

二维非结构网格 Hamilton-Jacobi 方程的一种简化的加权 ENO 格式^{*1)}

唐玲艳 宋松和

(国防科技大学理学院 长沙 410073)

摘 要

考虑标量 Hamilton-Jacobi 方程, 对二维非结构网格给出了一种简化的三阶精度加权 ENO 格式. 方法的主要思想是时间和空间分开处理, 时间离散用三阶 TVD Runge-Kutta 方法. 对空间, 在每一个三角形单元上构造一个三次多项式, 该多项式是一些三次多项式的加权, 并给出了加权因子的构造方法. 最后用该格式对一些典型算例进行了数值试验, 并分析了方法的精度, 结果表明该格式是成功的.

关键词: Hamilton-Jacobi 方程, 非结构网格, 三阶精度, 加权 ENO 格式

A SIMPLIFIED WEIGHTED ENO SCHEME FOR 2D HAMILTON-JACOBI EQUATIONS ON UNSTRUCTURED MESHES

Tang Lingyan Song Songhe

(National University of Defence Technology Changsha, 410073)

Abstract

In this paper, we construct a simplified third-order weighted ENO scheme for solving Hamilton-Jacobi equations on two-dimensional unstructured meshes. The third-order TVD Runge-Kutta time discretization is used. A weighted cubic reconstruction is constructed on every triangular mesh. Numerical experiments and accuracy analysis are performed, the result is satisfactory.

Key words: Hamilton-Jacobi equation, unstructured mesh, third-order, weighted ENO scheme

Hamilton-Jacobi 方程 (简称 H-J 方程) 来源于最优控制、微分几何等学科, 近年来不断在新的领域得到应用. H-J 方程解的性质非常复杂, 一方面 H-J 方程的弱解存在但不唯一, 另一方面即使初值和 Hamilton 函数足够光滑, 其解的导数也可能在某一时刻出现间断, 导致解曲面 (线) 出现尖点或纽结等现象. 另外, H-J 方程是一类非线性方程, 一般情况下, 其解析解是很难得到的, 因此寻求解 H-J 方程的高分辨、高精度数值方法是计算数学研究的一个很重要的问题.

* 2003 年 12 月 26 日收到.

1) 国家自然科学基金资助项目, 批准号为 10001038, 国防科技大学基础研究资助项目.

1983 年, Crandall, Lions 在文 [1] 中对 H-J 方程引入了粘性解概念和粘性上下解方法, 使 H-J 方程的研究得到了蓬勃发展. 在解二维非结构网格 H-J 方程的高精度格式方面, 主要是 ENO 和 WENO 方法. 1996 年, Abgrall^[4] 基于他的一阶有限体积格式, 得到了一类非结构网格上 H-J 方程的 ENO 格式. 最近, Zhang 和 Shu^[3] 将 WENO 思想运用于求解 H-J 方程. 由于选取了合理的插值模板和权重因子, 得到了在非结构三角形网格上解 H-J 方程的三阶和四阶格式, 但该算法结构复杂, 具体实施起来十分不便.

本文尝试着对二维非结构三角形网格 H-J 方程构造了一种简化的三阶精度加权 ENO 格式, 所构造的格式是节点型的. 方法的主要思想是时间和空间分开处理, 时间离散用三阶 TVD Runge-Kutta 方法. 对空间, 在每一个三角形单元上构造一个三次多项式作为导数的三阶近似. 该多项式是在一个相对稳定的二次插值模板基础上进行三次多项式加权所得到的, 我们给出了插值模板和加权因子的选取方法, 其中二次插值模板的选择保证了格式基本无振荡, 而通过加权得到导数的三阶精度近似的方法又尽可能多地使用了周边结点信息, 提高了方法的精度. 最后用该格式对一些典型算例进行了数值试验, 并分析了方法的精度, 结果表明该格式是成功的.

本文的结构是: 第一节介绍了基本公式和给出了三阶 TVD Runge-Kutta 离散公式; 第二节给出了加权三次多项式的构造过程; 第三节给出一些典型算例的计算结果以及格式的精度分析.

