 2.$$

目录

Cramer法则

定理1 （Cramer法则） 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数组成的行列式$D = \mid A \mid = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$，那么线性方程组有解，且解是唯一的，并可以通过系数表示为$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D},$。其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots a_{2n} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

齐次线性方程组

常数项为零的线性方程组称为齐次线性方程组。

定理2

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式$D \neq 0$，那么它只有零解。换句话说，如果齐次方程组有非零解，那么必有$D = 0$。

例2 已知方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$有非零解，求$\lambda$的取值。

齐次线性方程组

常数项为零的线性方程组称为齐次线性方程组。

定理2

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式$D \neq 0$，那么它只有零解。换句话说，如果齐次方程组有非零解，那么必有$D = 0$。

例2 已知方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$有非零解，求$\lambda$的取值。

齐次线性方程组

常数项为零的线性方程组称为齐次线性方程组。

定理2

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式$D \neq 0$, 那么它只有零解。换句话说，如果齐次方程组有非零解，那么必有$D = 0$。

例2 已知方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解，求λ的取值。

目录

k级子式和代数余子式的定义

定义1

在一个n级行列式D中任意选定k行k列，位于这些行和列的交点上的k^2个元素按原来的次序组成的一个k级行列式M称为行列式D的一个k级子式。在D中划去这k行k列后余下的元素按照原来的次序组成的$n-k$级行列式M'称为M的余子式。

注： 从定义上看，M也是M'的余子式。

定义2

设D的k级子式M在D中所在的行、列指标分别是$i_1, i_2, \cdots, i_k$； $j_1, j_2, \cdots, j_k$。则M的余子式M'前面加上符号$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$后称作$M$的代数余子式。

k级子式和代数余子式的定义

定义1

在一个n级行列式D中任意选定k行k列，位于这些行和列的交点上的k^2个元素按原来的次序组成的一个k级行列式M称为行列式D的一个k级子式。在D中划去这k行k列后余下的元素按照原来的次序组成的$n-k$级行列式M'称为M的余子式。

注： 从定义上看，M也是M'的余子式。

定义2

设D的k级子式M在D中所在的行、列指标分别是$i_1, i_2, \cdots, i_k$； $j_1, j_2, \cdots, j_k$。则M的余子式M'前面加上符号$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$后称作$M$的代数余子式。

k级子式和代数余子式的定义

定义1

在一个n级行列式D中任意选定k行k列，位于这些行和列的交点上的k^2个元素按原来的次序组成的一个k级行列式M称为行列式D的一个**k级子式**。在D中划去这k行k列后余下的元素按照原来的次序组成的$n-k$级行列式M'称为M的**余子式**。

注： 从定义上看，M也是M'的余子式。

定义2

设D的k级子式M在D中所在的行、列指标分别是$i_1, i_2, \cdots, i_k$； $j_1, j_2, \cdots, j_k$。则M的余子式M'前面加上符号$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$后称作$M$的**代数余子式**。

引理

行列式D的任一个子式M与它的代数余子式A的乘积中的每一项都是行列式D的展开式中的一项，而且符号也一致。

定理1（拉普拉斯定理）

设在行列式中任意取定了k个行。由这k行元素所组成的一切k级子式与它的代数余子式的乘积的和等于行列式D。

Laplace定理

引理

行列式D的任一个子式M与它的代数余子式A的乘积中的每一项都是行列式D的展开式中的一项，而且符号也一致。

定理1（拉普拉斯定理）

设在行列式中任意取定了k个行。由这k行元素所组成的一切k级子式与它的代数余子式的乘积的和等于行列式D。

两个行列式的乘积

设n级行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1\cdot D_2=C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

其中c_{ij}是D_1的第i行元素分别与D_2的第j列对应元素乘积之和

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$