最优化理论与方法

第七章　特殊规划

上海财经大学应用数学系

December 26, 2008

几何规划的一般形式为:

$$(GP):\begin{cases}\min & G_0(x)\\ s.t. & G_m(x)\le\delta_m,\quad m=1,\cdots p;\\ & x>0,x\in R^n\end{cases}$$

其中$G_m(x)=\sum_{t=1}^{T_m}\delta_{mt}c_{mt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{mti}},m=0,1,\cdots,p$, 这里$T_m$表示$G_m(x)$的项
数, $c_{mt}>0$, $\delta_{mt}=+1$或-1, $\delta_m=+1$或-1, a_{mti}为实常指数。

几何规划的分类

显然该问题是一个关于变量x的具有非凸可行域的非线性优化问题。几何规划可以分为正项式几何规划和广义几何规划两类，若$G_m(x)$中$\delta_{mt}=+1, x>0$，则称$G_m(x)$为关于变量x的正项式函数，若对于所有的$m=0,1,,\cdots,p, t=1,\cdots,T_m$，
有$\delta_{mt}=+1$且$\delta_m=+1$，则称(GP)问题是一个正项式几何规划（PGP），若δ_{mt},δ_m 中存在取值为-1的情况，则称之为广义几何规划（GGP）。

正项式几何规化

正项式几何规划的一般形式如下:

$$(PGP):\begin{cases} \min & g_0(x) \\ s.t. & g_m(x)\le 1,\quad m=1,\cdots p; \\ & x>0, x\in R^n. \end{cases}$$

其中$g_m(x)=\sum_{t=1}^{T_m} c_{mt}\prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{mtj}}$, $m=0,\cdots,p$, 这里常系数$c_{mt}>0$, a_{mtj}为任意的实数, 显然对于$m=0,1,\cdots,p$ 函数$g_m(x)$均为正项式函数。

正项式几何规划

一般来说，一个正项式函数并不是凸函数，例如$f(x) = x^{1/2}$是正项式函数，但在$x > 0$的区域上不是凸的。众所周知，当极小化一个非凸函数时，我们总是很难找到它的全局极小点，而找到的仅仅是一个局部极小点，但是对于正项式几何规划，它的局部极小点也是它的全局极小点，因为每一个正项式几何规划问题都等价于一个凸规划，也就是等价于在凸区域上极小化一个凸函数，这是正项式几何规划的一个重要特征。

等价性

这种等价性由下述方法确定。对原正项式几何规划(PGP)进行指数变量替换，即令:

$$x_j = e^{z_j}, j = 1, \cdots, n$$

则原规划(PGP)等价于如下问题:

$$(PGP'): \begin{cases} \min & f_0(z) \\ s.t. & f_m(z) \le 1, \quad m = 1, \cdots p; \end{cases}$$

其中$f_m(z) = \sum_{t=1}^{T_m} c_{mt} \exp\{\sum_{j=1}^{n} a_{mtj} z_j\}$， $m = 0, \cdots, p$，因为一个以e为底以线性函数为指数的指数函数为凸函数，且c_t为正系数，所以规划问题(PGP')中的目标函数和约束函数均为凸函数，即规划(PGP')为凸规划。由于任何一个正项式几何规划都等价于一个凸规划问题，因此凸规划的理论可以应用于正项式几何规划的情况。

不等式证明

算术几何平均不等式在几何规划的最初发展中起到了非常重要的作用，许多算法都是基于该不等式构造出来的。下面我们首先根据两个引理，证明带权的算术平均值不小于几何平均值这个有名的不等式.

Lemma

设$f(x)$在[a,b]上有连续的二阶倒数
且$f''(x) \leq 0, x_i(i = 1, 2, \cdots, n)$是[a,b]上的任意n个点，则

$$f(\sum_{i=1}^{n} x_i/n) \geq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)/n.$$

而等号成立当且仅当所有的$x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i/n = \beta, (i = 1, \cdots, n)$.

证明：略.

Lemma

在引理1的假定下,再设 $p_i > 0(i = 1, \cdots, n)$*,则有*

$$f(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i / \sum_{i=1}^{n} p_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) / \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

证明: 略.

不等式证明

有了上面的引理,很容易证明带权的几何平均值不超过算术平均值.

Theorem

设$x_i \geq 0, p_i > 0 (i = 1, \cdots, n)$则有:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_i \tag{7.1.1}$$

等号当且仅当所有的x_i相等时成立.

