

二维非结构网格的非振荡有限体积方法^{*1)}

宋松和

(国防科技大学理学院 长沙 410073)

全惠云

(湖南师范大学理学院 长沙 410006)

A NONOSCILLATORY FINITE VOLUME METHOD FOR 2D HYPERBOLIC CONSERVATION LAWS ON UNSTRUCTURED MESHES

Song Songhe

(*National University of Defence Technology*)

Quan Huiyun

(*Hunan Normal University*)

Abstract

A second nonoscillatory finite volume scheme, based on a new linear reconstruction to the flow variable, is given for 2d hyperbolic conservation laws on unstructured triangular mesh. Numerical results for plate shock wave reflection and cavity flow are presented.

Key words: finite volume, unstructured mesh, linear reconstruction

§1. 引言

自从 1983 年 Harten^[1] 提出了 TVD 格式后, 高分辨率有限差分方法 (TVD, ENO 等) 在计算流体力学领域已经得到了广泛的应用, 并取得了很好的计算效果, 但对几何形状非常复杂的计算问题, 有限差分方法有一定的局限性. 非结构网格有限体积方法可以计算任何几何形状的二, 三维问题, 所以对非结构网格以及有限体积方法的研究越来越受到人们的重视^[2-5].

本文考虑二维双曲型方程, 对非结构三角形网格给出了一个非振荡有限体积方法. 在计算过程中以每一个三角形单元作为控制体积, 所以计算出来的值是单元上的网格平均值. 为使方法具有二阶精度且在计算间断问题时不会出现振荡, 我们构造了一种新型非振荡的线性重构函数, 并用二步的 Runge-Kutta 方法对时间进行离散. 该方法较^[2-4]有构造重构函

* 2002 年 11 月 28 日收到.

1) 国家自然科学基金资助项目, 批准号 10001038; 国防科技大学基础研究资助项目.

数简单的优点, 同时又能保证数值结果非振荡. 最后用该方法对平面激波反射、空穴流动进行了数值计算, 得到了比较满意的结果.

§2. 数值方法

考虑二维纯量双曲型守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

我们采用的计算网格是如下的三角形网格, 分别记为 T_1, \dots, T_{10} .

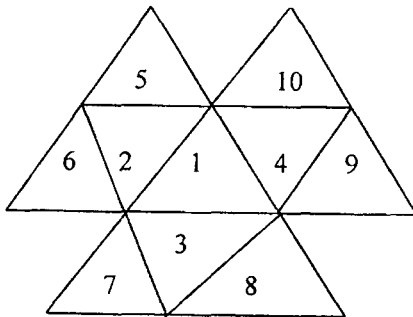


图 1

记 $F = f i + g j$, $X = (x, y)$, 对 (1) 式在三角形 T_1 上积分得

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{T_1} u d\Omega = - \int_{T_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) d\Omega. \quad (2)$$

由 Green 公式可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_{T_1} = - \frac{1}{|T_1|} \sum_{k=1}^3 \int_{l_{T_{1k}}} F \cdot \mathbf{n}_{T_{1k}} dl, \quad (3)$$

其中 $\bar{u}_{T_1} = \frac{1}{|T_1|} \int_{T_1} u d\Omega$, $|T_1|$ 是 T_1 的面积, $l_{T_{1k}}$ 表示 T_1 的第 K 条边.

在对方程 (3) 离散时, 由于计算出来的值是单元上的网格平均值, 为了保证计算结果有二阶精度, 所以在每一个三角形单元上必须对变量进行重构以得出变量的高阶近似. 现在以三角形单元 T_1 为例来描述我们的重构思想.

在二维平面上确定一个线性多项式一般需要三个约束条件, 为了获取流场中更多的信息, 我们采用四个网格平均值来确定一个线性多项式. 如图 1, 用 T_1, T_2, T_5, T_6 四个单元上的网格平均值确定线性多项式时多了一个约束条件. 我们采用了最小平方方法可以唯一地得到一个一次多项式 $P_{T_{11}}$, 同理用 T_1, T_3, T_7, T_8 和 T_1, T_4, T_9, T_{10} 分别可以得到一次多项式 $P_{T_{12}}, P_{T_{13}}$, 另外由 T_1, T_2, T_3, T_4 也可以确定多项式 $P_{T_{14}}$, 对四个多项式可以从其中选取一个“最理想”的作为重构多项式进行计算. 选取的原则如下:

为了描述方便, 用 $X_{T_1}, X_{T_2}, X_{T_3}, X_{T_4}$ 分别表示 T_1, T_2, T_3, T_4 的形心, 而用 $X_{T_{12}}, X_{T_{13}}, X_{T_{14}}$ 分别是 T_1 与 T_2, T_1 与 T_3, T_1 与 T_4 公共边的中点, 并记 $|\nabla P_{1k}| = \left| \frac{\partial}{\partial x} P_{1k} \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} P_{1k} \right|, k = 1, 2, 3, 4$. 我们从这四个中选一个作为变量 f (其网格平均值记为 \bar{f}) 在 T_1 上的近似多项式 $f_{T_1}(X)$. 选的过程如下:

(1) 从 $P_{T_{11}}, P_{T_{12}}, P_{T_{13}}, P_{T_{14}}$ 中选取 $|\nabla P_{1k}|$ 最小的一个为 $f_{T_1}(X)$ (有可能“光滑”些).

