

# 广义平均值差分格式在对流-扩散方程中的应用\* 1)

李 剑

(国家信息中心)

孙家昶

(中国科学院计算中心)

## APPLICATIONS OF GENERALIZED MEANS DIFFERENCE SCHEMES TO CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS

Li Jian Sun Jia-chang

(Computing Center, Academia Sinica)

### Abstract

With the generalized means, a kind of adaptive difference schemes for convection-diffusion equations is designed in this paper. Truncation errors, selection of parameters in the schemes, stability conditions and monotonicity preserving conditions are discussed. Some numerical tests in one and two dimensions show that the GMS schemes for convection diffusion equations with moderate Reynolds numbers are feasible and effective.

### § 1. 引 言

从逼近的角度看,微分方程的各种数值方法均可认为是对解函数的某种方式的逼近。当解具有大梯度时,线性逼近的效果往往不好。一般的克服办法是细分网格或采用高阶多项式插值。本文考虑从非线性逼近的角度处理微分方程大梯度问题。前几年孙家昶导出广义平均值<sup>[2]</sup>以及一类半线性数值微分公式<sup>[3]</sup>,并且运用这种工具解常微分方程的初边值问题,取得良好效果<sup>[3,4]</sup>。本文在此基础上对于对流-扩散方程用广义平均值构造了一种自适应的差分格式,使之具有根据解的局部性态选择格式的特点,并分析了格式的截断误差和所引入参数的选取,以及格式的稳定性和保单调性条件。对于一维及二维问题的一

\* 1987年7月23日收到。

1) 国家自然科学基金资助项目。

些数值试验表明所构造的格式处理具有中等 Reynolds 数的对流-扩散方程的大梯度问题是可行的。

## § 2. 广义平均值及其数值微分公式

孙家昶在 [2] 中提出一类  $n$  个变量的广义平均值概念, 并研究了它的性质。对于两个正数  $a, b$ , 它的一种特殊形式(见 [4]) 为

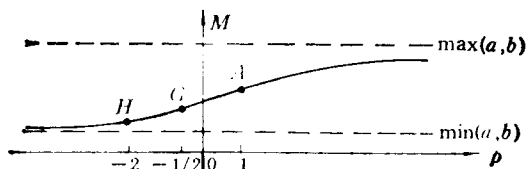
$$M(a, b, p) \equiv \begin{cases} \frac{p}{p+1} \frac{a^{p+1} - b^{p+1}}{a^p - b^p}, & \text{当 } p \neq 0, -1 \text{ 时,} \\ \frac{a-b}{\ln(a/b)}, & \text{当 } p = 0 \text{ 时,} \\ \frac{\ln(a/b)}{1/b - 1/a}, & \text{当 } p = -1 \text{ 时.} \end{cases} \quad (2.1)$$

容易证明  $M(a, b, p)$  具有以下性质:

1° 广义平均

$$\min(a, b) \leq M(a, b, p) \leq \max(a, b),$$

等号当且仅当  $a = b$  时成立, 且  $M(a, b, 1) = (a+b)/2 \equiv A$ ,  $M(a, b, -\frac{1}{2}) = \sqrt{ab} \equiv G$ ,  $M(a, b, -2) = 2 / (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \equiv H$  分别为算术平均, 几何平均和调和平均。



2°  $M$  是  $p$  的连续函数, 且对于  $a, b$  任意次可微。

$$M(a, b, 0) = \lim_{p \rightarrow 0} M(a, b, p), \quad M(a, b, -1) = \lim_{p \rightarrow -1} M(a, b, p).$$

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} M(a, b, p) = \min(a, b), \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} M(a, b, p) = \max(a, b).$$

3° 关于参数  $p$  的单调性

$$\frac{\partial M(a, b, p)}{\partial p} \geq 0, \text{ 等号当且仅当 } a = b \text{ 时成立.}$$

4° 对称性

$$M(a, b, p) = M(b, a, p).$$

5° 次线性 对于  $c > 0$ ,

$$M(ca, cb, p) = cM(a, b, p),$$

$$M(a+c, b+c, p) \leq M(a, b, p) + c, \quad p \geq 1,$$

$$M(a+c, b+c, p) \geq M(a, b, p) + c, \quad p \leq 1.$$

文献[3]中提出了一类广泛的非线性数值微分公式,我们仅考虑由广义平均值构成的一种特殊情况,即

$$f'(x_0) \sim \frac{2}{x_1 - x_{-1}} \{M(f_0, f_1, p) - M(f_{-1}, f_0, p)\}, \quad (2.2)$$

这里  $f$  是定义在区间  $[x_{-1}, x_1]$  上的正函数,  $x_0 \in (x_{-1}, x_1)$ ,  $f_{-1}, f_0, f_1$  分别表示  $f(x_{-1}), f(x_0), f(x_1)$ . 若  $p = 1$ , 则 (2.2) 式正是通常的一阶差商公式.  $p$  的变化带来数值微分公式的多样性. 将  $p$  看作可变的参数, 以期达到随解的局部性态选择格式的目的. 设  $x_1 - x_0 = x_0 - x_{-1}$ ,

$$f'(x_0) \sim \frac{1}{x_1 - x_0} \{M(f_0, f_1, p_{\frac{1}{2}}) - M(f_{-1}, f_0, p_{-\frac{1}{2}})\}. \quad (2.3)$$

**引理** 设  $f \in C^4[x_0, x_1]$ , 当  $x \in [x_0, x_1]$  时,  $f(x) > 0$ . 若记  $x_{\frac{1}{2}} = (x_0 + x_1)/2$ , 则有

$$\begin{aligned} M(f(x_0), f(x_1), p) - f(x_{\frac{1}{2}}) &= (x_1 - x_0) \left( \frac{1}{8} f''(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{p-1}{12} \frac{[f'(x)]^2}{f(x)} \right) \Big|_{x=x_{\frac{1}{2}}} + O((x_1 - x_0)^4). \end{aligned}$$

利用此引理以及 Taylor 展式可得出 (2.3) 的误差估计.