不等式证明

证明: 取$f(x)=\ln x$,于是$f''(x)=-1/x^2<0$.加上定理条件,故满足引理1和引理2的条件,利用引理2的结论有:

$$\begin{array}{rcl} \ln(\sum_{i=1}^n p_i x_{i/\sum_{i=1}^n p_i}) & \geq & \sum_{i=1}^n p_i \ln(x_i)/\sum_{i=1}^n p_i \\ & = & \sum_{i=1}^n \ln(x_i^{p_i})/\sum_{i=1}^n p_i \\ & = & \ln(\prod_{i=1}^n x_i p_i)^{1/\sum_{i=1}^n p_i} \end{array}$$

上等式两边去掉对数符号有:

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}} \leq \sum_{i=1}^n p_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^n p_i$$

同引理7.1.1一样,等号只当所有x_i相等时成立.

无约束正项式几何规划

接下来我们讨论无约束正项式几何规划,问题简写为如下形式:

$$(UGP):\begin{cases}\min & y(x)=\sum_{j=1}^{m}c_jf_j(x)\\ s.t. & x\geq 0\end{cases}$$

其中

$$f_j(x)=c_j\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{ij}},\quad x=(x_1,\cdots,x_n)^T.$$

下面我们将借用前面所证明过的不等式把原极小化问题转化为极大化问题，常称后者是原问题的对偶问题，这两个问题的关系用下面的定理描述.

定理

Theorem

若存在一组非负数$p_1, p_2, \cdots, p_m$满足如下两个条件

$$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1, \tag{7.1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{7.1.3}$$

则当（UGP）的最小值存在时，其最小值必等于函数

$$d(p) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{c_j}{p_j}\right)^{p_j}, \quad p = (p_1, p_2, \cdots, p_m)^T$$

在约束条件(7.1.2)(7.1.3)之下的最大值.

定理证明

证明：分两步进行证明. 首先证明$y(x) \geq d(p)$ （其中$x > 0$）
根据不等式(7.1.1)可得:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{j=1}^{m} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}} \\
&\geq \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}}{p_j} \right)^{p_j} \\
&= \left(\prod_{j=1}^{m} (\frac{c_j}{p_j})^{p_j} \right) \prod_{j=1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}} \right)^{p_j} \\
&= d(p) \prod_{j=1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}} \right)^{p_j} \\
&= d(p) \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} x_i^{a_{ij} \cdot p_j} \\
&= d(p) \prod_{i=1}^{n} x_i^{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_j} \\
&= d(p)
\end{aligned}
$$

即:

$$y(x) \geq d(p)$$

其次证明：$y(x^*) = d(p^*)$,其中$x^* = (x_i^*, \cdots, x_n^*)^T$是UGP 的最小点，$p^* = (p_1^*, \cdots, p_m^*)^T$是$d(P)$的最大点.

定理证明

因为假设UGP的最优解存在,则$x^* > 0$,再根据多元函数取得极值的必要条件有:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial y(x)}{\partial x_k}\Big|_{x=x^*} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\sum_{j=1}^{m} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}\right]\Big|_{x=x^*} \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j a_{kj} \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}}{x_k}\Big|_{x=x^*} \\
&= \frac{1}{x_k^*}\sum_{j=1}^{m} c_j a_{kj} \prod_{i=1}^{n} {x_i^*}^{a_{ij}} \quad (x_k^* \neq 0) \\
&= \frac{1}{x_k^*}\sum_{j=1}^{m} c_j a_{kj} f_j(x^*)
\end{aligned}$$

即

$$\sum_{j=1}^{m} c_j a_{kj} f_j(x^*) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

若取

$$p_j^* = \frac{c_j f_j(x^*)}{y(x^*)}, \quad j = 1, 2, \cdots, m \tag{7.1.4}$$

定理证明

事实上:

$$
\begin{aligned}
y(x^*) &= \prod_{j=1}^{m}(y(x^*))^{p_j^*} \\
&= \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{c_j f_j(x^*)}{p_j^*}\right)^{p_j^*} \\
&= \left(\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{c_j}{p_j^*}\right)^{p_j^*}\right)\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} {x_i^*}^{a_{ij}p_j^*} \\
&= d(p^*)\prod_{i=1}^{n} {x_i^*}^{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}p_j^*} \\
&= d(p^*)
\end{aligned}
$$

即:

$$y(x^*) = d(p^*)$$

因此$d(p^*)$是$d(p)$的极大值.

