广义系统能控性和 R-能控性的稳定计算[1)*]

储德林　蔡大用
(清　华　大　学)

STABLE COMPUTATION FOR CONTROLLABILITY AND R-CONTROLLABILITY RELATED TO GENERALIZED SYSTEMS

Chu De-lin　Cai Da-yong
(Tsinghua University)

Abstract

In this paper, the problems of computing controllability and R-Controllability for generalized systems are considered, and a stable algorithm is given. The theoretical analysis and numerical example show that this algorithm is very effective in computing controllability and R-Controllability for generalized systems.

§1. 引　言

考虑如下的线性定常广义系统 $\langle A,B;E\rangle$:

$$E\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

式中 E, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, E 奇异,并且 $\langle A,E\rangle$ 正则. 由于广义系统和正常系统有着本质的区别,并且广义系统反映了存在于现实世界中的一类带有普遍意义的现象,因此引起了人们的广泛兴趣,进行了大量的研究,在理论方面取得了许多成果.

尽管广义系统(1)的可控性在理论方面已得到比较完善的研究,但从数值计算的观点来看对系统(1)可控性的研究还需做大量的工作. 以往人们常常将系统(1)化成快和慢子系统的耦合形式,而后判别其可控性. 但这种化法是数值不稳定的,因此须发展新的数值算法. 考虑到计算误差的不可避免性,系统的病态性,因此发展数值稳定的计算方法是至关重要的.

本文共分四节,第二节理论分析;第三节稳定算法;第四节数例. 在本文中,我们着重于数学描述,较少涉及物理描述.

---

1) 国家自然科学基金资助项目.
* 1989 年 12 月 13 日收到.

§2. 理论分析

本文主要讨论系统(1)的 R-能控性和能控性. 下面我们给出有关定义. 定义来源于[1,2].

定义 1. 系统 (1) R-能控. 若

$$\mathrm{rank}[sE-A,B]=n,\ \forall s\in\mathbb{C},\ s \text{ 有限}.$$

定义 2. 系统(1)能控,若

$$\mathrm{rank}[sE-A,B]=n,\ \forall s\in\mathbb{C},\ s \text{ 有限},且\ \mathrm{rank}[E,B]=n.$$

当 $E=I$ 时,广义系统(1)退化为正常系统,相应的定义 1,定义 2 变为正常系统可控性的定义. 由于正常系统可控性仍有待进一步研究[3],因此研究系统 (1) 的可控性是有意义的.

若我们给出了系统 (1) R-能控性的稳定算法,则相应地就能给出广义系统(1)可控性的稳定算法. 基于此,我们着重研究广义系统(1)的 R-能控性.

记 $B=(\tilde{b}_1,B_{12})$ 因为若 $\tilde{b}_1=0$, 则可将 $B\Leftarrow B_{12}$. 这不影响我们的结论, 因此在本节和 §3 仅考虑 $\tilde{b}_1\neq 0$ 的情形. 若 $\tilde{b}_1\neq 0$, 则存在一稳定正交变换 (如平面旋转 Householder 变换) $P_1^{(1)}$ 使得

$$P_1^{(1)}\tilde{b}_1=\begin{bmatrix} b_{11}\\ 0\end{bmatrix},\ b_{11}\in\mathbb{R},b_{11}\neq 0.$$

记 $P_1^{(1)}A=A^{(1)}$, $P_1^{(1)}E=E^{(1)}$, 对 $E^{(1)}$ 做 RQ 分解

$$E^{(1)}Q^{(1)}=R^{(1)},$$

这里 $Q^{(1)}$ 为正交矩阵, $R^{(1)}$ 为上三角矩阵. 让

$$A^{(1)}Q^{(1)}=\begin{bmatrix} a_{11} & A_{12}^{(1)}\\ a_{12}^{(1)} & A_{22}^{(1)}\end{bmatrix},$$

若 $a_{12}^{(1)}\neq 0$, 则存在一稳定的正交变换 $\tilde{P}_1^{(2)}\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, 使

$$\tilde{P}_1^{(2)}a^{(1)}=\begin{bmatrix} a_{21}\\ 0\end{bmatrix},\ a_{21}\in\mathbb{R},a_{21}\neq 0.$$

记

$$P_1^{(2)}=\mathrm{diag}\langle 1,\ \tilde{P}_1^{(2)}\rangle\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

则有

$$P_1^{(2)}P_1^{(1)}AQ^{(1)}=\begin{bmatrix} a_{11} & A_{12}^{(2)}\\ a_{21} & \\ 0 & A_{22}^{(2)}\end{bmatrix},P_1^{(2)}P_1^{(1)}EQ^{(1)}=\begin{bmatrix} \nu_{11} & *\\ 0 & E_{22}^{(2)}\end{bmatrix},$$

$E_{22}^{(2)}\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, $P_1^{(2)}P_1^{(1)}\tilde{b}_1=P_1^{(1)}\tilde{b}_1$.