§1. 基本格式的构造与时间离散

考虑二维 H-J 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (1)$$

其中 $H(\cdot, \cdot)$ 为 Lipschitz 连续的 Hamilton 函数. 记 T_h 为求解区域 Ω 上的一个三角剖分, 其结点集为 $\{i; i = 1, 2, \dots, N\}$. $V(i)$ 表示所有以结点 i 为顶点的三角形单元的并集, 将 $V(i)$ 中的元素按逆时针顺序排列, 有 $V(i) = \{T_l; l = 0, 1, \dots, K_i\}$. 如图 1, 记 θ_l 为单元 T_l 在 i 点处的内角, $\mathbf{n}_{l+\frac{1}{2}}$ 表示沿单元 T_l 和 T_{l+1} 公共边, 方向向外的单位向量. u_i 表示 u 在结点 i 处的近似值, $(\nabla u)_l$ 表示 u 在单元 T_l 中的梯度向量, 此处, $(\nabla u)_l = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{T_l}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{T_l} \right)$.

我们采用时间和空间分开处理的方法. 首先利用 Abgrall 在文 [4] 中提出的全局 Lax-Friedrich 型单调 Hamilton 数值通量 \hat{H} , 将 (1) 化成如下半离散形式:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_i(t) &= L(u_i) = -\hat{H}((\nabla u)_0, \dots, (\nabla u)_{k_i}) \\ &= - \left(H \left(\frac{\sum_{l=0}^{k_i} \theta_l (\nabla u)_l}{2\pi} \right) - \frac{\alpha}{\pi} \sum_{l=0}^{k_i} \beta_{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{(\nabla u)_l + (\nabla u)_{l+1}}{2} \right) \cdot \mathbf{n}_{l+\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\beta_{l+\frac{1}{2}} = \tan\left(\frac{\theta_l}{2}\right) + \tan\left(\frac{\theta_{l+1}}{2}\right),$$

$\alpha = \max\{\max |H_1(u, v)|, \max |H_2(u, v)|\}$ (H_1, H_2 是 H 关于 u_x, u_y 的偏导数).

时间方向的离散采用 Shu 和 Osher^[5] 提出的 TVD Runge-Kutta 方法, 以下是三阶 TVD Runge-Kutta 方法的公式:

$$\begin{aligned} u_i^{(0)} &= u_i, \\ u_i^{(1)} &= u_i^{(0)} + \Delta t L(u_i^{(0)}), \\ u_i^{(2)} &= \frac{3}{4}u_i^{(0)} + \frac{1}{4}u_i^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u_i^{(1)}), \\ u_i^{(new)} &= \frac{1}{3}u_i^{(0)} + \frac{2}{3}u_i^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u_i^{(2)}). \end{aligned} \quad (3)$$

为使 (3) 式的空间离散具有高阶精度, 将在每一个三角形单元上构造出一个适当的三次插值多项式, 再用所得的多项式来计算 (2) 中的梯度值, 使得格式整体具有三阶精度, 并能较好地分辨导数的间断.

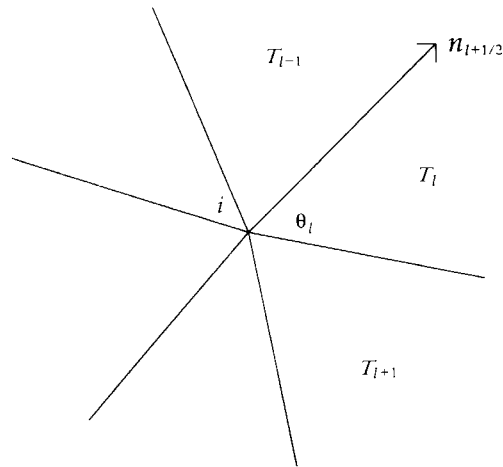


图 1

§2. 加权 ENO 型多项式的构造

下面介绍如何在每一个三角形单元上构造加权三次多项式, 设每个网格点上的值是已知的, 为考察函数 $p(x, y)$ 的一阶导数在网格 Δ_0 内的光滑程度, 我们定义光滑度指标^[5].

$$\gamma = \sum_{2 \leq |\omega| \leq k} \int_{\Delta_0} |\Delta_0|^{|\omega|-1} (D^\omega p(x, y))^2 dx dy, \quad (4)$$

其中 $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ 是一个复指标, $|\omega| = \omega_1 + \omega_2$, $D^\omega p(x, y) = \frac{\partial^{|\omega|} p(x, y)}{\partial \omega_1 x \partial \omega_2 y}$. γ 越小, 则所对应的函数越光滑 (这个定义与非结构网格双曲守恒律方程 [6] 中的光滑度指标定义略有不同, 此处的求和范围是: $2 \leq |\omega| \leq k$, 而在 [6] 中是: $1 \leq |\omega| \leq k$. 一个直观的解释

是, H-J 方程在某种意义上相当于双曲守恒律方程“积分一次”的结果, 所以其光滑度指标中包含的导数阶数应该比双曲守恒律方程高出一阶).