注

此定理不仅告诉我们,UGP的最小值等于它的对偶函数的最大值;而且可从求得的p^*与$d(p^*)$出发,借助于(7.1.4) 式解出x^*. (7.1.4)式从表面上看是非线性方程组,但对方程两边取对数以后,就变成了如下以$\ln x_i^*$为未知数的线性代数方程组:

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ln x_i^* = -\ln c_j + \ln p_j^* + \ln y(x^*),\quad j = 1,\cdots,m\right.$$

因此原问题最小点x^*不难求得.

例子

为了加深对上述定理的理解,进一步认识几何规划的优越性和求解步骤,下面给出一个例子, 这个例子是有实际意义的,它是描述一个工厂当产值一定时,如何选择影响产值的各因素使其成本最低.

例: 求无约束几何规划的最优解:

$$\begin{cases} \min & y = 60x_1^{-3}x_2^{-2} + 50x_1^3x_2 + 20x_1^{-3}x_2^3 \\ s.t. & x > 0 \end{cases}$$

例子求解

解: 把原问题目标函数写成标准形式:

$$y(x)=\sum_{j=1}^{3}c_j\prod_{i=1}^{2}x_i^{a_{ij}}$$

其中$c_1=60,c_2=50,c_3=20,a_{11}=-3,a_{21}=-2,a_{12}=3,a_{22}=1,a_{13}=-3,a_{23}=3$ 根据定理7.1.4, 其对偶问题为:

$$\begin{array}{ll} max & d(p)=\prod_{j=1}^{3}(\frac{c_j}{p_j})^{p_j} \\ s.t. & \sum_{j=1}^{3}p_j=1, \\ & \sum_{j=1}^{3}a_{ij}p_j=0. \quad (i=1,2) \end{array}$$

将a_{ij}的值代入约束条件,得到如下方程组:

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3=1 \\ -3p_1+3p_2-3p_3=0 \\ -2p_1+p_2+3p_3=0 \end{cases}$$

例子求解

解此方程组得:

$$p_1^* = 0.4,\ p_2^* = 0.5,\quad p_3^* = 0.1$$

再由定理7.1.4得:

$$y(x^*) = d(p^*) = 125.8$$

最后由(7.1.4)式,

$$p_j^* = \frac{c_j \prod_{i=1}^{2} x_i^{*a_{ij}}}{y(x^*)}$$

可得$x^* = (1.12, 0.944)^T$. 因此原问题的最优解为$x^* = (1.12, 0.944)^T$,相应的最小值为$y(x^*) = 125.8$,

注

由此例可以看到当$m = n + 1$时,解存在且唯一.可以看到,如果实际问题对应的数学模型是这种类型的几何规划问题,求解非常简单.因此我们在建立数学模型时,尽量抓住受影响的主要因素,舍去次要因素,使其得到的数学模型尽量满足$m = n + 1$.
以上讨论了无约束正项式几何规划,从理论上到具体解法都比较满意,对于有约束的正项式几何规划可以类似得到对偶规划,这里就不再详细介绍.

在实际优化问题中,往往要求同时考虑多个指标的优化.这在数学模型体现为一个多目标优化问题. 关于多目标规划问题的理论与求解方法在很多书籍中都有详细的阐述,这里我们主要参考了[?],[?],[?].我们以下面的例子来说明问题存在的普遍性.

例子

例：某工厂生产甲,乙两种产品和,每月甲产品至少生产2万件,但月产量不能超过5万件.甲产品的利润是每件2元；生产一件甲产品和生产一件乙产品的工时相等.每件乙产品的利润是5元,每月两种产品产量总和不低于6万件.也不高于8万件,产量超过6万件的部分称为超产量.工厂希望（1）甲产品的产量要尽可能多；（2）为了每个人不加班,超量要少；（3）利润要多. 试建立该问题的数学模型.

例子求解

解 设甲产品的月产量为x_1万件,乙产品的月产量为x_2万件.此问题的三个目标可以写成maxx_1, min(x_1+x_2-6), max$(2x_1+4x_2)$,则此问题的数学模型是

$$\begin{array}{ll} \min & (f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2), f_3(x_1,x_2)) \\ \text{s.t.} & x_1+x_2 \geq 6 \\ & x_1+x_3 \leq 8 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

其中

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &= -x_1 \\ f_2(x_1,x_2) &= x_1+x_2-6 \\ f_3(x_1,x_2) &= -2x_1-4x_2 \end{aligned}$$

多目标规划的基本概念

在一个具体的优化问题中,有的指标可能要求最小化,有的要求最大化,有的约束可能是"$\leq$",有的可能是"$\geq$".但是我们总可以通过乘以-1使得它们化成下面多目标规划的标准形式:

$$\begin{array}{lll} \text{(MOP)} & \text{min} & (f_1(x), \cdots, f_p(x)) \\ & \text{s.t.} & g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \cdots, m \end{array}$$

其中x是n维向量,称为决策向量,所在的空间称为决策空间;
$f_1(x), \cdots, f_p(x)$ 称为目标函数,所在的空间称为目标空间,$g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \cdots, m$称为约束函数.多目标规划问题亦称向量最优化问题.

