

单向纤维增强复合材料的双尺度分析模型及其力学参数计算^{*1)}

王镜波

(西北工业大学理学院, 西安 710129)

崔俊芝

(中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100080)

聂玉峰

(西北工业大学理学院, 西安 710129)

摘 要

针对单向纤维增强复合材料以及复合纤维束的结构特征, 建立了其双尺度分析模型, 并将之应用于单向纤维增强复合材料刚度参数和强度参数的预测, 给出了基于高阶双尺度分析方法力学参数计算的算法流程及数值算例, 验证了模型及算法的正确性和有效性, 同时给出了纤维两种规则排列方式下其力学参数的演变规律.

关键词: 单向纤维增强复合材料; 双尺度分析模型; 弹性强度参数

MR (2000) 主题分类: 65N30

THE TWO-SCALE ANALYSIS MODEL FOR MECHANICS PARAMETER COMPUTATION OF FIBER-REINFORCED COMPOSITE MATERIALS

Wang Jingbo

(School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

Cui Junzhi

(Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences,
Beijing 100080, China)

Nie Yufeng

(School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

Abstract

According to the characteristic of single direction fiber-reinforced composite materials and composite fiber threads, the Two-Scale Analysis (TSA) model was developed for the mechanics parameters prediction of fiber-reinforced composite materials, including stiffness

* 2007年11月16日收到.

¹⁾ 国家重点基础研究发展计划 (973 计划)2005CB321704, 国家自然科学基金重点项目 (90405016) 以及教育部新世纪优秀人才支持计划 (2006) 资助.

parameters and strength parameters. Then the procedure of mechanics parameter computation algorithms based on TSA was discussed, and some results of numerical experiments were given. They show that the model and algorithms given in the paper are feasible and valid. Simultaneously, the influence of the fibers' packing modes on mechanics parameters of fiber-reinforced composite materials was shown.

Keywords: single direction fiber-reinforced composite materials; two-scale analysis model; elastic strength parameters

2000 Mathematics Subject Classification: 65N30

1. 引言

复合材料具有传统材料所无法比拟的优越性, 因其具有高比强度、比刚度、耐高温和防腐蚀等性质而越来越受重视. 关于周期性复合材料的力学性能预测, I.Babuska^[3]、J.L. Lions^[1] 等人针对周期性复合材料弹性结构提出了均匀化方法, 随后 O.A. Oleinik^[10]、本文作者之一及其合作者基于均匀化理论提出了多尺度分析方法, 预测了周期性复合材料构件的刚度参数^[4-7] 和强度参数^[8].

单向纤维增强复合材料以及复合纤维束(复合纤维线) 细观构造如图 1 所示, 它在轴向上具有一致性, 其横向切面图(见图 2) 唯一确定材料的结构, 即纤维排布方式, 位置等. 针对单向纤维复合材料构造的特殊性, 本文建立了单向纤维增强复合材料结构的双尺度分析模型, 以预测单向纤维复合材料的刚度参数和弹性强度参数, 并给出了数值算例, 验证双尺度分析模型以及算法的正确性和有效性, 同时研究了纤维排列方式对单向纤维复合材料力学性能的影响.

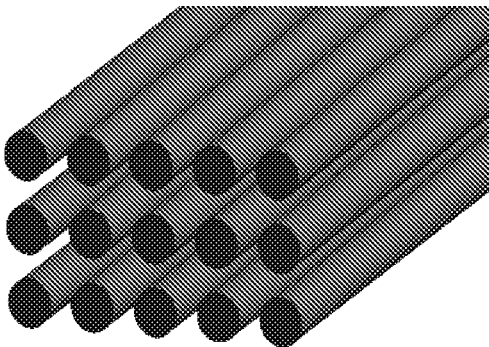


图 1 单向纤维复合材料构造示意图

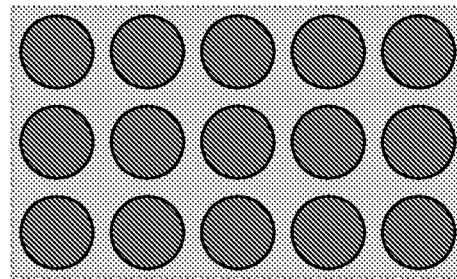


图 2 横向切面示意图

2. 单向纤维复合材料的高阶双尺度分析方法

2.1. 单向纤维复合材料的双尺度分析模型

针对单向纤维复合材料构造的特殊性, 其三维几何构形表示为 $\Omega = \bigcup_{i \in T} c_i \times I$, 其中 c_i 表示二维平面单胞, 所有的单胞 c_i ($i \in T$) 具有同样的尺寸和细观特征, 闭区间 $I = [a, b]$ 中 a, b 分别表示构形轴向坐标值. 由固体力学理论知, 定义于区域 Ω 上的混合边界条件弹性问题可