加权多项式构造的主要过程是: 先对单元构造出一个光滑度指标最小的二次插值, 然后根据该二次插值确定构造三次多项式所需要的插值模板, 再对所有可能的三次多项式进行加权, 加权因子的大小取决于相应三次多项式在该网格单元内的光滑程度. 因为在构造三次多项式时, 只选取了适当的几个网格点处的值, 因而简化了插值过程, 而对几个三次多项式加权又取得了较多的模板信息, 并且使得该方法适用于任何形状的三角形网格.

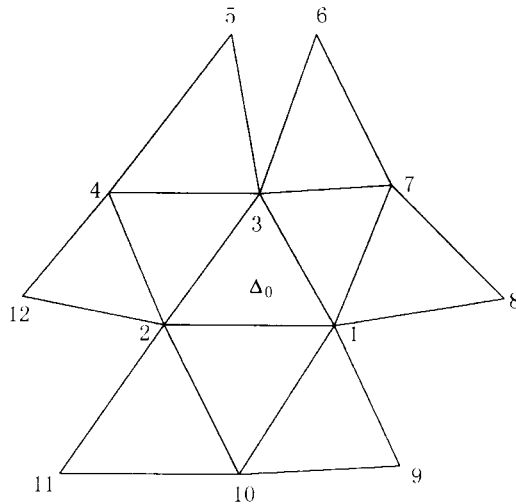


图 2

如图 2, 对于三角形单元 Δ_0 , 我们可以找到它周围的 12 个网格点, 记网格点 $i (i = 1, 2, \dots, 12)$ 处的坐标值为 (x_i, y_i) , 函数值为 u_i . 现以 Δ_0 为例来说明构造加权三次多项式的过程.

首先在单元 Δ_0 上构造一个二次插值多项式, 这需要 6 个点, Δ_0 的三个顶点显然包含在内. 考虑如下 3 个候选模板: $\{1, 2, 3, 4, 5, 12\}$, $\{1, 2, 3, 9, 10, 11\}$, $\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$. 设构造的多项式为

$$p_k^2(x, y) = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (5)$$

采用的约束条件如下:

$$p_k^2(x_i, y_i) = u_i, \quad (6)$$

其中 i 是构造 $p_k^2(x, y)$ 相应的网格点号.

在式 (5) 中, 我们选取一个光滑度指标最小的, 即最光滑的一个. 为下面叙述方便, 不妨设该二次多项式是由模板 $\{1, 2, 3, 4, 5, 12\}$ 确定的, 在此基础上确定一个三次多项式还需要四个约束条件, 即还得有四个网格点的信息. 选择的方式是在网格点 6, 8, 9, 11 中任取两个, 再加上 7, 10, 由这十个网格点上值来确定三次多项式, 这样得到的多项式有六个, 记

为 $p_k^3(x, y)$, $k = 1, 2, \dots, 6$. 构造 $p_k^3(x, y)$ 的约束条件是

$$p_k^3(x_i, y_i) = u_i, \quad (7)$$

$k = 1, 2, \dots, 6$, i 是构造 $p_k^3(x, y)$ 相应的 10 个网格点号.

利用 (4) 式, 计算第 k 个三次多项式 $p_k^3(x, y)$ 的光滑度指标 γ_k , 令

$$\tau_k = \frac{1}{(\varepsilon + \gamma_k)^2}, \quad \varepsilon = 10^{-6}. \quad (8)$$

作如下加权三次多项式:

$$p^3(x, y) = \sum \frac{\tau_k}{\sum \tau_k} p_k^3(x, y), \quad (9)$$

$\tau_k / \sum \tau_k$ 为 $p_k^3(x, y)$ 的加权因子, 容易知道, 在光滑区域

$$\frac{\tau_k}{\sum \tau_k} = O(1), \quad (10)$$

但在解出现间断的区域

$$\frac{\tau_k}{\sum \tau_k} = \frac{1}{(\varepsilon + O(1))^2} = \frac{O(1)}{\sum \tau_k} \leq \max(O(\varepsilon^2), O(h^4)). \quad (11)$$

在构造加权三次多项式的过程中, 我们通过适当选择插值模板和加权因子, 保证了格式在解的间断点附近保持高阶, 且基本不振荡.