多目标规划的基本概念

多目标规划问题实际上是将决策空间的一个区域映射到目标空间的一个区域.所以问题涉及到下面两个可行域的概念.

$$X = \{x \in E^n | g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \cdots, m\}$$

称为（MOP）的可行域（feasiable set）.

$$F = \{(f_1, f_2, \cdots, f_p) \in E^p | f_i = f_i(x), i = 1, 2, \cdots, p, x \in X\}$$

称为值域（image set）.
若每个目标函数都是凸函数,而可行域是凸集,则（MOP）称为多目标凸规划问题. 凸多目标规划问题有很好的性质.

多目标规划的基本概念

如果能找到一组决策变量的取值,使得每个目标均达到最小值,这组值称为(MOP)的绝对最优解.但是一般情况下,这种解是不存在的.存在相互冲突的目标,一个目标"变好"时,至少有另外一个目标要"变坏", 所以人们考虑多目标规划问题的解的概念.

多目标规划的基本概念

Definition

设$x' \in X$. 若不存在另一个可行点$x \in X$使得$f_i(x) \leq f_i(x'), i = 1, 2, \cdots, p$,且其中至少有一个严格不等式成立,则称$x'$为（MOP）的一个有效解（efficient solution）(或非劣解,或Pareto最优解).

Definition

设$x' \in X$.若不存在另一个可行点$x \in X$ 使得$f_i(x) > f_i(x'), i = 1, 2, \cdots, p$, 则称$x'$为（MOP）的一个弱有效解(weak efficient solution).

若x'是（弱）有效解,则称$(f_1(x'), f_2(x'), \cdots, f_p(x'))$称为目标空间的（弱）有效点.

从上面的概念可以看出,如果我们考虑具有一般向量偏序"$\leq$"的代数系统格R^p, 则求解多目标规划问题(MOP)就是求格R^p中值域F的极点.

为了叙述方便,我们有必要在这里给出格R^p中的偏序记号:

设$x = (x_1, x_2, \cdots, x_p), y = (y_1, y_2, \cdots, y_p) \in R^p$.

(1) $x = y$意思是$x_i = y_i, i = 1, 2, \cdots, p$;

(2) $x < y$意思是$x_i < y_i, i = 1, 2, \cdots, p$;

(3) $x \leq y$意思是$x_i \leq y_i, i = 1, 2, \cdots, p$,但是,至少有一个严格不等式成立;

(4) $x \leqq y$意思是$x_i \leq y_i, i = 1, 2, \cdots, p$.

对于大于等于有类似的记号.

多目标规划的基本概念

对于（MOP）的有效解和弱有效解,显然有下面的结论.

Theorem

有效解一定是弱有效解.

例子

例：设双目标规划问题为

$$\begin{array}{ll} \min & (f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2)) \\ \text{s.t.} & x \in X = \{x^1, x^2, x^3, x^4\} \end{array}$$

$f_1(x), f_2(x)$的函数值如下表给出,求这个问题的有效解和弱有效解.

	x^1	x^2	x^3	x^4
$f_1(x)$	1	1	2	3
$f_2(x)$	3	2	1	2
(f_1, f_2)	A	B	C	D

解 问题的有效解是：x^2和x^3; 弱有效解是：x^1, x^2, x^3.

有效解的几何解释

有效解对应的有效点即为目标可行域的左下边缘.
例：在金融理论中Markowitz组合投资选择数学模型即为双目标规划问题。设有p中投资产品，其资金分配向量为$x=(x_1,x_2,\cdots,x_p)$. $R(x)$为期望回报,$V(x)$为协方差风险测度,那么该问题的标准双目标规划模型为

$$\begin{array}{ll} \text{min} & (-R(x),V(x)) \\ \text{s.t.} & \sum_i^p x_i=1, x_i\geq 0, i=1,2,\cdots,p \end{array}$$

那么该问题的有效解对应的有效点组成的点集即为著名的Pareto有效前沿.