以表述为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ijhk}^\varepsilon(x) \frac{\partial u_h^\varepsilon(x)}{\partial x_k} \right) = f_i(x) & x \in \Omega \\ \mathbf{u}^\varepsilon(x) = \bar{\mathbf{u}}(x) & x \in \Gamma_1 \\ \sigma(u) \equiv n_j a_{ijhk}^\varepsilon(x) \frac{\partial u_h^\varepsilon(x)}{\partial x_k} = p_i(x) & x \in \Gamma_2 \\ (\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi, \quad \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega), \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $a_{ijhk}^\varepsilon(x)$ ($i, j, h, k = 1, 2, 3$) 表示材料组分的弹性系数, 由于单向纤维复合材料构造的特殊性, $a_{ijhk}^\varepsilon(x)$ 与 x_3 (轴向) 无关, 且在 x_p ($p = 1, 2$) 方向上是剧烈震荡的小周期函数, 周期为 $\varepsilon_p, \varepsilon_p$ 为单胞 c_i 各方向上的尺寸. 我们令 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, $\xi_p = x_p/\varepsilon$, 于是有

$$a_{ijhk}^\varepsilon(x_1, x_2) = a_{ijhk} \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) = a_{ijhk}(\xi_1, \xi_2), \quad (2.2)$$

$a_{ijhk}(\xi)$ 是 1- 周期函数. n_j 表示力边界 Γ_2 的外法线方向余弦, $\bar{u}(x)$, $p_i(x)$ 分别为位移边界 Γ_1 和力边界 Γ_2 上的给定位移和载荷.

根据文献 [7], 位移 $u^\varepsilon(x)$ 可以表示为 $u^\varepsilon(x) = u(x, \xi)$, 其中 x 表示构件的宏观坐标, ξ 表示二维平面单胞内的局部坐标, 同时 x 和 ξ 也分别代表构件宏观和细观特征对位移 $u^\varepsilon(x)$ 的影响. $u^\varepsilon(x)$ 有如下位移展开式:

$$u_i^\varepsilon(x) = u_i(x, \xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \sum_{\alpha} N_{\alpha im}(\xi) v_{\alpha m}(x), \quad (i, m = 1, 2, 3), \quad (2.3)$$

其中 $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l = 1, 2, 3)$, $N_\alpha(\xi)$ 是定义在单位化单胞 Q 上的 3 阶 1- 周期矩阵函数, 可表示为

$$N_\alpha(\xi) = \begin{Bmatrix} N_{\alpha 11}(\xi) & \cdots & N_{\alpha 13}(\xi) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ N_{\alpha 31}(\xi) & \cdots & N_{\alpha 33}(\xi) \end{Bmatrix}, \quad v_\alpha(x) = \begin{bmatrix} v_{\alpha 1}(x) \\ \vdots \\ v_{\alpha 3}(x) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

对于通常的三维周期性复合材料, 如编织复合材料, 所选取的单胞都是三维的; 但对于三维单向纤维复合材料由于其构造的特殊性, 细观特征量只有两个分量 ξ_1 和 ξ_2 , 故选取单胞为二维平面单胞.

关于 $N_\alpha(\xi)$ 的方程推导如下, 由 (2.3) 式知

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_p} = \frac{\partial u_i}{\partial x_p} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_p} & p = 1, 2, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_3}, \end{cases} \quad (2.5)$$

可以看出, $u(x, \xi)$ 在 x_3 方向上无细观特征量的影响, 其中 $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$.