我们继续对 $E_{22}^{(2)}$ 做 RQ 分解

$E_{22}^{(2)}\tilde{Q}^{(2)}=R^{(2)}$, $\tilde{Q}^{(2)}$ 为正交的, $R^{(2)}$ 为上三角的. 让 $Q^{(2)}=\mathrm{diag}\langle 1,\ \tilde{Q}^{(2)}\rangle\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 则

$$P_1^{(2)}P_1^{(1)}AQ^{(1)}Q^{(2)}=\begin{bmatrix} a_{11} & A_{12}^{(3)} \\ a_{21} & \\ 0 & A_{22}^{(3)} \end{bmatrix},$$

$$P_1^{(2)}P_1^{(1)}EQ^{(1)}Q^{(2)}=\begin{bmatrix} v_{11} & * \\ 0 & E_{22}^{(3)} \end{bmatrix},$$

式中 $E_{22}^{(3)}$ 为上三角阵.

如果 $A_{22}^{(3)}$ 中第一列向量非零，则继续对 $A_{22}^{(3)}$，$E_{22}^{(3)}$ 采用上述过程使得 $A_{22}^{(3)}$ 第一列仅有第一个非零元，而 $E_{22}^{(3)}$ 仍为上三角阵. 由此我们可以得到:

定理 1. 给定广义系统 (1)，则存在稳定的正交变换 P，$Q\in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和置换阵 $W\in \mathbb{R}^{m\times m}$，使得

$$PAQ=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},\quad PEQ=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ 0 & E_{22} \end{bmatrix},\quad PBW=\begin{bmatrix} b_1 & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中 $A_{11}\in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$，$E_{11}\in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$，$b_1\in \mathbb{R}^{n_1}$，$E_{11}$，$E_{22}$ 为上三角阵，b_1 仅第一个元素非零，A_{11} 为对角线下次对角元全不为零的上 Hessenberg 矩阵.

定理 2. 给定广义系统(1)，且延用定理 1 的记号，则系统 (1) R-能控当且仅当

$$\operatorname{rank}(sE_{22}-A_{22},B_{22})=n-n_1,\quad s\in \mathbb{C},\ s\ 有限.$$

证明. 广义系统 (1) R-能控当且仅当

$$\operatorname{rank}(sE-A,B)=n,\quad \forall s\in \mathbb{C},\ s\ 有限,$$

亦即

$$\operatorname{rank}(sPEQ-PAQ,PBW)=n,\quad \forall s\in \mathbb{C},\ s\ 有限.$$

但

$$\operatorname{rank}(sPEQ-PAQ,\ PBW)=\operatorname{rank}(sE_{11}-A_{11},b_1)+\operatorname{rank}(sE_{22}-A_{22},B_{22}).$$

因为 $\operatorname{rank}(sE_{11}-A_{11},\ b_1)=n_1$，$\forall s\in \mathbb{C}$，$s$ 有限，所以 $\operatorname{rank}(sPEQ-PAQ,\ PBW)=n_1+\operatorname{rank}(sE_{22}-A_{22};B_{22})$. 由此我们得出，广义系统 (1) R-能控当且仅当$\operatorname{rank}(sE_{22}-A_{22},B_{22})=n-n_1$，$\forall s\in \mathbb{C}$，$s$ 有限. 证毕.

定理 2 说明判别系统(1)的 R-能控性，只需判别系统 $\langle A_{22},B_{22};E_{22}\rangle$ 的 R-能控性.

定理 3. 给定系统(1)，记号延用定理 1，则:

I) 若 $B_{22}=0$，A_{22} 维数大于零，则广义系统 (1) R-能控当且仅当 $\operatorname{rank}(sE_{22}-A_{22})=n-n_1$，$\forall s\in \mathbb{C}$.