(2) 若下列三条都满足, 则 $f_{T_1}(X)$ 即为选出的 $P_{T_{1k}}$

$$f_{T_1}(X_{T_{12}}) \text{ 在 } \bar{f}_{T_1} \text{ 与 } \bar{f}_{T_2} \text{ 之间,}$$

$$f_{T_1}(X_{T_{13}}) \text{ 在 } \bar{f}_{T_1} \text{ 与 } \bar{f}_{T_3} \text{ 之间,}$$

$$f_{T_1}(X_{T_{14}}) \text{ 在 } \bar{f}_{T_1} \text{ 与 } \bar{f}_{T_4} \text{ 之间.}$$

(3) 若上述三条不成立, 则从 $|\nabla P_{1k}|$ 中取第二小的, 再验证 (2), 若还不满足, 则取第三小的直至最后一个 $|\nabla P_{1k}|$, 再验证 (2). 如果四个都不满足, 则说明 X_{T_1} 是局部极值点, 取 $f_{T_1}(X) = \bar{f}_{T_1}(X)$, 这样可以保证在计算间断解时不会出现振荡.

为了使方法在整体保持二阶精度, 我们对时间的离散采用二步 TVD Runge-Kutta 方法.

§3. 数值实验

为了分析方法的精度, 我们首先计算了有精确解的 Burgers 方程

$$u_t + uu_x + uv_y = 0, u(0, x, y) = 0.25 + 0.5 \sin(\pi(x + y)).$$

计算区域为 $[-1, 1] \times [-1, 1]$, 在时间 $t=0.1$ 时解是光滑的, 通过数值计算得到此方法的精度 (在 L_1 误差下) 约为 1.77. 我们也将上述数值方法应用于典型的平面激波反射问题、空穴流动进行了计算. 对平面激波反射, 采用 Euler 方程, 来流马赫数是 2.9, 激波入射角为 29 度, 流动方向 x 方向和 y 方向的长度分别为 4 和 1, 图 2 给出了等马赫线图. 为了经验方法对粘性问题的计算能力, 对空穴流动问题, 控制方程采用无量刚化的二维 Navier-Stokes 方程, 边界条件是: 空穴的上方 $u=1, v=0$, 其它三方 $u=0, v=0$, $Re=1000, Ma=0.75$, 图 3 给出了不同时刻的速度矢量图. 数值结果表明该方法是可行的.

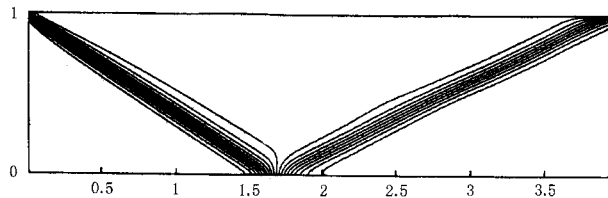
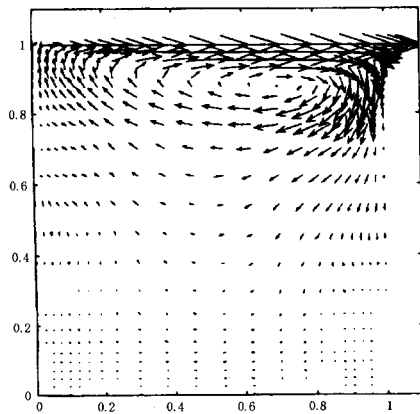
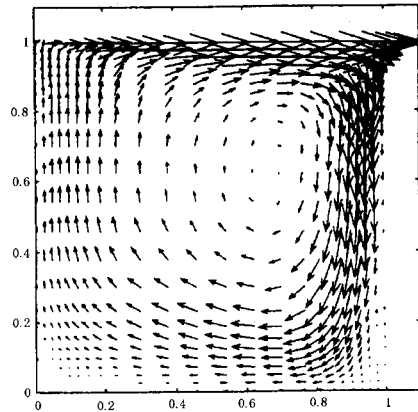


图 2 平面激波反射的等马赫线图

图 3(a) 空穴流动的速度矢量图 ($t=0.25$)图 3(b) 空穴流动的速度矢量图 ($t=15$)

参 考 文 献

- [1] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Phys.*, 49:3 (1983), 357-393.
- [2] Abgrall R. On essentially non-oscillatory schemes on unstructured meshes: *J. Comp. Phys.*, 14:1 (1994), 45-58.
- [3] Liu X.D. A maximum principle satisfying modification of triangle based adaptive stencils for the solution of scalar hyperbolic conservation laws: *SIAM J. Numer. Anal.*, 30:3 (1993), 701-716.
- [4] Durlofsky L. Engquist B. Osher S. Triangle based adaptive stencil for the solution of hyperbolic conservation laws, *J. Comp. Phys.*, 98:1 (1992), 64-73.
- [5] 宋松和, 非结构网格高精度方法的研究, 北京航空航天大学博士后出站报告 (第二部分), 北京, 1998.