将 (2.5) 式代入式 (2.1), 可以得到

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ijhk}(\xi) \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \sum_{\alpha} a_{ijhk}(\xi) \left(N_{\alpha hm}(\xi) \frac{\partial^2 v_{\alpha m}}{\partial x_k \partial x_j} \right) \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l-1} \sum_{\alpha} a_{ijhq}(\xi) \frac{\partial N_{\alpha hm}(\xi)}{\partial \xi_q} \frac{\partial v_{\alpha m}}{\partial x_j} \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l-1} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_p} (a_{iphk}(\xi) N_{\alpha hm}(\xi)) \frac{\partial v_{\alpha m}}{\partial x_k} \right) \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l-2} \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_p} \left(a_{iphq}(\xi) \frac{\partial N_{\alpha hm}(\xi)}{\partial \xi_q} \right) v_{\alpha m}(x) \\
&= f_i(x) \quad p, q = 1, 2, \quad i, j, h, k = 1, 2, 3, \quad x \in \Omega, \xi \in Q.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

假设 (2.6) 式对任意 ε 、单胞、荷载 $f(x)$ 都成立, 比较 (2.6) 式两端 $\varepsilon^l (l = -2, -1, 0, 1, \dots)$ 的系数可获得关于 $N_{\alpha m}(\xi)$ 和 $v_{\alpha m}(x)$ 应满足的方程. 首先比较 ε^{-2} 的系数得到

$$\frac{\partial}{\partial \xi_p} \left(a_{iphq}(\xi) \frac{\partial N_{0hm}(\xi)}{\partial \xi_q} \right) v_{0m}(x) = 0, \quad x \in \Omega, \xi \in Q, \tag{2.7}$$

其中 $v_0(x) = (v_{01}(x), \dots, v_{0m}(x))^T$ 与结构的宏观行为、几何形状、荷载等有关, 不等于零. 进一步由 $N_{0m}(\xi) (m = 1, 2, 3)$ 的周期性得到

$$\frac{\partial}{\partial \xi_p} \left(a_{iphq}(\xi) \frac{\partial N_{0hm}(\xi)}{\partial \xi_q} \right) = 0 \quad \xi \in Q, \tag{2.8}$$

$N_{0m}(\xi) = (N_{01m}(\xi), \dots, N_{03m}(\xi))^T$ 是 1- 周期向量值函数. 可选取单位矩阵作为方程 (2.8) 的一个特解, 即

$$\mathbf{N}_0(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

然后通过比较 (2.6) 式两端 ε^{-1} 的系数得到

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha_1=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_p} \left(a_{iphq}(\xi) \frac{\partial N_{\alpha_1 hm}(\xi)}{\partial \xi_q} \right) v_{\alpha_1 m}(x) + \frac{\partial}{\partial \xi_p} (a_{iphk}(\xi) N_{0hm}(\xi)) \frac{\partial v_{0m}}{\partial x_k} \\
&= 0, \quad x \in \Omega, \xi \in Q, \quad i, \alpha_1 = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

令

$$v_{\alpha_1 m} = \frac{\partial v_{0m}}{\partial x_{\alpha_1}} \quad \text{且} \quad \frac{\partial v_{0m}}{\partial x_{\alpha_1}} \neq 0,$$

考虑 $N_{\alpha_1 km}(\xi)$ 的 1- 周期性, 我们可以得到关于 $N_{\alpha_1}(\xi)$ 的列向量 $N_{\alpha_1 m}(\xi) (\alpha_1, m = 1, 2, 3)$ 的方程如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi_p} \left(a_{iphq}(\xi) \frac{\partial N_{\alpha_1 hm}(\xi)}{\partial \xi_q} \right) = -\frac{\partial a_{ipm\alpha_1}}{\partial \xi_p} & \xi \in Q \\ N_{\alpha_1 m}(\xi) = 0, & \forall \xi \in \partial Q \end{cases} \tag{2.10}$$

其中 Q 为二维单位化单胞, 如图 3 所示, $p, q = 1, 2, i, h = 1, 2, 3, N_{\alpha_1 m}(\xi)$ 仍有三个自由度.