II) 若 $A_{22}=0$，B_{22} 列数大于零，则广义系统 (1) R-能控当且仅当 $\operatorname{rank}B_{22}=n-n_1$.

III) 若 $n_1=n$，则广义系统 (1) R-能控.

IV) 若 B_{22} 列数为零，但 A_{22} 维数非零，则广义系统 (1) R-能控当且仅当 $\operatorname{rank}(sE_{22}-A_{22})=n-n_1$，$\forall s\in \mathbb{C}$.

当然若 $n_1\neq n$，$A_{22}\neq 0$，$B_{22}\neq 0$，可以对 $(A_{22},\ B_{22};\ E_{22})$ 施以正交变换，然后利用定理 3 来计算系统(1)的 R-能控性.

我们对定理 3 做进一步评注.

i) 若出现情形 II)，则可以用 SVD (奇异值分解)来计算 B_{22} 的秩，以便应用定理

3 来判别广义系统(1)的 R-能控性.

ii) 若出现情形 I),IV), 则由[7,8]存在正交阵 $\tilde{Q},\tilde{Z}$ 使得 $\tilde{Q}E_{22}\tilde{Z}$, $\tilde{Q}A_{22}\tilde{Z}$ 均为上三角阵. 因为

$$\mathrm{rank}(sE_{22}-A_{22})=n-n_1,\ \forall s\in\mathrm{C},\ s\text{ 有限}.$$

当且仅当 A_{22} 非奇异,且 $\tilde{Q}E_{22}\tilde{Z}$ 的对角元全为零. 从而有: 在情形 I), IV),广义系统(1) R-能控当且仅当 $\tilde{Q}E_{22}\tilde{Z}$ 的对角元全为零, $\tilde{Q}A_{22}\tilde{Z}$ 的对角元全不为零. 上式中的 $\tilde{Q},\tilde{Z}$ 可用[8]中标准软件 QZ 算法和[9]中标准软件 EXCHQZ 求得.

在情形 I)、IV), 广义系统 (1) R-能控当且仅当 A_{22} 非奇异,并且 $\langle A_{22},E_{22}\rangle$ 没有有限广义特征值. 用 QZ 算法求 $\langle A_{22}, E_{22}\rangle$ 广义特征值不仅计算量很大而且当 A_{22} 的维数越低时 QZ 算法才越有效. 可见提出一种判别 $\langle A_{22},E_{22}\rangle$ 是否存在有限广义特征值的稳定方法比用 QZ 算法计算 $\langle A_{22}, E_{22}\rangle$ 的广义特征值再判别 $\langle A_{22}, E_{22}\rangle$ 是否存在广义特征值(有限)更有意义.

Van Dooren[10] 证明了对任意正则对 $\langle C,D\rangle$ 可以通过酉变换 P_C,P_D 使得

$$P_C(C-sD)P_D=\begin{bmatrix} C_r-sD_r & * & * & * \\ & C_f-sD_f & * & * \\ & & C_i-sD_i & * \\ & & & C_l-sD_l \end{bmatrix},\tag{3}$$

其中 $\langle C_r,D_r\rangle$, $\langle C_i,D_i\rangle$, $\langle C_l,D_l\rangle$ 不含 $\langle C,D\rangle$ 的有限广义特征值. 而 C_f,D_f 均为方阵. $\langle C_f,D_f\rangle$ 仅有有限广义特征值,且为 $\langle C, D\rangle$ 的有限广义特征值. 基于线性系统的传递矩阵, Van Dooren[10] 给出了一种推导 $\langle C_f, D_f\rangle$ 的稳定算法 ZEROS. 我们推广[10]的思想用之于情形 I)、IV). 若记条件(*)为

$$\text{方阵 } sE_{22}-A_{22}\text{ 满秩},\ \forall s\in\mathrm{C},\ s\text{ 有限}.\tag{*}$$

我们推广[10]的思想检验(*)是否成立以期判别广义系统 (1) 的 R-能控性. 下面分几步讨论.

