

常微初值问题的自适应求解器 AS 的有效性* 1)

李旺尧

(中国科学院计算中心)

THE EFFECTIVENESS OF AN ADAPTIVE SOLVER FOR SOLVING INITIAL VALUE PROBLEMS IN O. D. ES.

Li Wang-yao

(Computing Center, Academia Sinica)

Abstract

In order to identify the effectiveness of the "AS" for solving stiff problems in O. D. Es 72 stiff problems adopted by Enright et al. have been solved. The Numerical tests show that "AS" is dominant in comparison with Gear's automatic code.

一、前言

本文作者曾介绍过一个具有自动改变积分步长、自动变阶、自动改变积分方法、自动通过右函数间断点、自动选取初始步长的自适应求解器 (Adaptive Solver 简称 AS)^[1]。指出这是自动算法的重大进步,形成了真正的“黑合子”求解器,预计能更为有效的求解 Stiff 问题。但是 AS 必须经过大量实践的检验才能证实其有效性。为此目的我们将 AS 同 Gear 自动程序(简称 GS)对具有代表性的 24 个 Stiff 方程 72 个算例进行了验算和综合比较。计算结果和相应结论列于下面。

二、验算说明

计算全部采用双倍字长在 IBM-AT 机上完成。

程序: AS 是 ODE 包^[2]中 INNERI 经过部分修正的求解器 AS, GS 是 DIFSUB^[3]

问题: Enright 等^[4]提出的 A.B.C.D.E. 五类 Stiff 问题(除 E4 而外)共 24 个,分别用三种误差容限 10^{-2} , 10^{-4} , 10^{-6} 计算,总计 72 个算例,其中 A 类问题是线性具有实特

* 1990 年 10 月 20 日收到。

1) 国家自然科学基金项目。

征值的问题, 包含有 4 个常微分方程组。B 类问题为线性具有非实特征值含 5 个常微分方程组。C 类问题是具有非线性耦合的问题, 共有 5 个。D 类问题是非线性的具有实特征值含有 6 个常微分方程组。E 类问题是非线性的具有非实特征值含有 5 个常微分方程组。

这些问题大部份出自于物理、化学、绝缘物理、控制论、反应推动力学、中子反应理论、线路理论等科学技术领域。具有较为广泛的代表性。

误差控制: 相对误差控制。

初始步长选取: AS 由程序自动生成。GS 预先选定合理的初始步长。

统计量: 为了全面的、合理的进行比较, 我们记录下如下的统计量:

T : 计算时间(因为全部算例都是小型的, 方程组不超过 10 阶, 右函数 f 及其 Jacobian 阵的计算都极为简单, 因此这个 T 主要反映辅助计算时间)。

F_n : 右函数计算次数。

J_n : Jacobian 矩阵计算次数。

I_n : 求逆次数。

S_n : 计算步数。

三、计算结果

计算结果列于统计表 1 中。

表 1

容许误差 算例 积分方法	T (秒)	F_n	J_n	I_n	S_n	容许误差 算例 积分方法	T (秒)	F_n	J_n	I_n	S_n		
10^{-2} A1AS	5	93	5	5	37	A3GS	14	602	33	33	244		
	A1GS	4	93	10	10	40	A4AS	93	1129	71	71	434	
	A2AS	12	129	10	10	52	A4GS	56	702	41	41	295	
	A2GS	12	118	17	17	49	10^{-2} B1AS	10	259	15	15	110	
	A3AS	7	149	10	10	56		B1GS	16	758	17	17	304
	A3GS	5	144	15	15	58	B2AS	6	89	3	3	39	
	A4AS	22	239	15	15	88	B2GS	5	89	10	10	37	
	A4GS	18	195	21	21	73	B3AS	7	111	10	10	42	
10^{-4} A1AS	11	295	21	21	107	B3GS	6	103	11	11	42		
	A1GS	6	224	15	15	94	B4AS	8	147	12	12	56	
	A2AS	26	335	26	26	124	B4GS	7	153	16	16	64	
	A2GS	22	333	21	21	123	B5AS	14	275	13	13	114	
	A3AS	12	337	29	29	123	B5GS	207	7001	20	20	2549	
	A3GS	7	329	20	20	129	10^{-4} B1AS	29	769	24	24	344	
	A4AS	50	575	38	38	220		B1GS	21	1036	20	20	407
	A4GS	31	435	23	23	153		B2AS	12	219	7	7	87
10^{-6} A1AS	15	383	7	7	161	B2GS		10	241	15	15	102	
	A1GS	10	485	18	18	186	B3AS	13	259	11	11	104	
	A2AS	52	661	22	22	279	B3GS	9	229	13	13	90	
	A2GS	41	613	35	35	245	B4AS	18	373	20	20	146	
	A3AS	22	647	36	36	246	B4GS	13	335	19	19	127	