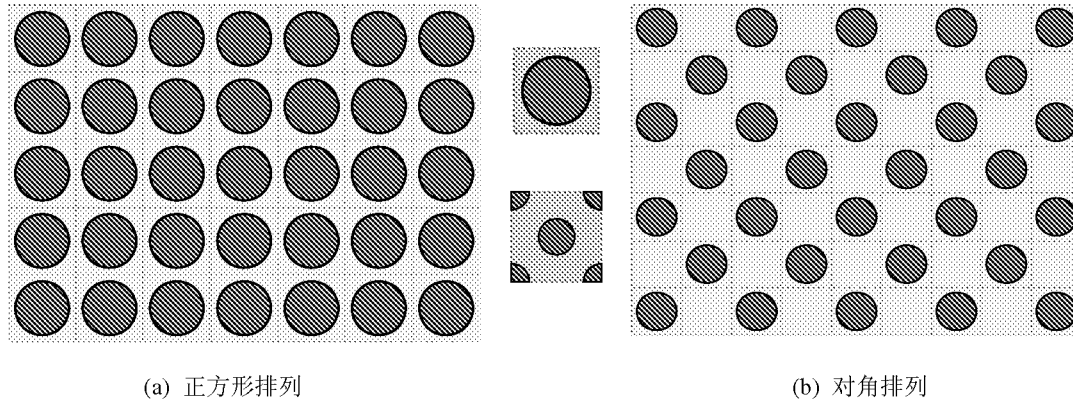


图 3 单向复合材料横向切面及其单胞示意图

根据偏微分方程理论, 问题 (2.10) 的解等同于如下虚功方程的解

$$\int_Q w_{ip}(v) a_{iphq}(\xi) w_{hq}(N_{\alpha_1 m}) d\xi = - \int_Q w_{ip}(v) a_{ipm\alpha_1}(\xi) d\xi, \quad \forall v \in H_0^1(Q), \quad (2.11)$$

其中 $w_{ip}(v) = \partial v_i(\xi) / \partial \xi_p$, 方程 (2.11) 矩阵表示如下:

$$\int_Q w^T(v) \tilde{D} w(N_{\alpha_1 m}) d\xi = - \int_Q w^T(v) c d\xi, \quad (2.12)$$

其中

$$w = Lv = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

c 为张量 $a_{ipm\alpha_1}$ 对应的向量, \tilde{D} 为 a_{iphq} 对应的矩阵, 也可由刚度矩阵 D 中剔除第 3 行及第 3 列后得到.

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1112} & a_{1132} & a_{1131} \\ a_{2211} & a_{2222} & a_{2212} & a_{2232} & a_{2231} \\ a_{1211} & a_{1222} & a_{1212} & a_{1232} & a_{1231} \\ a_{3211} & a_{3222} & a_{3212} & a_{3232} & a_{3231} \\ a_{3111} & a_{3122} & a_{3112} & a_{3132} & a_{3131} \end{bmatrix},$$

由于原刚度矩阵 D 对称正定, 进而由线性代数理论知 \tilde{D} 也为对称正定矩阵, 这样运用 Korn 不等式及 Poincare-Friedrichs 不等式可证得方程左端微分算子在 $\mathbf{H}_0^1(Q)$ 上满足一致椭圆性条件. 根据 Lax-Milgram 定理, 对每一对 (α_1, m) , 方程 (2.10) 均存在唯一解.

接着比较 (2.6) 式两端 ε^0 的系数得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi_p} \left(a_{iphq}(\xi) \frac{\partial N_{\alpha_1 \alpha_2 hm}(\xi)}{\partial \xi_q} \right) v_{\alpha_1 \alpha_2 m}(x) \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial \xi_p} (a_{iphk}(\xi) N_{\alpha_1 hm}(\xi)) \frac{\partial v_{\alpha_1 m}}{\partial x_k} \right] + \left(a_{ijhq}(\xi) \frac{\partial N_{\alpha_1 hm}(\xi)}{\partial \xi_q} \right) \frac{\partial v_{\alpha_1 m}}{\partial x_j} \\ & + a_{ijhk}(\xi) \left(N_{0hm}(\xi) \frac{\partial^2 v_{0m}}{\partial x_k \partial x_j} \right) = f_i(x), \quad x \in \Omega, \quad \xi \in Q. \end{aligned} \quad (2.13)$$

令

$$v_{\alpha_1 \alpha_2 m}(x) = \frac{\partial v_{\alpha_1 m}}{\partial x_{\alpha_2}},$$

假设 $f(x)$ 是域 $G \in R^n$ 上的可积函数, 用符号 \sim 表示均匀化算子, 定义如下:

$$\tilde{f} = \frac{1}{|G|} \int_G f(x) dv.$$

注意到式 (2.13) 是关于双尺度变量 (x, ξ) 的方程, 但其右端项只与变量 x 有关, 又方程 (2.13) 中关于变量 ξ 的函数均为 1- 周期函数且 $N_{m\alpha_1} = N_{\alpha_1 m}$, 故在方程两端施加一个关于变量 ξ 的均匀化算子, 经整理得到

$$\hat{a}_{ijhk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_{0h}}{\partial x_k} \right) = f_i(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.14)$$