第一步. 对 E_{22} 做奇异值分解

$$E_{22}=U_1\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V_1,\ \Sigma=\mathrm{diag}\ \langle\sigma_1,\cdots,\sigma_k\rangle,\sigma_i>0.$$

若 E_{22} 非奇异,则(*)不成立. 广义系统(1)非 R-能控. 否则做:

第二步. 计算 A_{22} 的秩. 若 A_{22} 奇异,则(*)不成立. 广义系统(1)非 R-能控. 若 A_{22} 非奇异, $E_{22}=0$, 则广义系统 (1) R-能控. 否则做:

第三步. 记

$$U_1^TA_{22}V_1^T=\begin{bmatrix}\bar{A} & -\bar{B}\\ \bar{C} & -\bar{D}\end{bmatrix},\ \bar{A}\in\mathrm{R}^{k\times k},\text{ 若 } k=0,\text{ 记 }-\bar{D}=A_{22}.$$

由于

$$\mathrm{rank}(sE_{22}-A_{22})=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}s\Sigma-\bar{A} & \bar{B}\\ -\bar{C} & \bar{D}\end{bmatrix},$$

此时广义系统 (1) R-能控当且仅当

$$\begin{bmatrix} s\Sigma-\bar{A} & \bar{B} \\ -\bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \text{满秩}, \ \forall s\in\mathbb{C}, \ s \text{ 有限}. \tag{**}$$

计算正交阵 U_2，使得

$$U_2^T\bar{D}=\begin{bmatrix}\hat{D}\\0\end{bmatrix}\begin{matrix}>\sigma\\>\tau\end{matrix}, \ \hat{D}\text{ 行满秩}.$$

当 $\tau=0$ 时，方阵 $\bar{D}$ 非奇异，此时(**)不成立．广义系统(1)非 R-能控．但若 $\tau\neq 0$，则记

$$U_2^T[\bar{C}\ \bar{D}]=\begin{bmatrix}\hat{C} & \hat{D}\\ \tilde{C} & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}>\sigma\\>\tau\end{matrix}, \ \text{若 } \sigma=0, \text{ 记 } \tilde{C}=\bar{C}. \tag{4}$$

由于 A_{22} 非奇异，$[\bar{C},\ \bar{D}]$ 行满秩且由 $\hat{D}$ 行满秩，有

$$\operatorname{rank}[\bar{C}\ \bar{D}]=\operatorname{rank}\hat{D}+\operatorname{rank}\tilde{C}=\sigma+\operatorname{rank}\tilde{C},$$

$$\operatorname{rank}[\bar{C}\ \bar{D}]=\sigma+\tau,$$

故

$$\operatorname{rank}\tilde{C}=\tau. \tag{5}$$

进而若 $\tau=k$，则 $\tilde{C}$ 为可逆方阵．考虑到

$$\begin{bmatrix}I & \\ & U_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\Sigma-\bar{A} & \bar{B}\\ -\bar{C} & \bar{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\Sigma-\bar{A} & \bar{B}\\ \hat{C} & \hat{D}\\ \tilde{C} & 0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}I & \\ & U_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{B}\\ \bar{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{B}\\ \hat{D}\\ 0\end{bmatrix},$$

A_{22} 可逆，亦有 $\begin{bmatrix}\bar{B}\\ \hat{D}\end{bmatrix}$ 列满秩．从而 $\forall\ \lambda\in\mathbb{C}$，$\lambda$ 有限，即

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda\Sigma-\bar{A} & \bar{B}\\ -\bar{C} & \bar{D}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\tilde{C}+\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\bar{B}\\ \hat{D}\end{bmatrix}=m,$$

亦即(**)成立，广义系统(1) R-能控．如果 $0<\tau<k$ 则继续下步．

第四步．计算正交阵 V_2 使得 $\tilde{C}V_2=[\,0\ W\,]$，W 为 τ 阶非异阵(见(4)、(5))，记 $\hat{C}V_2=[C_{11}\ \ C_{12}]$，$C_{11}$ 列数为 $k-\tau$，$V_2^T\Sigma V_2=[E_{33}\ \ E_{34}]$，$V_2^T\bar{A}V_2=[A_{33}\ \ A_{34}]$，$E_{33}$，$A_{33}$ 列数为 $k-\tau$，则

$$\begin{bmatrix}V_2^T & \\ & U_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\Sigma-\bar{A} & \bar{B}\\ -\bar{C} & \bar{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_2 & \\ & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda E_{33}-A_{33} & \lambda E_{34}-A_{34} & V_2^T\bar{B}\\ -C_{11} & -C_{12} & \hat{D}\\ 0 & W & 0\end{bmatrix}. \tag{6}$$