真有效解

在多目标规划问题的有效解中取一点x',如果一个目标在另一点“变好”了,则一定至少有另一个目标在这点“变坏的程度更大,我们把x'称为如下定义的有效解.

Definition

设x'是（MOP）的有效解.若存在正数M使得对满足$f_i(x) < f_i(x')$的每一个i与一个$x \in X$,至少存在一个$j \neq i$使得$f_j(x) > f_j(x')$与$\frac{f_i(x')-f_i(x)}{f_j(x)-f_j(x')} \leq M$成立,则称$x'$为(MOP)的真有效解.

例子

例：考虑双目标规划问题

$$\min_{x\in R} \quad (x,(1-x)^2)^T$$

它的有效解集是$(-\infty,1]$,真有效解集是$(-\infty,1)$.
证明：对于$x'=1$和任意$x\in(-\infty,1)$，易见$f_1(x')-f(x)=1-x>0, f_2(x)-f_2(x')=(1-x)^2$.由于当$x\to 1^-$时，$f_2(x)-f_2(x')=(1-x)^2$是$f_1(x')-f(x)$的高阶无穷小量,所以不存在$M_1>0$使得

$$\frac{f_1(x')-f(x)}{f_2(x)-f_2(x')}\le M_1$$

亦即,$x'=1$不是问题的真有效解.

例子

对于$x' < 1$,若$f_1(x') - f_1(x) = x' - x > 0$,则$x \in (-\infty, x')$.于是

$$f_2(x) - f_2(x') = (1-x)^2 - (1-x')^2 = (x'-x)(1-x-x') > 0$$

特别地,存在$M_3 > 0$使得

$$\frac{f_1(x') - f(x)}{f_2(x) - f_2(x')} \le M_3$$

此外,对于满足$f_2(x) - f_2(x') < 0$的$x \in \mathbb{R}$，注意到$x' < 1$,只有如下情形出现:

$$x > x', 并且 x < 2 - x'.$$

于是我们有$f_1(x) - f_1(x') = x - x' \in (0, 2)$. 这说明

$$f_2(x') - f_2(x) = (x - x')(1 - x - x') \le (f_1(x) - f_1(x'))(2 - 2x'),$$

即存在$M_4 = 2(1 - x') > 0$,使得$\frac{f_2(x') - f_2(x)}{f_1(x) - f_1(x')} \le M_4$.
综上所述,该问题的真有效解集是$(-\infty, 1)$, 它是有效解集的一个真子集.

有效性条件

类似于单目标规划问题,我们可以给出多目标规划问题的有效性条件.

对于多目标规划问题(MOP),我们首先给出它的Lagrange函数:

$$L(x, \alpha, \lambda, \mu) = \alpha^T f(x) + \lambda^T g(x)$$

其中,$\alpha \in \mathbb{R}_+^p, \lambda \in \mathbb{R}_+^l$.

有效性条件

Theorem

(Fritz John 必要条件) 若x'是(MOP)一个有效解或若有效解,目标函数和约束函数在x'处是可微的,则存在向量$\alpha \in \mathbb{R}_+^p, \lambda \in \mathbb{R}_+^l$,使得$(\alpha, \lambda) \neq 0$.并且

$$\nabla_x L(x', \alpha, \lambda, \mu) = \nabla f(x')\alpha + \nabla g(x')\lambda = 0 \tag{1}$$

$$\lambda^T g(x') = 0 \tag{2}$$

其中$\nabla f, \nabla g$分别表示向量值函数f, g在相应点处的梯度矩阵(即Jacobi矩阵的转置).

约束规格

为了保证目标函数前面的系数$\alpha \neq 0$, 人们讨论了各式各样的约束规格.[?]

Theorem

(Karush-Kuhn-Tucker必要条件)若x'是(MOP)一个有效解或弱有效解,目标函数和约束函数在x'处是可微的,并且在x'处Kuhn–Tucker约束规格成立,则存在非零向量$\alpha \in \mathbb{R}^p_+, \lambda \in \mathbb{R}^m_+$, 满足式(7.1)和(7.2).

Theorem

(Karush-Kuhn-Tucker充分条件)假设向量函数f, g是凸的,在可行点x'处是可微的. 若存在非零向量$\alpha \in \mathbb{R}^p_+, \lambda \in \mathbb{R}^m_+$,满足(7.1)和(7.2),则$x'$是(MOP)的弱有效解,特别地,当$\alpha > 0$时,$x'$是(MOP)的有效解.

