

二维三温热传导方程组的 九点差分格式^{*1)}

符尚武 付汉清 沈隆钧

(北京应用物理与计算数学研究所, 计算物理实验室, 北京 100088)

A NINE-POINT DIFFERENCE SCHEME FOR THE TWO-DIMENSIONAL EQUATIONS OF HEAT CONDUCTION WITH THREE-TEMPERATURE

Fu Shang-wu Fu Han-qing Shen Long-jun

(Laboratory of Computational Physics, Institute of Applied Physics and Computational
Mathematics)

Abstract

In this paper, we present a nine-point difference scheme for two-dimensional equations of heat conduction with three-temperature. Finally, the calculated result are compared with the five-point scheme.

§ 1. 引言

在惯性约束聚变(ICF)的二维数值模拟中,常常要耦合求解包括电子热传导、离子热传导和光子热传导的辐射流体力学方程组,其中带有不同能量之间交换的三温热传导方程组的求解占有重要的位置,在高温高压等离子体的二维流场运动中,拉格朗日网格必然会发生扭曲,尤其在网格变形较大的情况下,如何给出解三温热传导方程组的差分格式和解法是值得探讨的一个重要问题.本文给出了能适应各种二维拉格朗日网格的三温热传导方程组的九点差分格式,并与五点差分格式作了对比计算.

* 1998年2月17日收到.

1) 本工作得到国家高技术 863 计划惯性约束聚变委员会和中国工程物理研究院科学基金的资助.

§ 2. 三温热传导方程组及其九点差分格式

拉格朗日坐标系下, 包括电子温度 T_e , 离子温度 T_i 和光子温度 T_r 的三温热传导方程组为

$$\begin{cases} C_{ve} \frac{\partial T_e}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(K(\rho, T_e) \operatorname{grad} T_e) + w_{ei}(T_i - T_e) + w_{er}(T_r - T_e) \\ C_{vi} \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(K(\rho, T_i) \operatorname{grad} T_i) - w_{ei}(T_i - T_e) \\ C_{vr} \frac{\partial T_r}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(K(\rho, T_r) \operatorname{grad} T_r) - w_{er}(T_r - T_e) \end{cases} \quad (1)$$

边界条件:

- (1) 固壁和轴 (x 轴) 对称条件, $(F_n)_\alpha = 0, \alpha = e, i, r.$
- (2) 自由面边界条件: $(F_n)_{e,i} = 0, T_r = T_r(x, Y, t).$

初始条件: $T_\alpha(x, y, 0) = T_\alpha^0(x, y), \alpha = e, i, r.$

其中, 计算区域 $\Omega = \Omega_{xy} \times \Omega_t, \Omega_{xy} = \{(x, y) | 0 \leq |x| \leq X; 0 \leq |y| \leq Y\}, \Omega_t = \{0 \leq t \leq T\}; w_{ei}, w_{er}$ 分别为电子与离子、电子与光子的能量交换系数, n 为垂直于界面的外单位向量.

选取两族曲线 $k = 1, 2, \dots, km, km + 1$ 和 $j = 1, 2, \dots, jm, jm + 1$ 把 (x, y) 平面上的计算区域 Ω_{xy} 划分为 $km \times jm$ 个四边形, 再沿曲线方向用折线把这些交点连接起来, 使得这些四边形既不重叠又把整个计算区域 Ω_{xy} 近似地分光. 这些四边形称为网格, 交点称为结点. 温度、密度等建立在网格中心 $(k + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}), k = 1, 2, \dots, km; j = 1, 2, \dots, jm.$

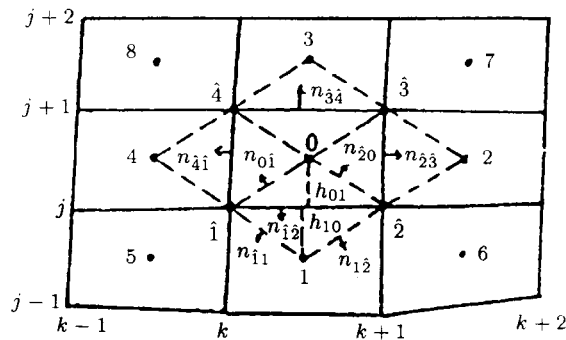


图 1 九点差分格式示意图

如图 1 所示, 用阿拉伯数字表示网格中心, 用戴帽子“ $\hat{}$ ”的阿拉伯数字表示网格结点. 我们在四边型网格 $\hat{1}\hat{2}\hat{3}\hat{4}$ 上建立 (1) 的差分方程, 网格中心用 $0(k + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ 表示, 它也代表本网格. 那么, 略去推导过程, 方程组 (1) 的九点差分格式为 (为了书

写方便, 在以下公式中略去了下标 $0(k + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{ve}^{n+1} \frac{T_e^{n+1} - T_e^n}{\Delta T} = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^4 [(K_e S)_{i,i+1}^{n+1} (T_l - T_e)^{n+1}] \\ \quad - \frac{1}{M} \sum_{l=1}^4 [(K_e SD)_{i,i+1}^{n+1} (T_{i+1} - T_l)_e^{n+1}] + w_{ei}^{n+1} (T_i - T_e)^{n+1} + w_{er}^{n+1} (T_r - T_e)^{n+1} \\ C_{vi}^{n+1} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^4 [(K_i S)_{i,i+1}^{n+1} (T_l - T_i)^{n+1}] \\ \quad - \frac{1}{M} \sum_{l=1}^4 [(K_i SD)_{i,i+1}^{n+1} (T_{i+1} - T_l)_i^{n+1}] - w_{ei}^{n+1} (T_i - T_e)^{n+1} \\ C_{vr}^{n+1} \frac{T_r^{n+1} - T_r^n}{\Delta t} = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^4 [(K_r S)_{i,i+1}^{n+1} (T_l - T_r)^{n+1}] \\ \quad - \frac{1}{M} \sum_{l=1}^4 [(K_r SD)_{i,i+1}^{n+1} (T_{i+1} - T_l)_r^{n+1}] - w_{er}^{n+1} (T_r - T_e)^{n+1} \end{array} \right. \quad (2)$$