由(6)和 W 非异知(**)成立．当且仅当方阵

$$\begin{bmatrix}\lambda E_{33}-A_{33} & V_2^T\bar{B}\\ -C_{11} & \hat{D}\end{bmatrix}$$

满秩，$\forall\lambda\in\mathbb{C}$，$\lambda$ 有限，置

$$\begin{bmatrix}E_{33} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow E_{22}, \quad \begin{bmatrix}A_{33} & -V_2^T\bar{B}\\ C_{11} & -\hat{D}\end{bmatrix}\Rightarrow A_{22},$$

则即可重步一至步四以判别广义系统(1)的 R-能控性．

注. 由(6)和 A_{22} 非异，知 $\begin{bmatrix} A_{33} & -V_2^T\bar{B} \\ C_{11} & -\hat{D} \end{bmatrix}$ 非异. 因此在重复第二步时不再需要计算 A_{22} 的秩.

利用上述过程,我们能非常稳定地判别在情形 I)、IV) 时广义系统 (1) 的 R-能控性. 在 § 3 我们根据上述步骤,提出了算法(一).

在 § 3 中，我们根据定理 1,定理 2 以及定理 3 和定理 3 的评注提出了计算广义系统(1)的 R-能控性的稳定算法——算法(二)和计算广义系统 (1) 的能控性的稳定算法——算法(三). 我们的算法具有数值稳定的特性,不需用 QZ 分解,只须用稳定的正交变换来实现.

§ 3. 稳 定 算 法

在本节,我们描述求解广义系统(1)能控性和R-能控性的稳定算法.

首先我们叙述算法(一).

算法(一). 判别(*)是否成立.

步 1. 计算 A_{22} 秩,若 A_{22} 奇异,则(*)不成立,停止计算. 否则转步 2.

步 2. 对 E_{22} 做奇异值分解.

$E_{22}=U_1\begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V_1$, $\Sigma\in\mathbb{R}^{k\times k}$,$\Sigma$ 为非异对角阵,若 E_{22} 非异,则(*)不成立,停止计算. 若 $E_{22}=0$, 则(*)成立,停止计算. 若 $E_{22}\neq 0$, E_{22} 奇异,则转步 3.

步 3. 计算 $U_1^TA_{22}V_1^T$, 记

$$U_1^TA_{22}V_1^T=\begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{C} & -\bar{D} \end{bmatrix},\ \bar{A}\in\mathbb{R}^{k\times k}.$$

计算正交阵 U_2 使得 $U_2^T\bar{D}=\begin{bmatrix} \hat{D} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \}\sigma \\ \}\tau \end{matrix}$, $\hat{D}$ 行满秩. 若 $\tau=0$, 则(*)不成立. 若 $\tau=k$,则(*)成立,停止计算. 若 $0<\tau<k$,记 $U_2^T\bar{C}=\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \tilde{C} \end{bmatrix}\begin{matrix} \}\sigma \\ \}\tau \end{matrix}$. 若 $\sigma=0$, 记 $\tilde{C}=\bar{C}$, 转步 4.

步 4. 计算正交阵 V_2 使 $\tilde{C}V_2=[0\ \ W]$, W 非异. 记 $\hat{C}V_2=[C_{11}\ \ C_{12}]$, $V_2^T\Sigma V_2=[E_{33}, E_{34}]$, $V_2^T\bar{A}V_2=[A_{33}\ \ A_{34}]$,其中 C_{11}, E_{33}, A_{33} 列数均为 $k-\tau$. 置 $\begin{bmatrix} E_{33} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow E_{22}$, $\begin{bmatrix} A_{33} & -V_2^TB \\ C_{11} & -\hat{D} \end{bmatrix}\Rightarrow A_{22}$, 转步 2.

紧接着我们描述算法(二).

算法(二). R-能控性的计算.

在本算法中,有关符号的含义见定理 3.

步 1. 若 $n_1=n$, 则 (1) R 能控,停止计算. 否则转步 2.

步 2. 若 $A_{22}=0$（A_{22} 为零矩阵或阶为 0），则计算 $\operatorname{rank}B_{22}$. 若 $\operatorname{rank}B_{22}=n-n_1$，则 R-能控. 否则非 R-能控，停止计算. 若 $A_{22}\neq 0$，转步 3.