注

在以上定理中,我们要求f, g是凸函数,才能保证满足Kuhn-Tucker条件的可行解是弱有效解或有效解.关于这个条件近几年来有很多的推广,特别是,在1981年Hanson提出不变凸概念以后[?], 有大量的文章讨论在广义凸意义下,Kuhn-Tucker条件的充分性[?],[?],[?].

多目标规划的解法

- 1. 标量法
- 2. 约束法
- 3. 混合法

这种方法的思想是用一些非负常数将(MOP)转化成一个单目标规划问题,通过求解该单目标规划问题的解得到(MOP)一个有效解.
根据各个目标的重要程度分别乘上一个权系数$w_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} w_i = 1$, 重要的目标乘的权系数要大,者可以通过分析的方法说明这个道理.然后将它们求和, 得到一个函数,以此作为目标函数,构造一个单目标规划问题如下(P_w):

$$\begin{array}{ll} \text{min} & w^T f(x) = \sum_{i=1}^{p} w_i f_i(x) \\ \text{s.t.} & g(x) \leq 0 \end{array}$$

标量化方法

Theorem

关于如上构造的标量化问题与原(MOP)的解有下面的关系:
(1)若$w_i > 0, i = 1, 2, \cdots, p$, x^*是(P_w)的最优解,则x^*是(MOP)的有效解;
(2)若$w_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, p$, x^*是(P_w)的唯一的最优解,则x^*是(MOP)的有效解;
(3)若$w_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, p$, x^*是(P_w)的最优解,则x^*是(MOP)的弱有效解.

定理证明

证明: (1) 用反证法.假设x^*不是(MOP)的有效解,则由有效解的定义,存在$x \in S = \{x \mid g(x) \leq 0\}$ 使得

$$f_i(x) \leq f_i(x^*)(i = 1, 2, \cdots, p)$$

并且至少有一个严格不等式成立.由条件$w_i > 0, i = 1, 2, \cdots, p$, 有

$$w_i f_i(x) \leq w_i f_i(x^*)(i = 1, 2, \cdots, p)$$

并且至少有一个严格不等式成立.
把上式相加,即得

$$w^T f(x) = \sum_i^p w_i f_i(x) < \sum_i^p w_i f_i(x^*) = w^T f(x^*)$$

这就是说,存在$x \in S = \{x \mid g(x) \leq 0\}$使得$w^T f(x) < w^T f(x*)$, 但是,这与$x^*$是$(P_w)$的最优解矛盾. 所以,$x^*$是(MOP)的有效解.

(2)用反证法.假设x^*不是(MOP)的有效解,则由有效解的定义,存在$x \in S = \{x \mid g(x) \leq 0\}$ 使得

$$f_i(x) \leq f_i(x^*)(i = 1, 2, \cdots, p)$$

并且至少有一个严格不等式成立.这时,$x \neq x^*$. 由条件$w_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, p$, 有

$$w_i f_i(x) \leq w_i f_i(x^*)(i = 1, 2, \cdots, p)$$

但是,如果将这些式子加起来,这时,或者有

$$w^T f(x) = \sum_i^p w_i f_i(x) < \sum_i^p w_i f_i(x^*) = w^T f(x^*) \tag{3}$$

或者有

$$w^T f(x) = \sum_i^p w_i f_i(x) = \sum_i^p w_i f_i(x^*) = w^T f(x^*) \tag{4}$$

(7.3)式与x^*是标量化问题的最优解矛盾;(7.4)式与x^*是标量化问题的唯一最优解矛盾. 所以,x^*是原多目标规划的有效解.
(3)的证明同样可以应用反证法与(1)类似地证明,这里不再赘述.

注

以上定理告诉我们,通过变换权系数可以得到一些原多目标规划的有效解和弱有效解.并且可以证明:当问题是凸多目标规划时,(MOP)的所有有效解和弱有效解都可以通过标量化方法得到,但是当问题不是凸多目标规划时,有的有效解则不可能通过这种方法得到. 如下图所示: 图:非凸双目标规划问题的有效点处不一定存在非割线的切线

提出问题

在定理7.3.5(2)中,如果标量化问题的最优解不唯一,其最优解不一定是原多目标规划问题的有效解,因为在权系数乘相应目标函数时,乘子0所乘的目标函数在两可行解处的函数值不等,这样其标量化问题在这两个可行解处取得同样的最优值.那么如何判断这时的最优解是原多目标规划问题的有效解呢?

