

非均匀 B 样条曲面顶点及法向插值^{*1)}

刘 浩 廖文和

(南京航空航天大学机电学院)

摘 要

本文以非均匀 Catmull-Clark 细分模式下的轮廓删除法为基础, 通过在细分网格中定义模板并调整细分网格的顶点位置, 为非均匀 B 样条曲面顶点及法向插值给出了一个有效的方法. 该细分网格由待插顶点形成的网格细分少数几次而获得. 细分网格的顶点被分为模板内的顶点和自由顶点. 各个模板内的顶点通过构造优化模型并求解进行调整, 自由顶点用能量优化法确定. 这一方法不仅避免了求解线性方程组得到控制顶点的过程, 而且在调整顶点的同时也兼顾了曲面的光顺性.

关键词: 非均匀 B 样条, 曲面, 非均匀 C-C 细分, 插值, 法矢量, 网格

POINTS AND NORMALS INTERPOLATION OF NON-UNIFORM B-SPLINE SURFACES

Liu Hao Liao Wenhe

(College of Mechanical and Electrical Engineering,
Nanjing University of Aeronautics & Astronautics)

Abstract

Based on the skirt removed approach under the non-uniform Catmull-Clark subdivision scheme, an efficient algorithm is given for points and normals interpolation of non-uniform B-spline surfaces by defining templates in subdivision meshes and adjusting positions of subdivision mesh vertices. The subdivision mesh is obtained by subdividing the mesh several times, which is formed by given points. Vertices in templates are adjusted by solving optimization models. Free vertices are computed by the energy optimization method. The algorithm not only avoids computing control vertices by solving linear systems but also gives attention to the fairness of surfaces while adjusting control vertices.

Key words: non-uniform B-spline, surface, non-uniform C-C subdivision, interpolation, normal, mesh

* 2005 年 7 月 8 日收到.

1) 国防科工委基础科研项目 (项目编号: K1605061115).

§1. 引 言

曲面的顶点及法向插值问题在 CAGD 领域很受关注, 它在许多方面有着重要的应用, 如人眼的角膜重构^[1]、透镜曲面校正^[2]及图形真实感处理^[3]等. 已有的插值方法大致可分为两种类型: 分片构造法^[2,4,5,6]与整体构造法^[7-11]. 前一类方法的基本思路是先根据插值条件构造出一系列的子曲面片, 然后把这些子曲面片拼合成复杂曲面. 这需要考虑曲面的拼接问题, 比较繁琐^[11]. 如文献[4]就通过构造三角 B-B 曲面片去实现顶点与法向的插值. 文献[3]为了实现 Phong 光照效果, 也提出用三角 B-B 曲面片去插值于顶点及边中点的法向. 后一类方法是随着细分技术日益受到人们的重视而逐渐提出的, 其基本思路是确定曲面的细分网格或控制网格以后一次性地构造出整张曲面. 这一类方法又可以分为两种: 通过修改已有细分规则(或给出新细分规则)来构造曲面^[7]和基于现有经典细分规则来构造曲面^[8-11]. 由于修改已有规则或构造新细分规则可能导致曲面不光滑^[11], 所以后一种基于经典细分规则构造曲面的方法受到人们的重视. 文献[8]根据 Catmull-Clark 细分模式把曲面的初始细分网格顶点表示为待插顶点及待插法矢量的线性组合, 然后通过线性方程组解出初始细分网格顶点, 再对网格细分得到所需要的结果曲面. 文献[9]的思路是, 先根据待插顶点的位置通过解线性方程组构造出一个与待插顶点网格 P^0 拓扑同构的网格 P^1 , 使得对 P^1 进行一次 Doo-Sabin 细分后, 对于每一个待插顶点, 新网格 P^2 中都有一个面与之对应, 且对应面的重心与该待插顶点重合. 得到新网格 P^2 后, 将 P^2 中与待插点对应的面进行一次旋转, 使该面的法矢与对应的待插法矢重合, 这样就得到所需要的初始细分网格 P^3 . 对 P^3 执行 Doo-Sabin 细分得到的极限曲面就是所需要的结果曲面. 显然, 文献[8,9]的一个共同缺陷就是, 当待插顶点较多时, 线性方程组规模太大. 考虑到文献[9]的这一缺点, 文献[10]提出矩形网格上分片构造控制网的方法, 即把待插矩形网格分割成许多小矩形网格, 对各小矩形网构造子控制网, 再把各子控制网合并成整张曲面的控制网. 文献[11]则用文献[9,10]的方法构造插值于顶点及法矢的均匀三次 B 样条曲面. 为了讨论的方便, 这里把文献[9,10,11]旋转与待插顶点相应的面或子网格的方法称为模板旋转法.