其中

$$\hat{a}_{ijhk} = \int_Q \left(a_{ijhk}(\xi) + \left(a_{ijsq}(\xi) \frac{\partial N_{hsk}(\xi)}{\partial \xi_q} \right) \right) d\xi \quad s = 1, 2, 3, \quad (2.15)$$

通常 \hat{a}_{ijhk} 被称为材料的均匀化弹性系数. 令

$$\begin{cases} v_0(x) = \bar{u}(x) & x \in \Gamma_1, \\ \sigma(v_0) \equiv n_j \hat{a}_{ijhk}(x) \frac{\partial v_{0h}}{\partial x_k} = p_i(x) & x \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.16)$$

则方程 (2.14) 与 (2.16) 联立组成一个常系数的偏微分方程边值问题. 可以证明均匀化弹性系数 $\{\hat{a}_{ijhk}\}$ 满足 $E(\mu_1, \mu_2)$ 条件^[7], 记方程 (2.14) 与 (2.16) 联立的解为 $u_0(x)$.

进一步在方程 (2.13) 中以 $u_0(x)$ 替换 $v_0(x)$, 利用方程 (2.14) 可以得到

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi_p} \left(a_{iphq}(\xi) \frac{\partial N_{\alpha_1 \alpha_2 hm}}{\partial \xi_q} \right) = \hat{a}_{i\alpha_2 m \alpha_1} - a_{i\alpha_2 m \alpha_1}(\xi) - a_{i\alpha_2 hq} \frac{\partial N_{\alpha_1 hm}}{\partial \xi_q} \\ - \frac{\partial}{\partial \xi_p} (a_{iph\alpha_2}(\xi) N_{\alpha_1 hm}(\xi)) & \xi \in Q, \quad i, m, \alpha_1, \alpha_2 = 1, 2, 3, \\ N_{\alpha_1 \alpha_2 m}(\xi) = 0, & \xi \in \partial Q. \end{cases} \quad (2.17)$$

同样地, 比较方程 (2.6) 两端 $\varepsilon^l (l = 1, 2, 3, \dots)$ 的系数, 令

$$v_{\alpha m}(x) = \frac{\partial v_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1} m}}{\partial x_{\alpha_l}},$$

则可得到关于 $N_{\alpha_1 \dots \alpha_l m}(\xi)$ ($\alpha_i = 1, 2, 3, l = 3, 4, \dots$) 的方程如下

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi_p} \left(a_{iphq}(\xi) \frac{\partial N_{\alpha_1 \dots \alpha_l hm}}{\partial \xi_q} \right) \\ = -[a_{i\alpha_l m \alpha_{l-1}}(\xi) N_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-2} hm}(\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi_p} (a_{iph\alpha_l}(\xi) N_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1} hm}(\xi)) \\ + a_{i\alpha_l hq} \frac{\partial N_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1} hm}}{\partial \xi_q}] \quad \xi \in Q, \quad i, m = 1, 2, 3, \\ N_{\alpha_1 \dots \alpha_l m}(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial Q. \end{cases} \quad (2.18)$$

至此, 我们有如下 $u^\varepsilon(x)$ 位移展开式:

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= u^0(x) + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_l = 1, \dots, n} N_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(\xi) \frac{\partial^l u^0}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_l}} \\ &= u^0(x) + \varepsilon N_{\alpha_1}(\xi) \frac{\partial u^0(x)}{\partial x_{\alpha_1}} + \varepsilon^2 N_{\alpha_1 \alpha_2}(\xi) \frac{\partial^2 u^0(x)}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2}} + \dots, \end{aligned} \quad (2.19)$$

其中 $u^0(x)$ 是定义在整体区域 Ω 上的均匀化位移解, $N_{\alpha_1 \dots \alpha_l m}(\xi)$ 可在二维单位化单胞 Q 域上求解.

在实际工程计算中, 通常只需要取位移展开式 (2.19) 的前 M 项来计算位移场 $u^\varepsilon(x)$ 的近似值. 当对周期性复合材料构件进行强度参数的预测时, 需要 $M \geq 2$ 时才能保证整个方法的收敛性^[8]. 由构件的位移场 $u^\varepsilon(x)$, 根据弹性力学的几何方程和物理方程可求得构件内任一点处的应变与应力状态.