**定理** 设  $f \in C^4[x_{-1}, x_1]$ ,  $p \in C^1[x_{-1}, x_1]$ , 当  $x \in [x_{-1}, x_1]$  时,  $f(x) > 0$ . 记  $x_0 = (x_{-1} + x_1)/2$ ,  $x_{\frac{1}{2}} = (x_1 + x_0)/2$ ,  $x_{-\frac{1}{2}} = (x_{-1} + x_0)/2$ , 则有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x_1 - x_0} \{M(f(x_0), f(x_1), p(x_{\frac{1}{2}})) - M(f(x_{-1}), f(x_0), p(x_{-\frac{1}{2}}))\} \\ &= f'(x_0) + \frac{1}{12} (x_1 - x_0)^2 \\ &\quad \frac{d}{dx} \left( 2f''(x) + (p(x) - 1) \frac{[f'(x)]^2}{f(x)} \right) \Big|_{x=x_0} + O((x_1 - x_0)^3). \end{aligned}$$

若假设  $f \in C^3$ , 则高阶余项为  $O((x_1 - x_0)^4)$ .

顺便指出, 若  $a, b < 0$ , 定义  $M(a, b, p) = -M(-a, -b, p)$ , 则引理和定理当  $f(x) < 0$  时也成立.

区别于通常的微分逼近公式,

$$\begin{aligned} \Delta_M f(x) &\equiv \frac{1}{h} \left\{ M \left( f(x), f \left( x + \frac{h}{2} \right), p \left( x + \frac{h}{2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - M \left( f(x-h), f(x), p \left( x - \frac{h}{2} \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

是  $f$  的非线性算子, 但它满足齐次性, 即对于任意常数  $c$ ,  $\Delta_M(cf) = c\Delta_M f$ .

### § 3. 在一维对流-扩散方程上的应用

考虑一维初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \varepsilon > 0, \quad t > 0, \quad x \in (x_l, x_r), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (x_l, x_r), \\ u(x_l, t) = \varphi_1(t), \quad u(x_r, t) = \varphi_2(t), \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

当 Reynolds 数  $\frac{1}{\varepsilon}$  较大时, 此问题有模拟激波现象或边界层现象的大梯度解。通常简单地差分得到的方法, 如中心差分格式, 迎风格式等求解此类问题时在大梯度区域解的精度较差。许多文献从不同的角度研究了 (3.1) 的数值解法 ([1, 5]), 如指数型格式等。我们试图用广义平均值构造差分格式, 使之能按照解函数的不同形态提供适当的离散方式。

设  $\Delta x = (x_r - x_l)/N$ ,  $x_1 = x_l$ ,  $x_j = x_1 + (j-1)\Delta x$ ,  $t_n = n\Delta t$ 。构造 (3.1) 如下形式的差分格式:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \{F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n\} = \varepsilon \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (3.2)$$

记  $u_j^n$  和  $f_j^n$  分别为  $u(x_j, t_n)$  和  $f(u(x_j, t_n))$  的近似。我们取下列二种通量的离散方式:

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = M(f_j^n + c, f_{j+1}^n + c, p_{j+\frac{1}{2}}^n) - c, \quad (3.3)$$

$$F_{j-\frac{1}{2}}^n = f(M(u_j^n + c, u_{j+1}^n + c, p_{j+\frac{1}{2}}^n) - c). \quad (3.4)$$

常数  $c$  的引入为保证广义平均值有意义, 且增加了选取格式的自由度, 以提高精度。称格式 (3.2)、(3.3) 和 (3.2)、(3.4) 分别为 GMS1 和 GMS2。对于线性方程  $f = au$ , GMS1 与 GMS2 是一致的(精确到平移常数)。当  $p = 1$  时, GMS1 就是中心差分格式; 如  $p$  趋向于  $+\infty$  或  $-\infty$ , 它就是迎风格式。

对于 (3.1) 的定常解  $u$ , GMS 的截断误差为

$$E_T = \Delta x \cdot \left\{ \left( G - \frac{1}{24} f_{xx} \right)_{j+\frac{1}{2}} - \left( G - \frac{1}{24} f_{xx} \right)_{j-\frac{1}{2}} \right\} + O(\Delta x^3), \quad (3.5)$$

其中  $G_{j+\frac{1}{2}}^n$  为  $\frac{1}{\Delta x^2} (F_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j+\frac{1}{2}}^n)$  去掉高阶项 ( $O(\Delta x^2)$ ) 后所剩的部分。对于 GMS1,

$$G(x) = \frac{1}{8} f_{xx} + \frac{1}{12} (p-1) \frac{f_x^2}{f+c}, \quad (3.6)$$