本文所给的插值方法属于模板旋转法的演化, 这一方法的提出主要是基于如下三个方面的考虑:

(1) 双三次 B 样条曲面是应用中最常见的曲面, 当所给待插点不均匀时, 用均匀三次 B 样条构造插值曲面往往不能获得好的效果, 需要用非均匀 B 样条构造插值曲面^[12];

(2) 文献[10,11]中待插矩形网格的最外层点不带法矢, 因此构造出的结果曲面不能在边界上插值于给定法矢量. 为了使得结果曲面能在边界上插值于给定法矢量, 本文采用启发式方法来增加这最外的不带法向的顶点层;

(3) 采用模板旋转法的现有文献没有涉及曲面光顺性的处理, 而较好的光顺性是很多情况下衡量所给结果曲面好坏的标准之一^[13].

本文的论述主要围绕以上三个方面来展开, 即如何细分、如何定义曲面、如何定义模板、

如何通过模板变换实现插值、如何兼顾曲面的光顺性.

§2. 均匀三次 B 样条曲面插值的模板旋转法

为了对模板旋转法有一个大致了解, 给出文献 [11] 构造曲面的过程如下:

(1) 取定初始待插网格 P^0 , 只有网格内部顶点才带有待插法矢量;

(2) 根据 Catmull-Clark 细分模式与 Doo-Sabin 细分模式构造出一个方程组, 得到一个与 P^0 拓扑同构的网格 P^1 , 使得对 P^1 进行一次 Catmull-Clark 细分与一次 Doo-Sabin 细分后, 带法矢的待插点位于一个 4×4 网格 (即模板) 所决定的均匀三次 B 样条曲面片的中心 (参数域中心所对应的点). 如果网格 P^0 太大, 则分片计算出子网格再合并成 P^1 ;

(3) 将 $(m+1) \times (n+1)$ 的网格 P^1 进行一次 Catmull-Clark 细分与一次 Doo-Sabin 细分, 得到 $4m \times 4n$ 的网格 P^2 , 不考虑最外两层, P^2 可以分为 $(m-1) \times (n-1)$ 个 4×4 模板, 带法矢量的待插点就位于相应模板决定的双三次 B 样条曲面片的中心;

(4) 将 P^2 中的每个模板做一次旋转, 使得它决定的均匀双三次 B 样条曲面片中心的法矢与相应的待插法矢重合, 这样得到网格 P^3 . P^3 所决定的均匀双三次 B 样条曲面就是结果曲面.

不难看出, 上述过程有两个关键点: 第一, 得到中间网格 P^2 , 使得带法矢量的待插点位于相应模板决定的均匀双三次 B 样条曲面片的中心; 第二, 对各模板作一次旋转, 使得该模板决定的均匀双三次 B 样条曲面片中心的法矢与相应待插法矢重合. 针对这两点, 本文作了如下改进: 第一, 避开用线性方程组计算控制网这一步, 直接对待插网格 P^0 进行两次非均匀 Catmull-Clark 细分得到 P^1 , 每次细分网格时, 都删除新网格的外层轮廓; 第二, 对 P^1 中每个 3×3 模板构造一个优化模型, 重新确定模板中顶点的位置, 使得这个 3×3 模板与一对节点所决定的非均匀双三次 B 样条曲面上的点及该点法矢量与相应待插点及法矢量重合, 于是得到网格 P^2 ; 第三, 对于 P^2 中不位于模板上的点, 用能量优化法重新确定这些顶点的位置, 以增强曲面的光顺性, 这样得到网格 P^3 . P^3 决定的非均匀双三次 B 样条曲面就是结果曲面. 下面讨论这三个步骤的具体实现过程.