这样, 我们便建立了单向纤维复合材料的高阶双尺度分析模型, 它与通常的三维周期性复合材料不同, 因单向纤维复合材料结构在轴向上具有一致性, 根据这一特殊性, 在求解 $N_{\alpha m}(\xi)$ 项时, 选取二维平面单胞, 但其仍有三个自由度.

2.2. 力学参数双尺度计算算法过程

1) 从单向纤维复合材料构件中提取平面单胞, 建立单位化单胞的几何模型, 并对单胞进行有限元离散.

2) 通过有限元方法求解方程 (2.10) 获得 $N_{\alpha_1}(\xi)$ 的数值解, 进一步可以通过式 (2.15) 求得均匀化弹性系数 $\{\hat{a}_{ijhk}\}$, 由此可得单向纤维复合材料的等效刚度参数.

3) 通过有限元方法求解 (2.14) 和 (2.16) 联立的方程以获得 $u^0(x)$ 的数值解. 对于一些典型构件, 也可直接通过固体力学的知识求得其宏观均匀化位移解 $u^0(x)$ 的解析解^[8].

4) 如果有必要, 利用有限元方法求解式 (2.17), (2.18) 获得 $N_{\alpha_1 \alpha_2}(\xi)$ 和 $N_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(\xi)$ ($l = 3, 4, \dots$) 的数值解. 由文献 [8] 可知, 对于柱体均匀拉伸, 计算构件应力应变场只需要计算 $N_{\alpha_1}(\xi)$, 对于其他更加复杂的情况, 为了提高计算精度, 可以进行更高阶 $N_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(\xi)$ ($l = 3, 4, \dots$) 的计算.

5) 首先只根据宏观均匀化位移场 $u^0(x)$, 求出整个结构的宏观应力应变分布, 然后在结构的宏观危险区域 (应力或应变最大的区域) 内选取一个单胞, 确定此单胞的宏观坐标.

6) 给定一载荷, 计算选定单胞内的应力应变场. 针对预测单向纤维复合材料构件的拉伸强度, 取位移展开式 (2.19) 的前两项来近似计算位移场 $u^\varepsilon(x)$, 进而求得单胞内的应力应变场.

7) 选择合适的强度准则, 根据上一步所得的应力应变场, 求出单向纤维复合材料的弹性强度参数.

3. 数值算例

在制备单向纤维增强复合材料过程中, 当纤维的直径较大时, 可以逐一固定每根纤维的位置, 这时一般采用纤维规则排列方式^[12], 以图 3 所示两种纤维规则排列方式下的单向复合材料结构为例, 本文将双尺度分析预测结果与实验数据以及经典的理论结果进行对比, 验证了本文算法对单向纤维复合材料结构刚度和弹性强度参数预测的有效性, 并图示给出了不同纤维排列方式下单向纤维复合材料刚度和弹性强度参数的演变规律.

3.1. 对单向纤维复合材料刚度参数的预测

如图 3 中 (a) 型排列单向纤维复合材料结构, 图 4 给出了双尺度分析算法、混合率方法预测结果与实验数据^[11] 的比较. 经过对比发现, 对于单向纤维复合材料的纵向弹性模量本文算法和混合率方法都能给出一个很好的预测.

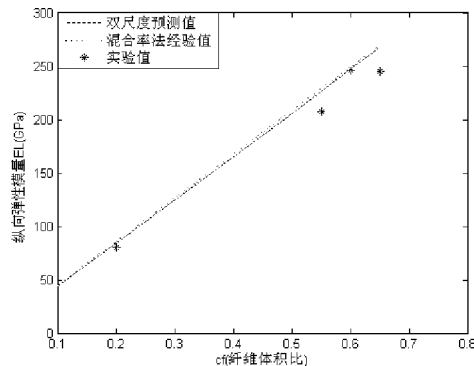


图 4 某复合材料纵向弹性模量预测与实验值比较

$$E_f = 413.7 \text{ GPa}, v_f = 0.2, E_m = 4.137 \text{ GPa}, v_m = 0.35$$

如图 3 所示两种纤维规则排列方式下的单向复合材料结构, 图 5 分别给出了其等效弹性常数的双尺度分析预测结果, 经过比较可以看出, 纤维排列方式对单向纤维复合材料纵向弹性系数的影响可以忽略不计, 而对其横向弹性系数影响较大.