其中

$$D_{i,i+1} = \frac{(y_{i+1} - y_i)(y_l - y) + (x_{i+1} - x_i)(x_l - x)}{L_{i,i+1}^2}$$

$L_{i,i+1}$ 为网格边界 $\hat{l}, \hat{l} + \hat{1}$ 的长度, $S_{i,i+1}$ 为其绕对称轴旋转面的面积, M 表示网格的质量. 上述差分方程中出现的 T_l ($l = 1, 2, 3, 4$) 表示网格中心的温度, $T_{\hat{l}}$ ($\hat{l} = \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$) 表示网格节点的温度, 由于温度是定义在网格中心, 所以结点上的温度用其周围四个网格中心的温度的某种平均值来确定. 因此, 要确定网格 $(k + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ 的温度 T_α ($\alpha = e, i, r$) 要涉及周围八个网格以及本网格共九个网格, 所以把上述差分格式称为九点格式; 若涉及相邻四个网格以及本网格共五个网格, 则称为五点格式.

§ 3. 数值实验及讨论

为了阐述九点差分格式在不同网格剖分情况下的适应能力, 设计一个一维物理模型采用二维程序进行计算. 考虑在正方形区域 $y = Y$ 的边界上均匀给出温度源 $T_r(x, Y, t)$, 其余三边界均为固壁边界条件下温度随时间的传播, 该区域采用正弦曲线网格剖分 (如图 (2.a) 所示).

由九点格式得到单位时间通过四边形网格 $\hat{1}\hat{2}\hat{3}\hat{4}$ 四个界面 $S_{\hat{1}\hat{2}}, S_{\hat{2}\hat{3}}, S_{\hat{3}\hat{4}}$ 和 $S_{\hat{4}\hat{1}}$ (图 1) 的热流量为

$$\sum_{l=1}^4 (FS)_{i,i+1} = \sum_{l=1}^4 (KS)_{i,i+1} (T_l - T_0) - \sum_{l=1}^4 [(KSD)_{i,i+1} (T_{i+1} - T_l)] \quad (3)$$

若用五点格式则 (3) 式右边只有第一项, 而无第二项.

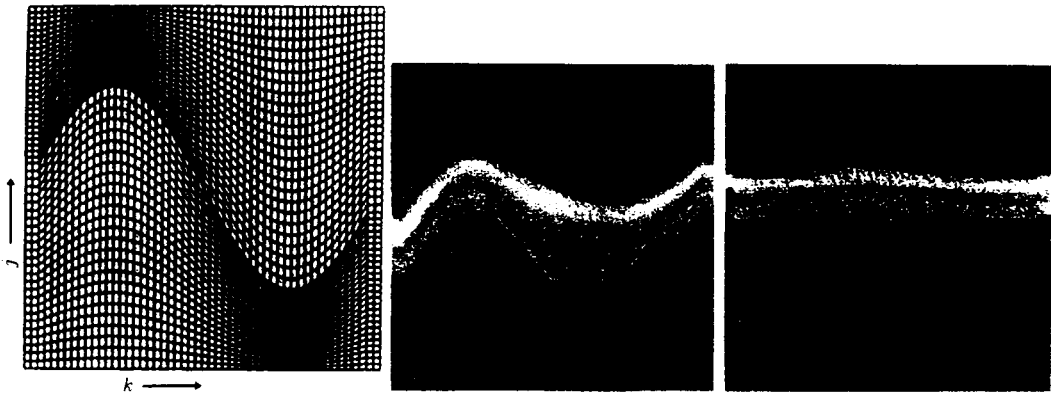
图 2b. $t = 0.5 \text{ ns}$ 时刻的温度分布图

图 2a. 正方形区域网格剖分图 左图为五点差分格式的计算结果, 右图为九点差分格式的计算结果

表 1 九点和五点格式界面流计算结果的比较

网格编号 (k, j)	九点格式	五点格式 (第一项)	第二项
(1, 45)	1.56937	1.56937	0.0
(25, 45)	-9.71295	-8320.22558	8310.51263
(30, 45)	2.14127E-3	-1.15988E-3	3.30114E-3

表 1 为图 2(a) 中三个网格的界面流, 网格编号用四边形网格左下角结点的编号表示, 编号 (1, 45) 为正交网格, 其余两个为非正交网格. 从表 1 可以看出: 在正交网格的情况下, 右边第二项等于零, 九点和五点格式计算的结果是相同的; 在非正交网格的情况下, 特别是网格变形较大的情况下, 两者的计算的结果相差很大. 图 2(b) 为时间 $t = 0.5(\text{ns})$ 时刻的温度分布图, 它表明九点差分格式的计算结果正确地反映了温度变化的客观物理图像, 不受网格形状的影响; 而五点差分格式计算结果歪曲了温度的真实变化, 它强烈地依赖于网格的形状, 在不规则网格上使计算结果严重失真.

参 考 文 献

- [1] Kershaw D.S., *J. Comput. Phys.*, **39** (1981), 375-395.
- [2] 符尚武等, 计算物理, **15**:4 (1998), 489-497.