§3. 轮廓删除法与非均匀 C-C 细分模式

轮廓删除法^[14]的思路非常简单, 概括地说, 就是每次细分时, 边界边不产生新边点, 边界点不产生新顶点. 它可以分两部进行: (1) 按照细分规则计算出每个面对应的新面点, 每条内部边对应的新边点, 每个内部顶点对应的新顶点; 采用任何方式得到边界边对应的新边点, 边界点对应的新顶点, 再将所有新点按照细分拓扑规则连成一个新网格; (2) 删除新网格的最外层得到所需要的网格.

非均匀 Catmull-Clark 细分模式^[15]与 Catmull-Clark 细分模式的拓扑规则一样, 新点的计算公式如下:

新面点

$$v_F = \begin{cases} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i v_i}{n-1}, & \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \neq 0, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} v_i, & \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i = 0, \end{cases} \quad (1)$$

这里 $\omega_i = (d_{i+1,i}^0 + d_{i+1,i}^2 + d_{i+1,i}^{-2} + d_{i-2,i-1}^0 + d_{i-2,i-1}^2 + d_{i-2,i-1}^{-2}) \times (d_{i-1,i}^0 + d_{i-1,i}^2 + d_{i-1,i}^{-2} + d_{i+2,i+1}^0 + d_{i+2,i+1}^2 + d_{i+2,i+1}^{-2})$.

新边点

$$v_E = (1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ji})m + \alpha_{ij}f_{ij} + \alpha_{ji}f_{ji}, \quad (2)$$

这里

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{d_{ji}^1 + d_{ij}^{-1}}{2(d_{ji}^1 + d_{ji}^{-1} + d_{ij}^1 + d_{ij}^{-1})}, & d_{ji}^1 + d_{ji}^{-1} + d_{ij}^1 + d_{ij}^{-1} \neq 0, \\ 0, & d_{ji}^1 + d_{ji}^{-1} + d_{ij}^1 + d_{ij}^{-1} = 0, \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} \frac{(d_{ji}^0 + d_{ji}^2 + d_{ji}^{-2})P_i + (d_{ij}^0 + d_{ij}^2 + d_{ij}^{-2})P_j}{d_{ji}^0 + d_{ji}^2 + d_{ji}^{-2} + d_{ij}^0 + d_{ij}^2 + d_{ij}^{-2}}, & d_{ji}^0 + d_{ji}^2 + d_{ji}^{-2} + d_{ij}^0 + d_{ij}^2 + d_{ij}^{-2} \neq 0, \\ \frac{P_i + P_j}{2}, & d_{ji}^0 + d_{ji}^2 + d_{ji}^{-2} + d_{ij}^0 + d_{ij}^2 + d_{ij}^{-2} = 0. \end{cases}$$

新顶点

$$v_V = \begin{cases} cv_0 + \frac{3 \sum_{i=1}^n (m_i m_i + f_{i,i+1} f_{i,i+1})}{n \sum_{i=1}^n (m_i + f_{i,i+1})}, & \sum_{i=1}^n (m_i + f_{i,i+1}) \neq 0, \\ v_0, & \sum_{i=1}^n (m_i + f_{i,i+1}) = 0, \end{cases}$$

这里 v_i 是 v 的 1- 环上边点, M_i 是边 $v_0 v_i$ 对应的点, 计算公式与 (2) 式中的 M 相同, $F_{i,j}$ 是含有边 $v_0 v_i, v_0 v_j$ 的面产生的新面点, 并且

$$m_i = (d_{0i}^1 + d_{0i}^{-1})(d_{0i}^2 + d_{0i}^{-2})/2, \quad f_{i,j} = d_{0i}^1 d_{0j}^{-1}, \quad c = (n-3)/n.$$

在上面的公式中, d_{ij}^0 表示边 $v_i - v_j$ 对应的参数, d_{ij}^k 表示该边绕 v_i 逆时针旋转遇到的第 k 条边的参数. 新网格中各边的参数按图 1 的方式给出.

