

不规则网格差分法在薄板几何 非线性分析中的应用*

李光耀

(湖南大学机械系)

APPLICATION OF FINITE DIFFERENCE METHOD ON IRREGULAR GRIDS TO GEOMETRICALLY NONLINEAR ANALYSIS OF PLATES

Li Guangyao

(Department of Mechanical Engineering, Hunan University)

Abstract

A finite difference method on irregular grids for the geometrically analysis of plates combined with perturbation method is described in this paper. The method is completely general with respect to various boundary conditions, load cases and the shapes of plates. The numerical results show that the method is efficient.

一、基本方程

采用挠度 w 及应力函数 φ 为基本未知量, 则薄板大挠度弯曲问题的基本微分方程为

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{q}{h}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \varphi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (2)$$

本文涉及的边界条件有如下几类(其具体推导过程见文献[1—3]):

1. 可移简支

$$w=0, M_n=0, \varphi=0, \nabla^2 \varphi=0 \quad (3)$$

或

$$w=0, \quad (4)$$

* 1994年4月21日收到.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\cos^2\theta + \mu \sin^2\theta) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (\sin^2\theta + \mu \cos^2\theta) + (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin 2\theta = 0, \quad (5)$$

$$\varphi = 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0. \quad (6)$$

2. 刚性固支

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin\theta = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial n^3} + (2+\mu) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial n \partial s^2} = 0. \quad (8)$$

3. 可移固支

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin\theta = 0, \quad (9)$$

$$\varphi = 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0, \quad (10)$$

θ 为边界外法矢与 x 轴的夹角.

二、摄动方程

引入下列无量纲符号

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/a, \quad \Phi = \varphi/Eh^2, \quad W = w/h, \quad Q = qa^4/Dh,$$

则基本微分方程的无量纲形式为

$$\nabla^4 W = 12(1-\mu^2) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right) + Q, \quad (11)$$

$$\nabla^4 \Phi = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}, \quad (12)$$

边界条件的形式不变.

取 $W_m = W_0/h$ 为摄动参数(本文将 W_0 取为板中的最大挠度), 将 Q, W, Φ 展开成 W_m 的升幂级数

$$Q = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_m^i, \quad W = \sum_{i=1}^n W_i W_m^i, \quad \Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i W_m^i. \quad (13)$$

将(13)式代入(11), (12)式, 得一系列线性微分方程, 其形式为

$$\nabla^4 W_i = F_{i\xi}, \quad (14)$$

$$\nabla^4 \Phi_i = F_{i\eta}, \quad (15)$$

i 表示第 i 级摄动, 且

$$F_{1\xi} = \alpha_1, \quad F_{1\eta} = 0,$$

$$F_{2\xi} = \alpha_2 + 12(1-\mu^2) \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi \partial \eta} \right),$$

$$\begin{aligned}
 F_{2\eta} &= \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2}, \\
 F_{3\xi} &= \alpha_3 + 12(1 - \mu^2) \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 W_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi \partial \eta} - 2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\
 F_{3\eta} &= 2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 W_2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2}, \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}$$

边界条件中不涉及非线性项, 各级摄动方程的形式与原方程相同.

三、差分格式

对板区域进行曲四边形剖分(图1所示), 对任一差分结点0, 函数 $f(x, y)$ 在0点处的台劳展开式为

$$f = f^0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(h_x \frac{\partial}{\partial x} + h_y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f^0 + O(h^{n+1}).$$

要得到双调合方程的差分格式, 在上式中取 $n=4$, 得

$$f^j = f^0 + \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k!} \left(h_{x_j} \frac{\partial}{\partial x} + h_{y_j} \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f^0, \quad (16)$$

其中 $h_{x_j} = x_j - x_0$, $h_{y_j} = y_j - y_0$, (x_j, y_j) 为 (x_0, y_0) 的邻点. 对方程(16)加权求和, 得

$$\sum_{j=1}^{14} \beta_j (f^j - f^0) = \sum_{j=1}^{14} \beta_j \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k!} \left(h_{x_j} \frac{\partial}{\partial x} + h_{y_j} \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f^0. \quad (17)$$