设 $u(x, y)$ 是某一单元内的精确解, 而 $p^3(x, y)$ 是相应单元上构造的三次多项式, 且它满足 (7), 则容易知道

$$\frac{\partial p^3(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = O(h^3), \quad (12)$$

$$\frac{\partial p^3(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = O(h^3). \quad (13)$$

由以上所构造的加权三次多项式加上 (2), (3) 就是我们构造的加权 ENO 格式.

§3. 数值试验以及精度分析

我们利用所构造的加权 ENO 格式对 H-J 方程的几个典型问题进行数值试验, 计算网格如图 3.

算例 1. 为了分析上述格式的精度, 考虑如下线性 H-J 方程:

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_y = 0, \\ u(x, y, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x + y)\right), \end{cases} \quad -2 \leq x < 2, \quad -2 \leq y < 2.$$

取 (2) 中 $\alpha = 1.0$, 对单元数在 32, 128, 512, 2084, 8192 的情形分别进行了, 从 L_∞ 范数和 L_1 范数对所构造格式的精度进行了近似的分析, 分析结果见表 1.

表 1 二维线性 H-J 方程的收敛性分析, $t = 1$

单元数 N	L_∞ 范数	精度	L_1 范数	精度
32	5.126e-1	—	3.845e-1	—
128	9.87e-2	2.3767	6.71e-2	2.5186
512	1.38e-2	2.8384	8.9e-3	2.9144
2048	1.8e-3	2.9386	1.1e-3	3.0163
8192	2.2706e-4	2.9869	1.4420e-4	2.9314

从上表中可以看出, 我们发展的格式接近 3 阶.

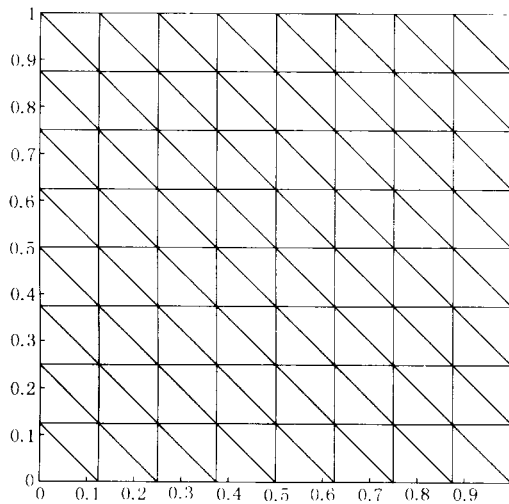


图 3

算例 2. 解二维 Burgers 方程

$$\begin{cases} u_t + \frac{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^2}{2} = 0, \\ u(x, y, 0) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right), \end{cases} \quad -2 \leq x < 2, \quad -2 \leq y < 2.$$

当 $t \leq 0.5/\pi^2$ 时, 问题的解是光滑的, 而当 $t = 1.5/\pi^2$ 时, 导数出现间断 (奇点). 我们取 (2) 中 $\alpha = 6.0$, 单元数为 512, 初始时刻曲面和 $t = 1.5/\pi^2$ 时刻的结果曲面如图 4, 图 5. 在计算过程中可以观察到少量振荡, 但格式很快收敛, 可以看到解曲面在 $t = 1.5/\pi^2$ 时刻出现了明显的折点.

算例 3. 求解如下几何光学中的二维非凸 eikonal 方程问题

$$\begin{cases} u_t + \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1} = 0, \\ u(x, y, 0) = 0.25(\cos(2\pi x) - 1)(\cos(2\pi y) - 1) - 1, \end{cases} \quad 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1.$$

我们取 (2) 中 $\alpha = \sqrt{2}/2$, 单元数为 2084, 初始时刻曲面和 $t = 0.6$ 时刻的结果曲面如图 6, 图 7. 由结果可以看出, 我们所构造的格式对尖点具有较强的分辨能力.