对于 GMS2,

$$G(x) = f' \cdot \left( \frac{1}{8} u_{xx} + \frac{1}{12} (p-1) \frac{u_x^2}{u+c} \right). \quad (3.7)$$

任何常数  $p$  使得 GMS 具有二阶逼近精度。通过选取适当的参数  $p$  可以减少截断误差, 或使截断误差主项  $\Delta x^2$  的系数得到与  $\varepsilon$  无关的量的控制。

假设  $f(u) = au$ , 此时 (3.1) 有边界层类型的定常解

$$u(x) = (u_r - u_l) \frac{e^{a(x-x_l)/\varepsilon} - 1}{e^{a(x_r-x_l)/\varepsilon} - 1} + u_l,$$

其中  $u_l$  和  $u_r$  分别为左右边值。当  $a > 0$  时, 在  $x_r$  处有边界层, 而当  $a < 0$  时, 边界层在

$x_i$  处. [3] 中指出  $p = 0$  对应的格式是适合此线性方程的. 事实上, 若取

$$p = 0, c = a[(u_i - u_{i-1})/(e^{a(x_i - x_{i-1})/\varepsilon} - 1) - u_i],$$

则 GMS 1 是严格精确的格式. 若取

$p = 0, c = -au_i(-au_i)$ , 当  $a > 0 (a < 0)$  时, 也可得到很好的逼近效果. 由 (3.5)、(3.6), 此时 GMS 1 的截断误差为 (不仿设  $a > 0$ )

$$E_T = \frac{\Delta x^2}{12} a(u_i - u_i) \left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2 \frac{e^{a(x_i - x_{i-1})/\varepsilon}}{(e^{a(x_i - x_{i-1})/\varepsilon} - 1)(e^{a(x_i - x_{i-1})/\varepsilon} - 1)^2} + O(\Delta x^3).$$

在边界层区域, 即  $x_i$  附近,  $E_T$  的主项系数为  $O(\varepsilon^{-3} e^{-2a(x_i - x_{i-1})/\varepsilon})$ , 它随  $\varepsilon \rightarrow 0$  而趋向于零. 这时中心格式的截断误差主项为  $O(\varepsilon^{-3})$ .

对于线性方程, 只要适当选取常数  $c$ , 令  $p = 0$ , 便可使

$$G - \frac{1}{24} f_{xx} \equiv 0. \quad (3.8)$$

又如, 当  $f(u) = \frac{1}{2} u^2$ , 且 (3.1) 有解  $u(x) = 1 / \left(1 + \frac{1-x}{2\varepsilon}\right)$  时, 易知此时若取  $p = -\frac{1}{2}, c = 0$ , 那么 (3.8) 式成立, 且格式 GMS 1 是精确的. 在一般情况下, 当  $p$  取常数时, (3.8) 无疑是对原方程解的强加条件. 我们将  $p$  看作依赖于  $x$  的参数, 取

$$p(x) = 1 - (f + c) f_{xx} / f_x^2, \quad \text{对 GMS 1}, \quad (3.9)$$

$$p(x) = 1 + (u + c)(f_{xx} - 3f' u_{xx}) / (2f' u_x^2), \quad \text{对 GMS 2}. \quad (3.10)$$

这时因为 (3.8) 成立, 截断误差减小为  $O(\Delta x^4)$ .

对于激波类型的解, 在激波转向点处,  $u_{xx} = 0$ , 因此  $f_x = 0$ , 亦即  $f'(u) = 0$ . 此时 (3.9)、(3.10) 的选取不能使得截断误差减小, 故须对  $F_{i+\frac{1}{2}}^n$  做一些修改. 为使 (3.8) 成立, 将采用下面两种修改方式:

当  $x_{i+\frac{1}{2}}$  为激波转向点时, 取

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = (f_i^n + f_{i+1}^n) / 6 + (2/3)f(u_*), \quad (A)$$

或

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = f\left(\frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} u_i^n + \frac{3 \mp \sqrt{3}}{6} u_{i+1}^n\right). \quad (B)$$

(A) 中的  $u_*$  是激波转向点处解的值, 它是  $f$  的极值点, 可事先求得. 如此修改之后, 可使 GMS 处处三阶. 这时 (B) 要求在转向点处  $f'''(u) = 0$ . 这个条件当通量  $f$  是二次函数或对称凸函数时是成立的, 例如 Burgers 方程. 否则 (B) 为二阶精度.

(3.9) 和 (3.10) 中含有不便于实际计算的二阶导数, 可利用常数解所满足的原方程将其化简, 从而得到如下的近似计算公式:

$$p_{i+\frac{1}{2}}^n = 1 - (f(\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^n) + c) \left( \frac{1}{\varepsilon(u_{i+1}^n - u_i^n)/\varepsilon} + \frac{f''(\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^n)}{[f'(\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^n)]^2} \right), \quad \text{对 GMS 1}, \quad (3.11)$$

$$p_{i+\frac{1}{2}}^n = 1 + (\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^n + c) \left( \frac{f''(u_{i+\frac{1}{2}}^n)}{2f'(\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^n)} - \frac{f'(\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^n)}{\varepsilon(u_{i+1}^n - u_i^n)/\Delta x} \right), \quad \text{对 GMS 2}, \quad (3.12)$$

其中  $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^n = (u_i^n + u_{i+1}^n) / 2$ . 因为  $p_{i+\frac{1}{2}}^n - p(x_{i+\frac{1}{2}}) = O(\Delta x^2)$ , 故 GMS 仍是三阶的.