在方程(17)中, 令

$$\begin{aligned}
 \sum \beta_j h_{x_j} &= 0, \quad \sum \beta_j h_{y_j} = 0, \quad \sum \beta_j h_{x_j}^2 = 0, \quad \sum \beta_j h_{y_j}^2 = 0, \\
 \sum \beta_j h_{x_j} h_{y_j} &= 0, \quad \sum \beta_j h_{x_j}^3 = 0, \quad \sum \beta_j h_{y_j}^3 = 0, \quad \sum \beta_j h_{x_j}^2 h_{y_j} = 0, \\
 \sum \beta_j h_{x_j} h_{y_j}^2 &= 0, \quad \sum \beta_j h_{x_j}^4 = 24, \quad \sum \beta_j h_{y_j}^4 = 24, \\
 \sum \beta_j h_{x_j}^2 h_{y_j}^2 &= 8, \quad \sum \beta_j h_{x_j}^3 h_{y_j} = 0, \quad \sum \beta_j h_{x_j} h_{y_j}^3 = 0.
 \end{aligned} \quad (18)$$

求解线性方程组(18), 得加权系数 β_j , 则双调合方程在节点0处的差分格式为

$$(\nabla^4 f)_0 = \sum_{j=1}^{14} \beta_j (f^j - f^0).$$

因此, 第 i 级摄动方程的差分方程可写为

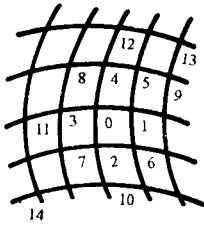


图 1

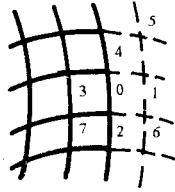


图 2

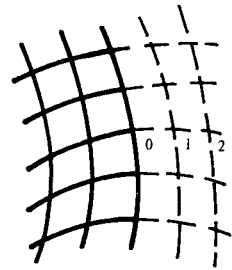


图 3

$$\sum_{j=1}^{14} \beta_j (W_i^j - W_i^0) = F_{i\xi}^0, \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^{14} \beta_j (\Phi_i^j - \Phi_i^0) = F_{i\eta}^0. \quad (20)$$

上述差分格式称为 15 点星形格式。下面讨论边界条件的差分格式。

1. 可移简支边界

每一个边界点 0 对应布置一个虚点，如图 2 所示。由于边界条件中涉及二阶导数，采用文[4]提出的 8 点星形建立导数的差分格式。虚点的差分方程由(5)，(6)式建立，边界点的函数值已由边界条件给出，不须建立其差分方程。

2. 刚性固支边界

每一边界点 0 对应布置两个虚点，如图 3 所示。由于边界条件中涉及三阶导数，为提高逼近精度，采用 15 点星形建立导数的差分格式。虚点的差分格式由(7)，(8)式建立，边界点则按内点处理。

3. 可移固支边界

处理方式与可移简支边界相同。

四、计算实例

根据上述公式，我们编制了薄板大挠度弯曲问题的通用差分程序，可以考虑任意形状板受任意荷载及多种边界条件。算例中的混合解法即为本文方法，位移解法采用位移 u, v, w 为基未位知量。关于位移解法我们将另文做详细讨论。

例 1. 四边可移简支方板受均布荷载作用， $\mu=0.3$ ，用 12×12 网格进行计算。计算结果如图 4、图 5、图 6 所示。从图中可以看出，两种算法的挠度计算精度相当。与文[5]中的更精确解比较，位移解法的弯矩精度高于混合解法的弯矩精度，而混合解法的膜力精度高于位移解法的膜力精度。