判别定理

Theorem

若对于$w_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, p, x^*$是(WP)的最优解,且当
(1)$\bar{\delta} = 0$时, x^*是(MOP)的有效解;
(2)$\bar{\delta} > 0$时, x^*不是(MOP)的有效解;
其中$\bar{\delta}$是下述辅助规划问题的最优函数值.

$$\begin{aligned}
&\bar{\delta} = \mathit{max}\delta = \textstyle\sum_{i=1}^{p} \delta_i; \\
&\mathit{s.t.} f_i(x) + \delta_i = f_i(x^*), i = 1, 2, \cdots, p; \\
&g(x) \leq 0; \\
&\delta_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, p.
\end{aligned}$$

定理证明

(1)如果辅助问题的目标值$\bar{\delta}=0$,这时,对于任何的$x \in S=\{x \mid g(x) \le 0\}$, $\delta_i=0$,即不存在可行解x使得$f(x) \le f(x^*)$,那么x^*为(MOP)的有效解.
(2)的证明也显然.

例子

例：用加权法求解下述问题的有效解.

$$\begin{aligned} \max \quad & (f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2)) \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 + x_2 \le 9 \\ & x_1 \le 5 \\ & x_2 \le 5 \\ & -x_1 \le 0 \\ & -x_2 \le 0 \end{aligned}$$

其中 $f_1(x_1,x_2) = 2x_1 - x_2, f_2(x_1,x_2) = -x_1 + 3x_2$.

解　记可行集为

$$X = \{(x_1, x_2) \in E^2 | -x_1 + x_2 \le 4, x_1 + x_2 \le 9, 0 \le x_1, x_2 \le 5\}$$

目标函数的加权和为$w_1 f_1 + w_2 f_2$,相应的标量化问题为:

$$\begin{array}{ll} \text{max} & w_1 f_1(x_1, x_2) + w_2 f_2(x_1, x_2) \\ \text{s.t.} & x \in X \end{array}$$

其中$w_1, w_2 > 0$为加权因子.

例子求解

此加权问题的最优解(x_1, x_2)应满足Kuhn-Tuck条件：对应于可行集的六个约束条件存在六个Lagrange 乘子$\mu_i (i = 1, \cdots, 6)$使

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[w_1 f_1(x_1, x_2) + w_2 f_2(x_1, x_2)]$$
$$-\sum_{j=1}^{6} \mu_j \frac{\partial}{\partial x_i} g_j(x_1, x_2) = 0, i = 1, 2$$
$$\mu_j g_j(x_1, x_2) = 0, j = 1, \cdots, 6$$

成立,

例子求解

$$
\begin{aligned}
2w_1 - w_2 + \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_5 &= 0 \\
-w_1 + 3w_2 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_4 + \mu_6 &= 0 \\
(-x_1 + x_2 - 4)\mu_1 &= 0 \\
(x_1 + x_2 - 9)\mu_2 &= 0 \\
(x_1 - 5)\mu_3 &= 0 \\
(x_2 - 5)\mu_4 &= 0 \\
-x_1\mu_5 &= 0 \\
-x_2\mu_6 &= 0 \\
\mu_1, \cdots, \mu_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

成立.

例子求解

因为标量化问题是一个线性规划,最优解在可行集的边界上.又因为有两个自变量,最优解有一个或两个有效约束,先考虑只有$x_2 \le 5$起作用. 此时,等式$x_2 = 5$成立,其它5个约束严格不等式成立,因此$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_5 = \mu_6 = 0$解上式得$w_1 = 1/3, w_2 = 2/3, \mu_4 = 5/3$. 用此组$w_1, w_2$的值代入标量化问题并求解这个线性规划,得无穷多个解,这些解分布在图示的CD线段上,这些解都是原问题的有效解. 研究另外两个有效约束的情况,得到

有效约束	Lagrange 乘子	解标量化问题得	有效解
$x_2 \le 5$	$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_5, \mu_6 = 0$	(w_1, w_2) $= (1/3, 2/3)$ $\mu_4 = 5/3$	CD线段
$x_1 + x_2 \le 9$	$\mu_1, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6 = 0$	(w_1, w_2) $= (4/7, 3/7)$ $\mu_2 = 5/7$	DE线段
		(w_1, w_2)	

2.约束法

设多目标规划为

$$
\begin{array}{lll}
(\text{MOP}) & \max & (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_p(x)) \\
 & \text{s.t.} & g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \cdots, m
\end{array}
$$

约束法(constraint method)也是一种用单目标规划求解多目标规划有效解的方法.选一个目标作为目标,其余目标变为约束,构造下述单目标规划问题$P_k(\varepsilon_k)$:

$$
\begin{array}{ll}
\min & f_k(x) \\
\text{s.t.} & f_i(x) \leq \varepsilon_i, i \neq k \\
 & g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \cdots, m
\end{array}
$$

定理及证明

Theorem

x^*是(MOP)的有效解的充分必要条件是：x^*同时是p个约束问题$P_k(\varepsilon_k)$的最优解.