下面就线性方程  $f = au$  的情况分析 GMS 的稳定性. 对于  $p_{i+\frac{1}{2}}^n$ , 存在  $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \in (0, 1)$ ,

使

$$M(f_i^n + c, f_{i+1}^n + c, p_{i+\frac{1}{2}}^n) - c = (1 - \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n) f_i^n + \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n f_{i+1}^n. \quad (3.13)$$

因此 GMS 可认为是迎风格式与顺风格式混合而成的 (Hybrid Scheme),  $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$  为局部平均参数. 我们采用 [6] 中的稳定性分析方法, 固定参数  $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$  为  $\alpha$ , 将 (3.13) 代入 GMS 中, 由 Fourier 分析方法可得稳定性条件为

$$\frac{1}{2} (ra)^2 \leq s + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) ra \leq \frac{1}{2}, \quad (3.14)$$

其中  $r = \Delta t / \Delta x$ ,  $s = \varepsilon \Delta t / \Delta x^2$ . 记  $R_c = |a| \Delta x / \varepsilon$ , 则中心格式 ( $\alpha = 1$ ) 和迎风格式 ( $\text{sgn}(a)(1 - 2\alpha) = 1$ ) 的稳定性条件分别为

$$|ra| \leq \min(R_c/2, 2/R_c)$$

和

$$|ra| \leq R_c / (R_c + 2).$$

一般当  $(1/2 - \alpha)\text{sgn}(a) \in [0, \delta]$ ,  $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$  时, (3.14) 的充分条件为

$$\begin{cases} |ra| \leq R_c/2(1 + \delta R_c), & \text{当 } R_c \leq 2\delta + 2\sqrt{1 + \delta^2} \text{ 时,} \\ |ra| \leq 2/R_c, & \text{当 } R_c > 2\delta + 2\sqrt{1 + \delta^2} \text{ 时.} \end{cases} \quad (3.15)$$

若  $|1/2 - \alpha| \leq \delta$ ,  $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$ , 则 (3.14) 的一个充分条件为

$$\begin{cases} R_c \leq 1/\delta, \\ |ra| \leq R_c/2(1 + \delta R_c), & \text{当 } R_c \leq 2/\sqrt{1 + 4\delta^2} \text{ 时,} \\ |ra| \leq 2(1 - \delta R_c)/R_c, & \text{当 } R_c > 2/\sqrt{1 + 4\delta^2} \text{ 时.} \end{cases} \quad (3.16)$$

图 1—4 分别是中心格式、迎风格式和 GMS ((3.15)·(3.16)) 稳定性条件的图示, 阴影部

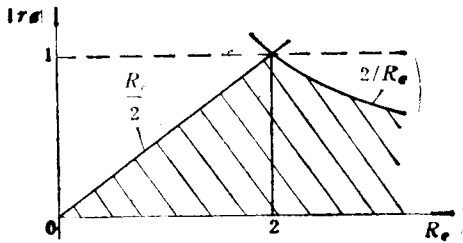


图 1

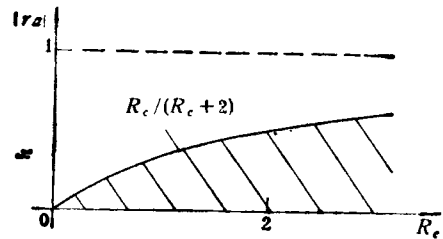


图 2

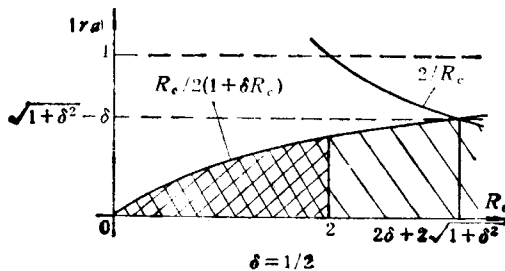


图 3  $\delta = 1/2$

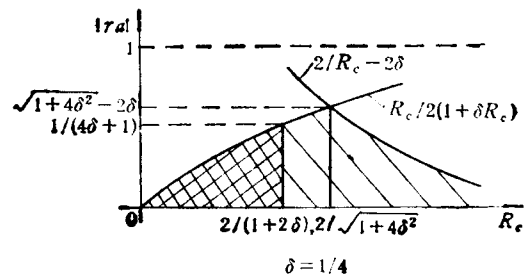


图 4  $\delta = 1/4$

分为稳定性区域。

为分析 GMS 的保单调条件,仍利用 (3.13) 将广义平均值换成加权平均的形式。若记

$$\Delta u_i^n = u_{i+1}^n - u_i^n, a_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \Delta f_i^n / \Delta u_i^n, & \Delta u_i^n \neq 0, \\ f_i^n, & \Delta u_i^n = 0, \end{cases}$$

则对于 GMS 1 有

$$\begin{aligned} \Delta u_i^{n+1} = & \Delta u_{i-1}^n [s + ra_{i-\frac{1}{2}}^n (1 - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^n)] + \Delta u_i^n [1 - 2s - ra_{i+\frac{1}{2}}^n (1 - 2\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n)] \\ & + \Delta u_{i+1}^n [s - ra_{i+\frac{1}{2}}^n \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n]. \end{aligned}$$