由轮廓删除法与非均匀 Catmull-Clark 细分模式的介绍可知, 轮廓删除法也适用与非均匀 Catmull-Clark 细分模式. 为了使得此时的情形 Catmull-Clark 细分模式的情形类似,

需要将原网格 M^0 向外延伸一层得 $M^{0'}$, 使得 M^0 边界上的正则点变为 $M^{0'}$ 内部的正则点, 再对延伸层中与 M^0 相连接的边赋值. 细分后, 去掉细分前的延伸层得到 $M^{1'}$, $M^{1'}$ 去掉最外层就是所需要的网格 M^1 . 把 $M^{1'}$ 的最外层看作 M^1 的延伸层就可以继续使用非均匀 Catmull-Clark 细分模式和轮廓删除法对网格 M^1 进行细分了.

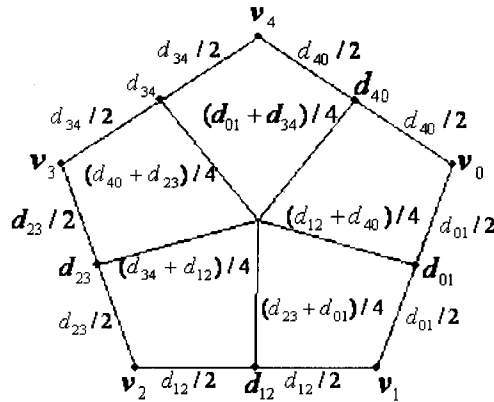


图 1 新边赋予参数的规则

§4. 待插点阵与模板的产生

假设所给的待插顶点阵列是 $P = \{P_{i,j} | 1 \leq i \leq m - 1, 1 \leq j \leq n - 1\}$, 这些点所带的待插法向量集合是 $N = \{n_{i,j} | 1 \leq i \leq m - 1, 1 \leq j \leq n - 1\}$. 约定曲面插值于一个法向量是指插值于该法向量所在的直线, 两个法向量重合指它们所在直线重合. 这样, 插值于法向量也就是插值于法向, 本文对这两个概念不加区分.

将拓扑矩阵形点列 P 向外延伸一层得到 $P^0 = \{P_{i,j}^0 | 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$. 对 P^0 形成的网格 (依然记作 P^0) 上的各边按如下方式赋予参数值, 以便对它运用非均匀 Catmull-Clark 细分:

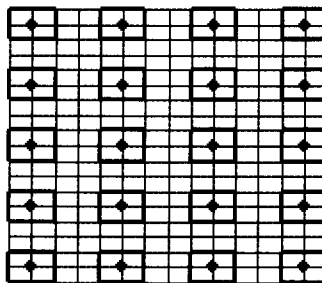


图 2 两次细分待插网格

• 表示待插点的对应点

(1) 将网格的每条边长作为该边的对应参数;

(2) 将网格所有同一行的竖直边对应的参数做一次平均, 所有同一列的水平边对应的参数作一次平均.

有了这一准备工作后, 再运用非均匀 Catmull-Clark 细分模式下的轮廓删除法对 P^0 进行两次细分得到一个 $(4m-5) \times (4n-5)$ 的网格 P^1 , 如图 2 所示. 从图 2 可以看出, P 中的每个点在 P^1 中的对应点位于一个 3×3 模板的中心. 为方便, 把 P^1 中不在任何模板内的顶点称为自由顶点.