例 2. 周边刚性固支圆板受均布荷载作用， $\mu=0.3$ ，网格剖分如图 7 所示，计算结果如图 8、9、10 所示。

例 3. 四边可移简支等腰梯形板受均布荷载作用， $\mu=0.316$ ，网格剖分如图 11 所示。图 12 给出了中心点的挠度荷载曲线，级数解取自文[3]。

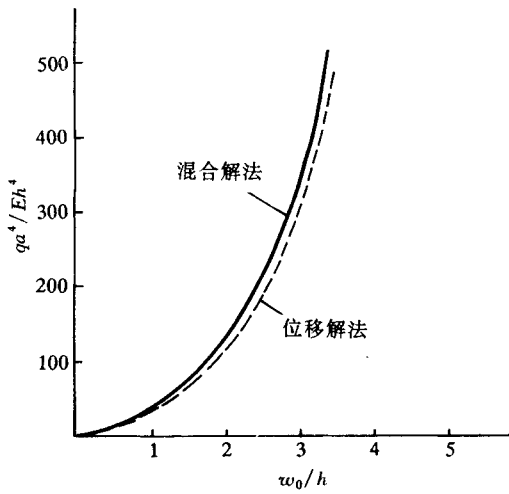


图4

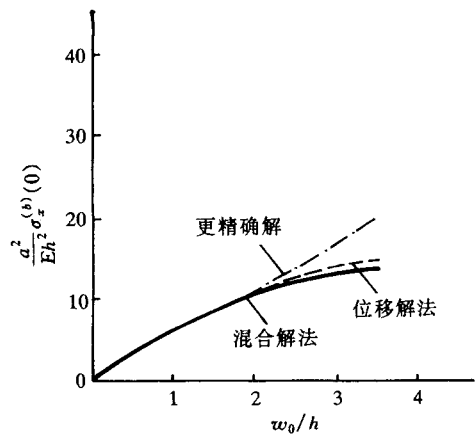


图5

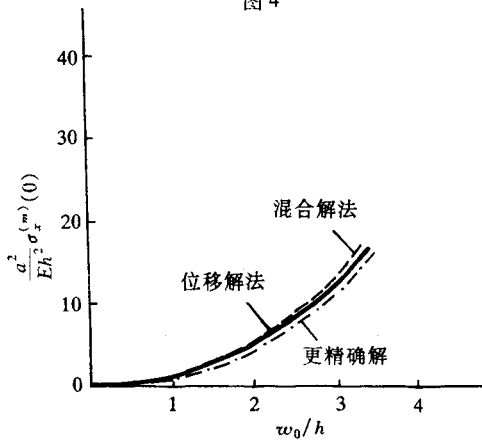


图6

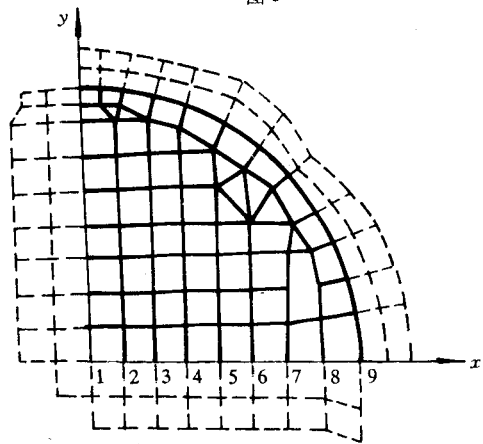


图7

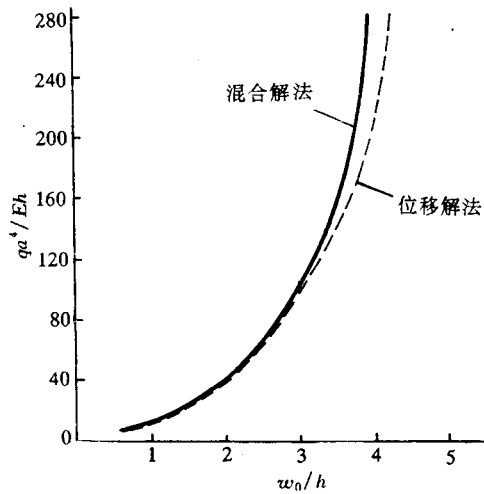


图8

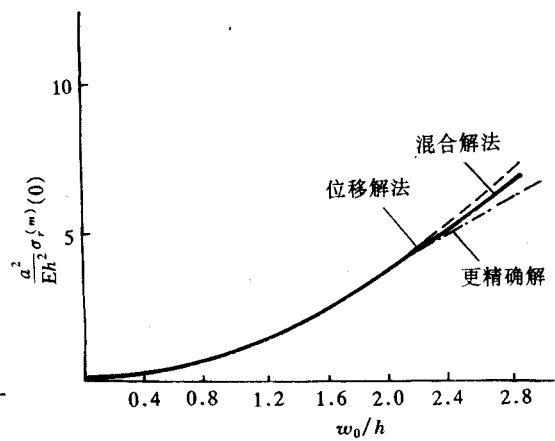


图9

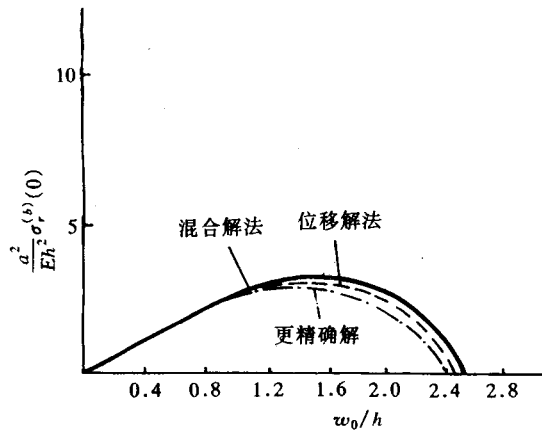


图 10

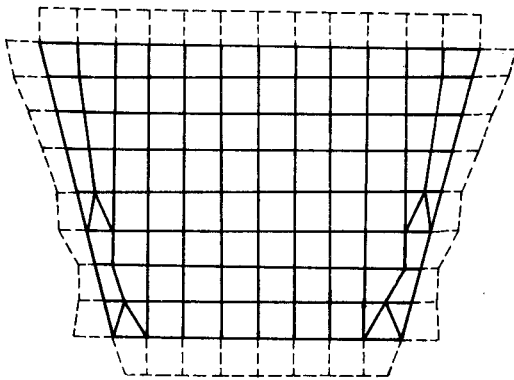


图 11

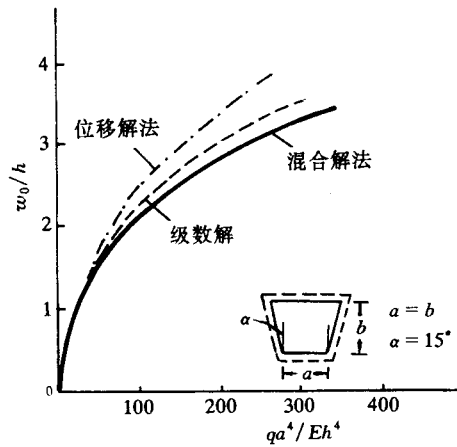


图 12

从图中可以看出，当荷载很大时，两种解法的计算结果相差较大，而混合解法的计算结果更接近级数解。当 $w_0/h < 2$ 时，两种解法的计算结果相当接近，并与级数解完全吻合。

五、结束语