若上式右端  $\Delta u_{i-1}^n, \Delta u_i^n, \Delta u_{i+1}^n$  的系数均非负,则当第  $n$  时间层上  $\{u_i^n\}$  单调非增(减)时,第  $n+1$  时间层上  $\{u_i^{n+1}\}$  仍然保持单调非增(减)。重新整理并忽略指标后,得 GMS 1 的保单调的一个充分条件为

$$\frac{1}{2} |ra| \leq s + (1/2 - \alpha)ra \leq \frac{1}{2}. \quad (3.17)$$

中心格式和迎风格式的保单调条件分别为

$$\begin{cases} R_c \leq 2, \\ |ra| \leq R_c/2. \end{cases}$$

和

$$|ra| \leq R_c/(2 + R_c).$$

当  $(\frac{1}{2} - \alpha) \operatorname{sgn}(a) \in [0, \delta]$ ,  $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$  时, (3.17) 的一个充分条件为

$$\begin{cases} R_c \leq 2, \\ |ra| \leq R_c/2(1 + \delta R_c). \end{cases} \quad (3.18)$$

当  $|1/2 - \alpha| \leq \delta$ ,  $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$  时, (3.17) 的一个充分条件为

$$\begin{cases} R_c \leq 2/(1 + 2\delta), \\ |ra| \leq R_c/2(1 + \delta R_c). \end{cases} \quad (3.19)$$

图 3 和图 4 中的双向阴影区域分别表示 (3.18) 和 (3.19)。当格式中  $F_{i+\frac{1}{2}}^n$  为 (A) 或 (B) 的选取时,类似地推导仍可得 (3.17), 只是出现了特定的  $\alpha$  值。例如对于 (A), 出现  $\alpha = \frac{1}{6}$  和  $\alpha = \frac{5}{6}$  的情况。同理, GMS 2 也有类似的保单调条件。

由于可能出现顺风占优势  $((\frac{1}{2} - \alpha) \operatorname{sgn}(a) < 0)$  的情况,因此 GMS 的稳定性和单调性条件较中心格式和迎风格式都严格,即对空间步长  $\Delta x$  和时间步长  $\Delta t$  的限制较严。我们认为,这对于不是高 Reynolds 数的方程(如  $\varepsilon = 10^{-2} \sim 10^{-3}$ ),不是本质问题。因为广义平均值格式是针对大梯度的,仅在狭小的 ( $O(\varepsilon)$ ) 大梯度区域运用。因此较小的  $\Delta x$  不会增加很大的计算量,而且有助于对大梯度区域内解的了解。实际上,数值试验表明,对于同样的  $\Delta x$ , GMS 比指数型格式更精确,甚至比后者在空间步长加密一倍时的结果还好。GMS 1 和 GMS 2 (指分别结合参数取法 (3.11) 和 (3.12),下同)是针对定常解设计的,更适合作校正之用。

现在考虑二维线性问题

$$\begin{cases} u_t + au_x + bu_y = \varepsilon(u_{xx} + u_{yy}), & t > 0, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y, t)|_{(x,y) \in \partial\Omega} = \varphi(x, y), & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

设  $x, y$  方向上的网格尺度分别为  $\Delta x$  和  $\Delta y$ , 构造如下形式的差分格式:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{a}{\Delta x} \Delta_x M(u_{i,j}^n + c_1, u_{i+1,j}^n + c_1, 0) \\ + \frac{b}{\Delta y} \Delta_y M(u_{i,j}^n + c_2, u_{i,j+1}^n + c_2, 0) \\ = \varepsilon \left( \frac{1}{\Delta x^2} \Delta_x \Delta_{+x} u_{i,j}^n + \frac{1}{\Delta y^2} \Delta_y \Delta_{+y} u_{i,j}^n \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

这里  $\Delta_x u_{i,j} = u_{i,j} - u_{i-1,j}$ ,  $\Delta_{+x} u_{i,j} = u_{i+1,j} - u_{i,j}$ ,  $\Delta_y u_{i,j} = u_{i,j} - u_{i,j-1}$ ,  $\Delta_{+y} u_{i,j} = u_{i,j+1} - u_{i,j}$ . 格式 (3.21) 对于问题 (3.20) 的定常解具有二阶逼近度. 我们用一个特殊例子来说明  $\nu = 0$  时的广义平均值格式对于问题 (3.20) 的某些大梯度解是适合的.

若  $a = b = 1$ , 且边界条件适当, (3.20) 具有定常解

$$u(x, y) = (e^{(x+y)/\varepsilon} - 1) / (e^{1/\varepsilon} - 1).$$

它在沿  $y = x + \text{const.}$  的方向上有大梯度, 当格式 (3.21) 中的常数  $c_1, c_2$  均取为零时, 截断误差的主项系数为  $O(\varepsilon^{-3} e^{-2/\varepsilon})$ . 因此主项系数可受到与  $\varepsilon$  无关的量的控制, 从而对于高 Reynolds 数的情形, 格式的二阶逼近具有真实性.