续表

容许误差 算例 积分方法	T (秒)	F _n	J _n	I _n	S _n	容许误差 算例 积分方法	T (秒)	F _n	J _n	I _n	S _n
B5AS	30	655	37	37	258	D2GS	3	109	15	15	40
B5GS	213	6876	33	33	2677	D3AS	5	111	5	5	51
10 ⁻⁶ B1AS	65	1719	28	28	802	D3GS	5	138	19	19	51
B1GS	35	1827	32	32	699	D4AS	3	29	4	4	10
B2AS	24	499	12	12	209	D4GS	2	32	6	6	11
B2GS	13	354	15	15	142	D5AS	3	79	14	14	21
B3AS	23	499	12	12	224	D5GS	2	74	15	15	21
B3GS	29	778	9	9	355	D6AS	3	43	7	7	14
B4AS	39	387	35	35	343	D6GS	3	36	7	7	14
B4GS	20	590	27	27	228	10 ⁻⁴ D1AS	5	203	12	12	77
B5AS	56	1189	24	24	511	D1GS	3	284	28	28	79
B5GS	289	7489	29	29	2848	D2AS	8	221	11	11	89
10 ⁻² C1AS	5	123	5	5	51	D2GS	5	243	20	20	92
C1GS	5	132	12	12	50	D3AS	13	307	9	9	141
C2AS	5	111	4	4	45	D3GS	8	335	17	17	137
C2GS	4	127	11	11	46	D4AS	3	41	4	4	16
C3AS	6	115	4	4	45	D4GS	2	45	8	8	18
C3GS	4	116	14	14	42	D5AS	4	211	17	17	61
C4AS	6	135	14	14	51	D5GS	3	160	20	20	39
C4GS	4	129	16	16	47	D6AS	4	95	11	11	32
C5AS	6	135	12	12	48	D6GS	3	93	9	9	34
C5GS	6	188	19	19	51	10 ⁻⁶ D1AS	9	387	32	32	144
10 ⁻⁴ C1AS	12	307	14	14	116	D1GS	5	391	42	42	116
C1GS	7	301	14	14	111	D2AS	12	379	8	8	161
C2AS	10	271	23	23	100	D2GS	7	396	23	23	157
C2GS	7	279	13	13	104	D3AS	21	527	9	9	236
C3AS	10	277	18	18	102	D3GS	16	659	25	25	267
C3GS	7	273	16	16	102	D4AS	4	93	11	11	35
C4AS	12	301	24	24	108	D4GS	3	79	8	8	31
C4GS	7	296	19	19	105	D5AS	7	311	20	20	107
C5AS	11	216	20	20	98	D5GS	4	338	29	29	100
C5GS	9	387	31	31	108	D6AS	7	155	12	12	60
10 ⁻⁶ C1AS	19	499	9	9	220	D6GS	4	146	11	11	59
C1GS	13	544	23	23	211	10 ⁻² E1AS	3	23	4	4	7
C2AS	18	489	12	12	192	E1GS	3	30	4	4	11
C2GS	12	466	25	15	188	E2AS	2	31	4	4	11
C3AS	19	529	20	20	196	E2GS	2	24	5	5	13
C3GS	12	502	23	23	196	E3AS	4	105	4	4	18
C4AS	19	457	15	15	194	E3GS	3	100	12	12	37
C4GS	13	531	27	27	193	E5AS	3	35	4	4	13
C5AS	21	533	20	20	218	E5GS	4	100	19	19	28
C5GS	14	623	30	30	198	10 ⁻⁴ E1AS	4	77	12	12	36
10 ⁻² D1AS	3	95	7	7	35	E1GS	4	85	11	11	27
D1GS	2	124	21	21	30	E2AS	3	71	4	4	25
D2AS	4	97	12	12	36	E2GS	2	80	6	6	32

续表

容许误差 算例 积分方法	T (秒)	F_n	J_n	l_n	S_n	容许误差 算例 积分方法	T (秒)	F_n	J_n	l_n	S_n
E3AS	8	207	13	13	80	E2AS	3	115	0	0	48
E3GS	5	231	18	18	87	E2GS	3	154	9	9	61
E5AS	4	43	5	5	16	E3AS	15	497	26	26	189
E5GS		失	败			E3GS	8	428	24	24	161
10^{-6} E1AS	7	157	4	4	59	E5AS	4	73	10	10	24
E1GS	7	194	14	14	78	E5GS		失	败		

表 1 中每项的意义是: 10^{-6} A3AS 表示采用自适应求解器 AS 对 A 类中第 3 个问题
进行计算, 误差容限为 10^{-6} .

四、结 论

- 1) 采用低精度计算时(误差容限 10^{-2}) AS 全面占优。
- 2) 对于非线性 Stiff 方程 C.D.E 类问题 AS 几乎全面占优。
- 3) 对于问题 B_2 和 E_2 , GS 失败而 AS 能成功的解算。
- 4) 对于 A 类问题, 采用中等精度(误差容限 10^{-4}) 计算时 GS 略好。
- 5) AS 的辅助计算时间大于 GS. 这是因为 AS 增加了判断、比较。再是 GS 是结构非常简单的(当然相应功能也少)求解器。随着求解问题规模增大, 这将处于次要地位。

参 考 文 献

- [1] 李旺盛, 关于求解常微初值问题的自适应技术, 数值计算与计算机应用, 11: 1(1990).
- [2] 李旺盛, 毛祖范, 求解常微分方程初值问题软件包 ODE, 中国科学院计算中心.
- [3] C. W. Gear, 常微分方程初值问题的数值解法, 科学出版社, 1978.
- [4] W. H. Enright, T. E. Hull, B. Lindberg, 常微分方程刚性组数值方法的比较, 计算机应用与应用数学, No. 8, No. 9 (1977).