步 3. 若 $B_{22}\neq 0$，对 (A_{22},B_{22},E_{22}) 作正交变换，重复步 1 至步 3 的讨论. 否则转步 4.

步 4.（此时 $A_{22}\neq 0, B_{22}=0$）检查条件(*). 若条件(*)成立，则 R-能控. 否则非 R-能控.

下面我们再给出系统(1)能控的判别算法.

算法(三).

步 1. 利用算法(二)判别系统(1)的 R-能控性. 若系统(1)非 R-能控，则系统(1)不能控，停止计算. 否则转步 2.

步 2. 计算 $\operatorname{rank}(E\ \ B)$. 若 $\operatorname{rank}(E\ \ B)=n$，则系统(1)能控，否则不能控.

因为在算法(二)、算法(三)中，仅要 $4n^2$ 存贮单元，由此可见仅需附加 n^2 单元，进而算法具有节省内存的优点.

我们的算法是数值稳定的，这是本文算法优于以往算法的主要特征之一.

由于本文算法是数值稳定的，可节省内存. 因此在理论上说明本文算法对于广义系统的可控性计算是非常有效的.

§4. 数　　例

本节提供一个例子. 用本文提出的算法计算其 R-能控性和能控性.

例 1. 考虑系统(1)，其中

$$A=\left[\begin{array}{cc|cccc}
1.00000 & 4.01067 & 2.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.10011\\
2.22225 & -9.80321 & 0.00000 & 0.00000 & 1.00000 & 0.00000\\
\hline
0.00000 & 0.00000 & 2.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.00000\\
0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000\\
0.00000 & 0.00000 & -1.00000 & -1.00000 & 0.00000 & -1.00000\\
0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & -1.00000 & 0.00000
\end{array}\right],$$

$$B=[1.00000\quad 0.00000\quad 0.00000\quad 0.00000\quad 0.00000\quad 0.00000]^T,$$

$$E=\left[\begin{array}{cc|cccc}
0.00000 & 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 & -1.00000\\
0.00000 & -1.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000\\
\hline
0.00000 & 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000\\
0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.00000\\
0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 1.00000 & 0.00000\\
0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000
\end{array}\right].$$

根据算法(二)知，此时广义系统(1)的 R-能控性与否取决于 $\langle A_{22}, E_{22}\rangle$ 是否存在有限广义特征值，其中

$$A_{22}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ E_{22}=\begin{bmatrix} 1.0 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1.0 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1.0 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}.$$

利用算法(一)知存在有限广义特征值．因此，广义系统(1)非 R-能控，当然系统(1)是不能控的．

以上例子都是在宇宙 68000 上计算出来的．数例说明本文算法对于广义系统能控性、R-能控性的计算是非常有效的．

参考文献

[1] 王朝珠，戴立意，广义动态系统，控制理论与应用，No. 1，(1986)，pp2—12.

[2] J. D. Cobb, Controllability, Observability and Duality in Singular Systems, IEEE Trans. AC-26, 1984, 1076—1082.

[3] C. C. Paige, Properties of Numerical Algorithm Related to Controllability, IEEE Trans. AC-26, 1981, 130—138.

[4] J. D. Cobb, Descriptor Variable Systems and Optimal State Regulation, IEEE Trans. AC-28, 1983, 601—611.

[5] G. C. Verghese, B. C. Levy, T. Kailath, A Generalized State-Space for Singular Systems, IEEE Trans. AC-26, 1981, 811—831.

[6] J. D. Cobb, Feedback, Pole Placement in Descriptor Variable Systems, INT. J. Control, 33, 1981, 1135—1146.

[7] 严拱天，广义系统的可控性和可观性，控制理论与应用，No. 2，(1985)，pp33—44.

[8] C. B. Moler, B. W. Stewart, An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue Problems, SIAM J. Numer. Anal., 10, (1973), p241.

[9] A. J. Laub, B. C. Moore, Calculation of Transmission Zeros Using QZ Technique, Automatica, 14, 1978, p557.

[10] A. Emani-Naeini, P. Van. Dooren, Computation of Zeros of Linear Multivariable Systems, Automatica, 18, 1982, 415—430.