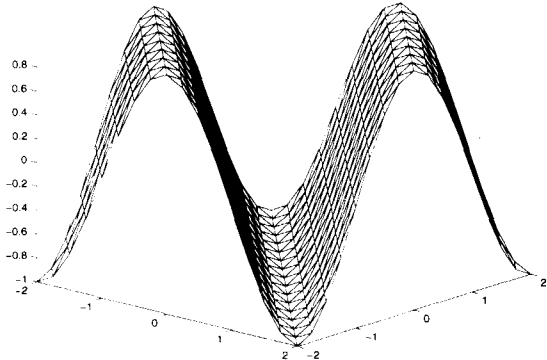


图 4

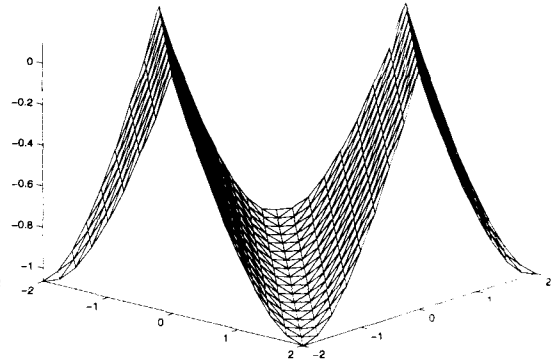


图 5

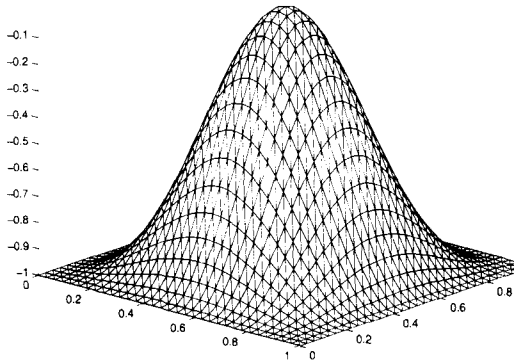


图 6

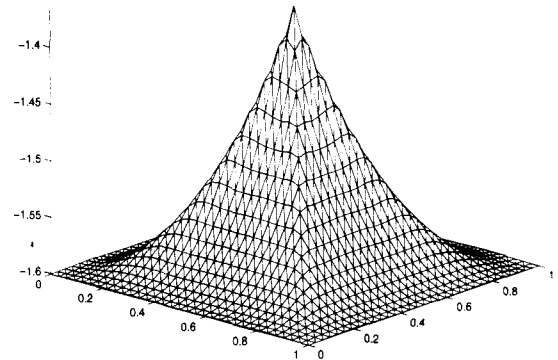


图 7

§4. 结 论

本文中, 我们对二维非结构网格上的标量 H-J 方程构造了一种简化的三阶精度加权 ENO 格式. 格式的主要特点是, 在空间离散方面, 先对每一个网格构造一个最稳定的二次插值模板, 再在此模板基础上添加四个点的信息, 通过加权得到最终的三次插值多项式. 二次模板的选择避免了格式在导数的奇异点附近发生振荡, 而得到三次多项式过程中的加权又尽可能多地使用了周边结点的信息, 提高了格式的精度. 另外, 我们这种在二次插值模板的基础上进行三次加权的方法, 大大地简化了选择三次加权模板的过程, 提高了计算速度. 本方法适用于在任何形状的三角形网格上求解 H-J 方程.

参 考 文 献

- [1] Crandall M, Lions P. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 277:1(1983) 1~42.
- [2] 李荫藩, 宋松和, 一种简化的三阶精度加权 ENO 格式, *数值计算与计算机应用*, 19:2(1998) 127-134.
- [3] Yong-Tao Zhang, Chi-Wang Shu. High Order WENO Schemes for Hamilton-Jacobi Equations on Triangular Meshes, *SIAM J. Sci. Comput*, 24(2003) 1005-1030.
- [4] R. Abgrall, Numerical discretization of the first-order Hamilton-Jacobi equation on triangular meshes, *Comm. on Pure and Appl. Math*, 49(1996) 1339-1373.
- [5] Shu C.-W, Osher S, Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes. *J Comput Phys*, 77(1988) 439-471
- [6] Liu X.-D, Osher S, Chan T, Weighted essentially non-oscillatory schemes, *J. Comput. Phys.* 115(1994) 200-212.
- [7] Jiang G.-S, Peng D, Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations, *SIAM J. Numer. Anal*, 21(2000) 2126-2143.