#### § 4. 数值试验

问题 1. (3.1) 中  $f(u) = \frac{1}{2} u^2$ ,  $x \in (-10\varepsilon, 10\varepsilon)$ ,  
 $\varphi_1(t) = (e^{10} - 1) / (e^{10} + 1) = -\varphi_2(t)$ ,

其解为

$$u(x) = -(e^{x/\varepsilon} - 1) / (e^{x/\varepsilon} + 1).$$

问题 2. (3.1) 中  $f(u) = \frac{1}{2} u'$ ,  $x \in (1 - 20\varepsilon, 1)$ ,  
 $\varphi_1(t) = 1/11$ ,  $\varphi_2(t) = 1$ ,

其解为

$$u(x) = 1 / \left( 1 + \frac{1-x}{2\varepsilon} \right).$$

问题 3. (3.1) 中  $f(u) = \frac{2}{3} u^3 - u$ ,  $x \in (-10\varepsilon, 10\varepsilon)$ ,  
 $\varphi_1(t) = 9 / (2 + e^{-5})^2$ ,  $\varphi_2(t) = 9 / (2 + e^5)^2$ ,

其解为

$$u(x) = 9 / (2 + e^{x/2\varepsilon})^2.$$

问题 4. (3.20) 中  $a = b = 1$ ,  $(x, y) \in (0, 0.2) \times (0, 0.2)$ ,



$$\begin{aligned}
 u(0, y, t) &= (e^{y/\epsilon} - 1)/(e^{0.4/\epsilon} - 1), \\
 u(0.2, y, t) &= (e^{(0.2+y)/\epsilon} - 1)/(e^{0.4/\epsilon} - 1), \\
 u(x, 0, t) &= (e^{x/\epsilon} - 1)/(e^{0.4/\epsilon} - 1), \\
 u(x, 0.2, t) &= (e^{(x+0.2)/\epsilon} - 1)/(e^{0.4/\epsilon} - 1),
 \end{aligned}$$

其解为

$$u(x) = (e^{x+v/\epsilon} - 1)/(e^{0.4/\epsilon} - 1).$$

问题 5. (3.20) 中  $a = 1, b = 0, (x, y) \in (0, 0.2) \times (0, 0.2)$ ,

$$u(0, y, t) = 0, u(0.2, y, t) = 1,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 0.2, t) = 5x.$$

计算结果图表中记号的意义如下:

$J$  为节点序号, 表第  $J$  个点,  $x_1 = x_1, x_j = x_1 + (j-1)\Delta x$ , CS 为中心格式, A-S 为 Allen-Southwell 的指数型格式<sup>[5]</sup>. (A) 指 GMS 结合通量修改 (A), (B1) 和 (B2) 指 GMS 分别结合 (B) 的二种选取. E. S. 为精确解.

表 1  $R_c = 2.0$

$J$	3	4	5	6	7	8	9
CS	0.9998	0.9818	0.7319	-0.0000	-0.7319	-0.9818	-0.9998
A-S	0.9964	0.9735	0.8135	-0.0000	-0.8135	-0.9735	-0.9964
GMS 1	0.9951	0.9647	0.7624	-0.0000	-0.7624	-0.9647	-0.9951
GMS 2	0.9951	0.9646	0.7618	-0.0008	-0.7619	-0.9646	-0.9950
E. S.	0.9951	0.9640	0.7616	0.0000	-0.7616	-0.9640	-0.9951

表 2  $R_c = 2.0$

$J$	5	6	7	8	9	10	11
CS	0.1354	0.1555	0.1830	0.2234	0.2887	0.4152	1.0000
A-S	0.1448	0.1696	0.2042	0.2563	0.3432	0.5158	1.0000
GMS 1	0.1431	0.1670	0.2004	0.2504	0.3339	0.5010	1.0000
GMS 2	0.1433	0.1673	0.2008	0.2512	0.3353	0.5039	1.0000
E. S.	0.1429	0.1667	0.2000	0.2500	0.3333	0.5000	1.0000

表 3  $R_c = 2.0$

$J$	4	5	6	7	8
CS	.1953E + 1	.1560E + 1	.9671E + 1	.4028E + 0	.0955E + 0
A-S	.1990E + 1	.1629E + 1	.1002E + 1	.3735E + 0	.0843E + 0
GMS 1	.1974E + 1	.1604E + 1	.1001E + 1	.4056E + 0	.1018E + 0
GMS 2	.1974E + 1	.1605E + 1	.1000E + 1	.4053E + 0	.1017E + 0
E. S.	.1974E + 1	.1605E + 1	.1000E + 1	.4043E + 0	.1021E + 0

以上三个表中 CS, A-S, 和 GMS 的  $\Delta t/\Delta x$  分别为 1, 0.5, 0.5. GMS 1 和 GMS 2 中的常数  $c$  分别为 0.5 和 10.0 (下同). 定常解标准为  $\max \left| \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \right| \leq 0.001$  (下同).