3.2. 对单向纤维复合材料弹性强度参数的预测

基于高阶双尺度分析的力学参数计算算法也对单向纤维复合材料的弹性强度进行了预测, 以图 3 中 (a) 型排列单向复合材料结构为例, 图 6 显示了玻璃纤维单向复合材料压缩强度 (强度准则依据文献^[8]) 的双尺度分析预测结果, 通过与实验数据^[2,9] 的对比, 发现本文算法可以对单向复合材料压缩强度给出一个比较好的预测.

如图 3 所示两种纤维规则排列方式下的单向复合材料结构, 图 7 分别给出了其弹性强度参数的双尺度分析算法预测结果, 经过比较可以看出, 纤维排列方式对单向复合材料纵向弹性

强度的影响可以忽略不计.

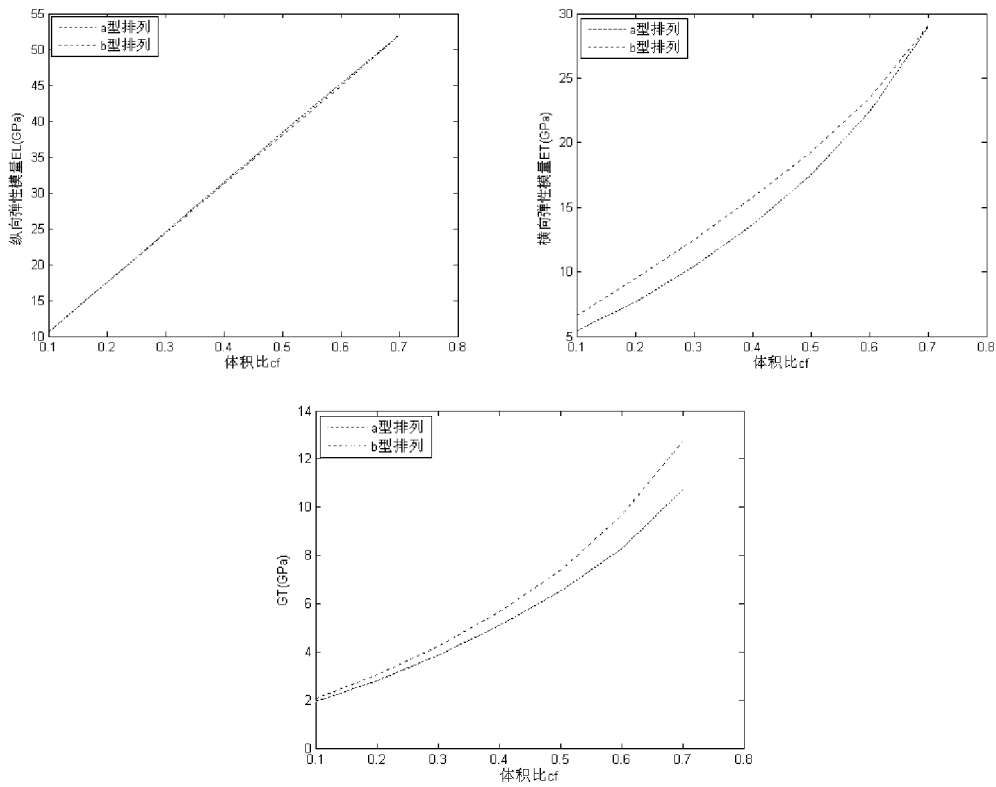


图 5 玻璃纤维树脂基单向复合材料等效弹性常数与纤维体积比的关系

$$E_f = 73.1 \text{ GPa}, v_f = 0.22, E_m = 3.7 \text{ GPa}, v_m = 0.35$$

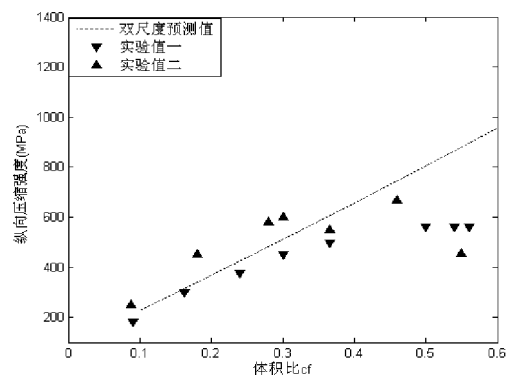


图 6 玻璃纤维树脂基单向复合材料压缩强度预测

$$E_f = 73.1 \text{ GPa}, v_f = 0.22, S_{fc} = 1600 \text{ MPa}$$

$$E_m = 3.7 \text{ GPa}, v_m = 0.35, S_{mc} = 130 \text{ MPa}$$

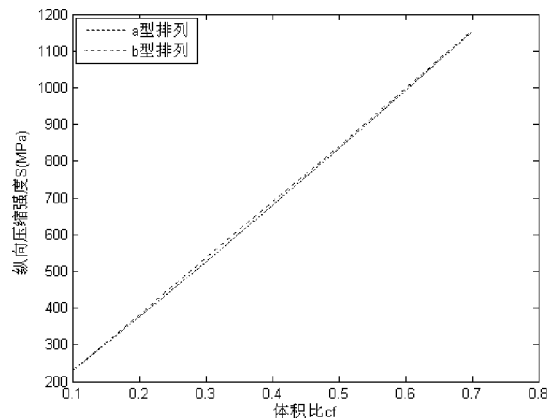


图 7 玻璃纤维树脂基单向复合材料压缩强度与纤维体积比的关系

$$E_f = 73.1 \text{ GPa}, v_f = 0.22, S_{fc} = 1600 \text{ MPa}$$

$$E_m = 3.7 \text{ GPa}, v_m = 0.35, S_{mc} = 130 \text{ MPa}$$

4. 结 论

高阶双尺度分析方法是预测周期性复合材料物理和力学参数的有效方法, 本文根据单向纤维增强复合材料构造的特殊性, 建立了针对单向纤维复合材料的双尺度分析模型, 给出了基于高阶双尺度分析方法的力学参数计算算法流程及数值算例, 预测了单向纤维复合材料的刚度和弹性强度参数, 验证了双尺度分析模型及算法的正确性和有效性。

针对单向纤维复合材料的高阶双尺度分析方法, 本文给出了两种纤维规则排列方式下单向纤维复合材料刚度和弹性强度参数的演变规律, 得出了一些有用的结论, 此方法同样适用于纤维其他规则排列或随机排列情况下力学参数的预测。

参 考 文 献

- [1] Bensoussan A, Lions J L, Papanicolaou G. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [2] Martinez G M, Piggott M R, Bainbridge D M R and Harris B. The compression strength of composites with kinked, misaligned and poorly adhering fibers[J]. J. Mater. Sci., 1981, 16: 2831-2836.
- [3] Babuska I. Homogenization and its applications, mathematical and computational problems, Numerical Solutions of Partial Differential Equations- III. Academic Press, New York, 1976, 89-116.