证明：必要性. 假设x^*是(MOP)的有效解. 如果x^*不是某个$P_k(\varepsilon_k)$的最优解,其中$\varepsilon_i = f(x^*), i = 1, 2, \cdots, p.i \neq k$. 即存在$x \in S = \{x \mid g(x) \leq 0\}$使得$f_k(x) < f_k(x^*)$,并且$f_i(x) \leq f_i(x^*), j = 1, 2, \cdots, p, j \neq k$,这与$x^*$是(MOP)的有效解矛盾.所以$x^*$ 同时是p个约束问题$P_k(\varepsilon_k)$的最优解.

定理证明

充分性. 因为x^*同时是p个约束问题$P_k(\varepsilon_k)$的最优解, 那么不存在$x \in S = \{x \mid g(x) \leq 0\}$使得$f_i(x) < f_i(x^*)$并且至少有一个严格不等式成立. 所以$x^*$是(MOP)的有效解.

定理

Theorem

对于某一个k, 若x^*是$P_k(\varepsilon_k)$的唯一最优解,则x^*是(MOP)的有效解, 这里$\varepsilon_k^* = (\varepsilon_1^*, \cdots, \varepsilon_{k-1}^*, \varepsilon_{k+1}^*, \cdots, \varepsilon_p^*)$,其中$\varepsilon_i^* = f_i(x^*), i = 1, 2, \cdots, p, i \neq k$.

证明: 因为x^*是$P_k(\varepsilon_k)$的唯一最优解, 对某一个k, 其中$\varepsilon_i^* = f_i(x^*), i = 1, 2, \cdots, p, i \neq k$,那么对所有的$x \in S = \{x \mid g(x) \leq 0\}$, $f_i(x) \leq f_i(x^*), i \neq k$, $f_k(x) > f_k(x^*)$, 从而, 没有一个$f_i, i \neq k$, 能够在不增加f_k的情况下而减小. 所以x^*是(MOP)的有效解.

3.混合法

Definition

把加权法和约束法结合起来称为混合法(hybrid method).

考虑标量化问题$P(w,\varepsilon)$:

$$\begin{array}{ll} \text{max} & w^T f(x) \\ \text{s.t.} & f_i(x) \le \varepsilon_i (i = 1, 2, \cdots, p) \\ & g_j(x) \le 0, j = 1, 2, \cdots, m \end{array}$$

其中$w > 0$.

定理

Theorem

x^*是(MOP)的有效解的充分必要条件是：x^*是$P(w^0,\varepsilon)$的最优解,其中$w^0>0$,和$\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,p)$ 是任意给定的使得$P(w^0,\varepsilon)$可解的向量和一组实数.

证明： 必要性. 涓埃社,对任意给定的$w^0>0$, x^*不是$P(w^0,\varepsilon)$的最优解,对于任何ε 其中包括$P(w^0,\varepsilon^*),\varepsilon^*=f(x^*)$.
设x^0是$P(w^0,\varepsilon^*)$的最优解.从而我们有

$$(w^0)^T f(x^0) < (w^0)^T f(x^*) \tag{5}$$

和

$$f(x^0) < f(x^*) \tag{6}$$

因为$w^0>0$,由(7.5)和(7.6)推出$f(x^0)\leq f(x^*)$. 从而x^*不是(MOP)的有效解.

定理证明

充分性. 假设x^*是$P(w^0,\varepsilon)$的最优解,对于某个$\varepsilon \in R^p$. 它一定也是$P(w^0,\varepsilon^*)$ 的最优解,其中$\varepsilon^* = f(x^*)$. 假设x^*不是(MOP)的有效解, 那么存在可行解x^0使得$f(x^0) \leq f(x^*)$ 从而,对任何$w^0 > 0, (w^0)^T f(x^0) < (w^0)^T f(x^*)$, 它与$x^*$是$P(w^0,\varepsilon^*)$的最优解矛盾.因此, x^*是(MOP)的有效解.