表 1, 2, 3 分别是当  $\epsilon = 0.01$  时对问题 1, 2, 3 的计算结果. 这几种情况均表明 GMS

较中心格式和指数型格式精度有明显提高,且 GMS 对激波类型及边界层类型的求解问题均可处理,也适合于多种通量的方程。

表 4  $R_c = 20/11 \Delta t/\Delta x = 0.55$ 

J	E. S.	A-S	GMS1			GMS2		
			(A)	(B1)	(B2)	(A)	(B1)	(B2)
4	0.9790	0.9845	0.9795	0.9795	0.9795	0.9793	0.9793	0.9793
5	0.8772	0.9069	0.8796	0.8796	0.8796	0.8789	0.8790	0.8789
6	0.4256	0.5036	0.4266	0.4266	0.4266	0.4262	0.4263	0.4261
7	-0.4256	-0.5036	-0.4267	-0.4267	-0.4267	-0.4271	-0.4272	-0.4270
8	-0.8772	-0.9069	-0.8796	-0.8796	-0.8796	-0.8790	-0.8790	-0.8790
9	-0.9790	-0.9845	-0.9795	-0.9795	-0.9795	-0.9793	-0.9793	-0.9793

表 5  $R_c = 20/11 \Delta t/\Delta x = 0.55$ 

J	E. S.	A-S	GMS1			GMS2		
			(A)	(B1)	(B2)	(A)	(B1)	(B2)
4	2.0349	2.0458	2.0350	2.0350	2.0350	2.0350	2.0350	2.0350
5	1.7688	1.7874	1.7688	1.7688	1.7687	1.7688	1.7689	1.7688
6	1.2965	1.3106	1.2967	1.2967	1.2966	1.2967	1.2969	1.2966
7	0.7046	0.6901	0.7043	0.7041	0.7044	0.7043	0.7042	0.7044
8	0.0657	0.9551	0.0654	0.0653	0.0654	0.0654	0.0654	0.0654
9	0.0132	0.0106	0.0131	0.0131	0.0131	0.0132	0.0133	0.0132

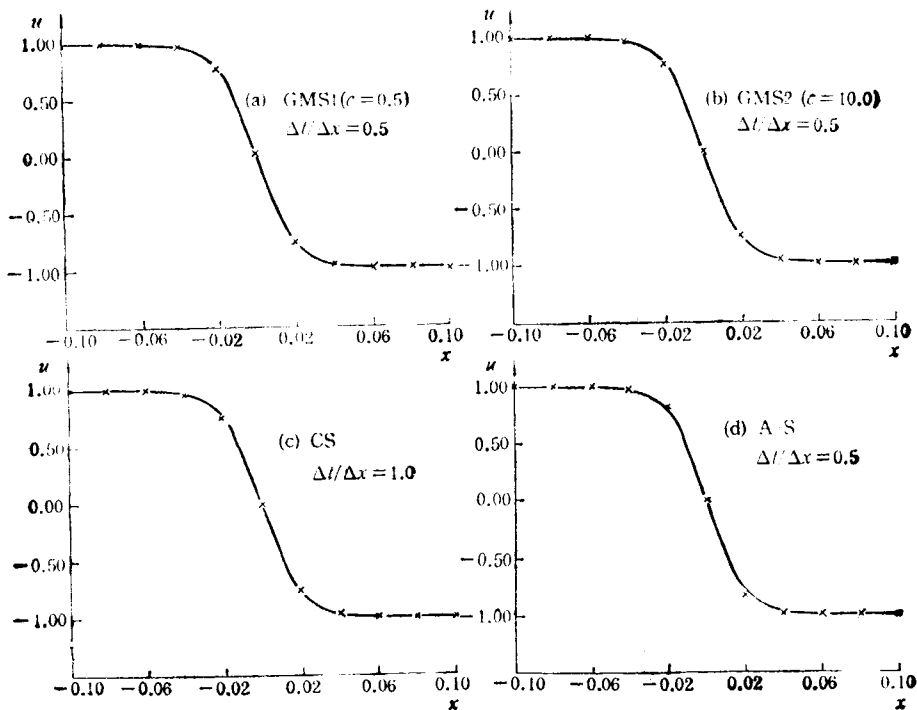
图 5 (问题 1)  $s = 0.001, R_c = 2$

表 4,5 是为检验 (A)、(B) 分别对问题 1 和问题 3 的计算结果。此时激波转向点处于  $x_6$  和  $x_7$  中间,因此  $f'(u(x_{6+\frac{1}{2}})) = 0$ 。结果表明 (A)、(B) 两种对通量离散的修正办法是有效的。

表 6  $R_c = 2, \Delta t/\Delta x = 1.0, 5$   $R_c = 1, \Delta t/\Delta x = 0.5, 0.4$

$J(2J-1)$	CS	GMS1	GMS1	GMS2	GMS2	CS	A-S
4	0.9818	0.9711	0.9649	0.9711	0.9648	0.9673	0.9667
5	0.7319	0.7567	0.7628	0.9566	0.7624	0.7557	0.7750
6	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0002	-0.0004	-0.0000	-0.0000
7	-0.7319	-0.7567	-0.7628	-0.7565	-0.7622	-0.7557	-0.7750
8	-0.9818	-0.9711	-0.9649	-0.9710	-0.9647	-0.9673	-0.9667
N	13	1	14	1	13	61	80

注: N 为从初值出发的推进步数。

表 7  $R_c = 2, \Delta t/\Delta x = 0.2$

J	1	2	3	4	5
CS	(u) 0.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
	(v) 0.0000	-0.9999	-0.9999	-0.9999	-0.9999
GMS	(u) 0.0000	0.8646	0.9816	0.9999	0.9999
	(v) 0.0000	-0.8646	-0.9816	-0.9999	-0.9999
E. S.	(u) 0.0000	0.8647	0.9817	0.9975	0.9996
	(v) 0.0000	-0.8647	-0.9817	-0.9975	-0.9996