- [4] Cui J Z. Finite Element Algorithms Based on Two-Scale Analyses Method. Comp. Mech. in Struc. Engg., Recent Developments, Edited by Franklin Y. Cheng, Elsevier, 1999, Amsterdam. New York, Singapore, Tokyo, 31-41.
- [5] Cui J Z, Yang H Y. A dual coupled method of boundary value problems of PDE with coefficients of small period[J]. Intern. J. Comp. Math., 1996, 14: 159-174.
- [6] Cui J Z, Cao L Q. The two-scale asymptotic analysis methods for a class of elliptic boundary value problems with small periodic coefficients[J]. Mathematic Numerical Sinica, 1999, 21: 19-28.

-
- [7] Cui J Z, Shin T M and Wang Y L. Two-scale analysis method for bodies with small period configuration[J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 1999, 17: 601-614.
 - [8] Cui J Z, Yu X G. The two-scale methods for mechanics parameter computation of composite materials with periodic distribution. HERCMA 2005 CONFERENCE, invited paper, 21-24 Sep. 2005, Athens, Greece.
 - [9] Piggott M R and Harris B. Compression strength of carbon, glass and Kevlar-49 fiber reinforced polyester resins[J]. *J. Mater. Sci.* 1980, 15: 2523-2538.
 - [10] Oleinik O A, Shamaev A S, Yosifian G A. *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*. North-Holland, Amsterdam, 1992.
 - [11] Grag S K, Svalbonas V and Gurtman G A. *Analysis of Structural Composite Materials*. Marcel Dekker, Inc., 1973.
 - [12] 许震宇, 张若京. 纤维排列方式对单向纤维增强复合材料弹性常数的影响 [J]. *力学季刊*, 2002, 23: 59-63.