1. 本文提出的求解薄板大挠度弯曲问题的非规则网格差分法，结合摄动法，可以将问题简化为一个未知量的问题来求解。大大节约了计算时间，且适应性强，可考虑任意形状的薄板受任意荷载作用及多种边界条件，具有较高的计算效率与计算精度。

2. 薄板大挠度弯曲问题可以用位移 u, v, w 来描述(称之为位移解法)，也可以用挠度 w 和应力函数 φ 来描述(称之为混合解法)。大量的计算实例表明，位移法的优点是能方便地处理各种边界条件，且挠度和弯矩的计算精度较高。缺点是未知量较多，计算量大。混合解法的优点是节点自由度少，且计算精度与位移法相当。缺点是对某些边界条件的处理不太方便。因此，对于比较简单的位移边界条件，建议用混合解法求解，而当位移

边界条件不易用 w, φ 来表达时, 就只能用位移法求解了.

参 考 文 献

- [1] 刘世宁, 弹性扁壳的广义变分原理及扁壳理论的某些应用, 力学学报, 6(1963).
- [2] 裴文瑾, 关于弹性扁壳边界补充条件问题, 力学学报, 8(1965).
- [3] 蔡松柏, 王 磊, 梯形底扁壳的线性和非线性分析, 计算结构力学及其应用, 6:1, (1989).
- [4] 刘晓明, 多格式差分法及其在结构分析中的应用, 河海大学博士论文, 1988.
- [5] A. C. 沃耳密尔, 柔韧板与柔韧壳, 科学出版社, 1963.
- [6] 李光耀, 变厚度薄板弯曲问题的任意网格差分法, 应用数学和力学, 14:3 (1993).
- [7] 徐芝伦, 弹性力学中的差分方法, 高等教育出版社, 1987.
- [8] 吴旭光, 不规则网格的差分方法, 数值计算与计算机应用, 9:1 (1988).