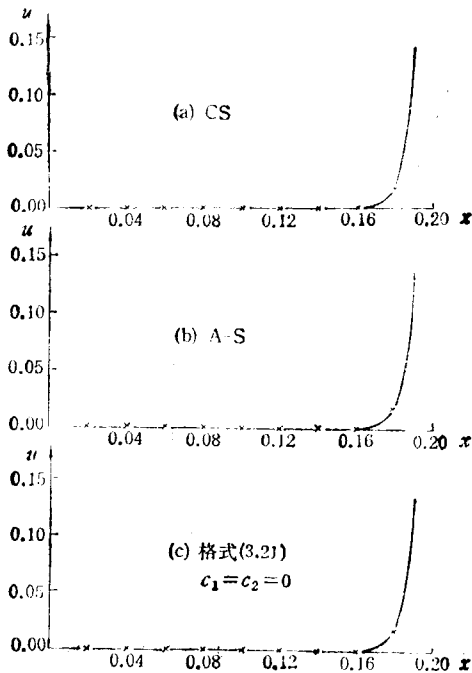


图 6 (问题 4)  $\epsilon = 0.01, \Delta x = \Delta y = 0.02, \Delta t/\Delta x = 0.25, y = x$

表 6 表明了 GMS 作为校正之用的有效性。对问题 1, 当  $\varepsilon = 0.01$  时, 用中心格式从边值的线性插值出发推进 13 步得到近似定常解, 以此为初值, GMS 1 和 GMS 2 分别推进 14 步和 13 步便得精度很好的定常解。网格加密一倍后, 从边值的线性插值出发, 中心格式和指数型格式分别推进 61 步和 80 步得到的近似解仍不如加密之前 GMS 的结果, 仅与它们推进 1 步的结果相当。此例表明虽然在大梯度区域引入了非线性格式, 增加了局部计算量, 但从整体上看, 计算量不但可能不增加, 相反会减少。

图 6 为对问题 4 当  $\varepsilon = 0.01$  时的试算结果, 表明当常数  $c_1 = c_2 = 0$  时,  $p = 0$  的 GMS 格式 (3.21) 所得近似解与真解符合的很好, 与指数型格式相当。

图 7 是对问题 5 分别用  $c_1 = 0$  时的格式 (3.21) 和指数型格式试算的结果。在大梯度区域, 指数型格式的解变化稍慢一些。

对方程组情况, 我们用  $p = 0$  的 GMS 格式试算了下面的简单问题:

$$\begin{cases} u_t + 3u_x + 4v_x = \varepsilon u_{xx}, \\ v_t - 2u_x - 3v_x = \varepsilon v_{xx}, \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, \\ v(0, t) = 0, v(1, t) = -1. \end{cases}$$

结果列于表 7 中。

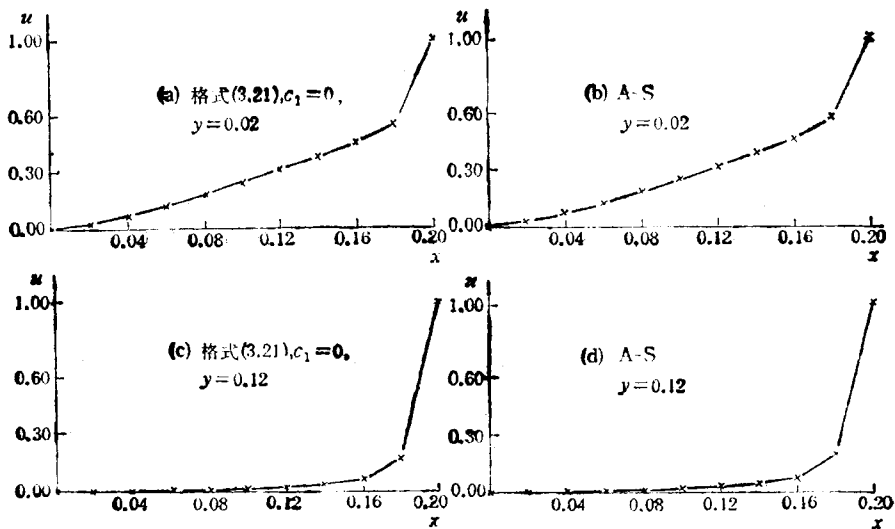


图 7 (问题 5)  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0.02$ ,  $\Delta t / \Delta x = 0.25$

### 参 考 文 献

- [1] R. Peyret, T. D. Taylor, Computational Methods for Fluids Flow, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [2] Sun Jiachang, Generalizations of the Mean Values and Their Inequalities, Chin. Ann. of Math., 4B (4) 1983, pp. 493—500.
- [3] Sun Jiachang, Semi-Linear Difference Schemes, J. of Comp. Math., 2: 2(1984), pp. 93—111.
- [4] Sun Jiachang, Ken Jackson, Nonlinear Implicit One-Step Schemes for Solving Initial Value Problems for Ordinary Differential Equations with Steep Gradients, J. of Comp. Math., 1: 3(1983), pp. 264—281.
- [5] G. Allen, R. V. Southwell, Relaxations Methods Applied to Determine the Motion in Two Dimensions, of a Viscous Fluid Part a Fixed Cylinder, Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. 8(1955), pp. 129—145.
- [6] A. Harten, The Artificial Compression Method for Computation of Shocks and Contact Discontinuities: III Self-adjusting Hybrid Schemes, Math. Comp., 32: 142(1978), pp. 363—389.