§5. 模板顶点位置的更新

现考察 P^1 所确定的非均匀三次 B 样条曲面. 由于 P^1 同一行的竖直边对应的参数相等, 同一列的水平边对应的参数也相等, 因此这样取节点矢量: 将 P^1 中第一行水平边的参数以及这一行的延伸参数依次记为 $d_0, d_1, \dots, d_{4n-4}$, 取 $u_1 = 0, u_j = \sum_{k=0}^{j-2} d_k$ ($2 \leq j \leq 4n-2$). 有 $U = [u_0, u_1, \dots, u_{4n-3}, u_{4n-2}]$, 其中 u_0, u_{4n-2} 使 U 为不减序列的任意数. 类似地, 取 $V = [v_0, v_1, \dots, v_{4m-3}, v_{4m-2}]$. 这样 P^1, U, V 就决定这一张非均匀双三次 B 样条曲面

$$P^1(u, v) = \sum_{i=0}^{4m-6} \sum_{j=0}^{4n-6} P_{i,j}^1 B_i(v) B_j(u), \quad (3)$$

其中 $(u, v) \in [u_3, u_{4n-5}] \times [v_3, v_{4m-5}]$.

对于待插点集 P 内的一点 P_{i_0, j_0} , 可以将它与定义域内的节点建立如下对应关系:

$$P_{i_0, j_0} \rightarrow (u_{4j_0-1}, v_{4i_0-1}),$$

其中 $1 \leq i_0 \leq m-1, 1 \leq j_0 \leq n-1$ 与 P_{i_0, j_0} 相应的模板中的顶点可以表示为

$$\{P_{i,j}^1 | 4i_0 - 4 \leq i \leq 4i_0 - 2, 4j_0 - 4 \leq j \leq 4j_0 - 2\}.$$

因此由 (3) 式, 曲面 $P^1(u, v)$ 中参数 (u_{4j_0-1}, v_{4i_0-1}) 的对应点可以表示为

$$P^1(u_{4j_0-1}, v_{4i_0-1}) = \sum_{i=4i_0-4}^{4i_0-2} \sum_{j=4j_0-4}^{4j_0-2} P_{i,j}^1 B_i(v_{4i_0-1}) B_j(u_{4j_0-1}).$$

由此可见, 为了使曲面 $P^1(u, v)$ 在参数 (u_{4j_0-1}, v_{4i_0-1}) 的对应点处插值于点 P_{i_0, j_0} 及其所带的法矢量, 只需调整点 $P_{i,j}^1 (4i_0 - 4 \leq i \leq 4i_0 - 2, 4j_0 - 4 \leq j \leq 4j_0 - 2)$. 为此令 $k = 3(i - 4i_0 + 4) + (j - 4j_0 + 4)$, $Q_k^0 = P_{i,j}^1$, $a_k = B_i(v_{4i_0-1}) B_j(u_{4j_0-1})$, $b_k = B_i(v_{4i_0-1}) B'_j(u_{4j_0-1})$, $c_k = B'_i(v_{4i_0-1}) B_j(u_{4j_0-1})$, 这里 $4i_0 - 4 \leq i \leq 4i_0 - 2, 4j_0 - 4 \leq j \leq 4j_0 - 2$. 可建立如下求解 $Q_k (0 \leq k \leq 8)$ 的优化模型

$$\min \sum_{k=0}^8 (Q_k - Q_k^0)^2,$$

$$\begin{aligned}
 s.t. \quad & \sum_{k=0}^8 a_k Q_k = P_{i_0, j_0}, \\
 & n_{i_0, j_0} \sum_{k=0}^8 b_k Q_k = 0, \\
 & n_{i_0, j_0} \sum_{k=0}^8 c_k Q_k = 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

由于这是一个线性约束下的二次优化模型, 因此可以将这个模型转化为一个系数矩阵为 22×22 矩阵的线性方程组求解. 得到 $Q_k (0 \leq k \leq 8)$ 后, 用它们代替 $P_{i,j}^1 (4i_0 - 4 \leq i \leq 4i_0 - 2, 4j_0 - 4 \leq j \leq 4j_0 - 2)$, 这样就可以 P^1 得到网格 P^2 . 显然, P^2, U, V 决定的非均匀双三次 B 样条曲面一定插值于待插点集 P 与相应的法矢集 N , 且位于网格 P 边界上的点也在这张曲面的边界上.

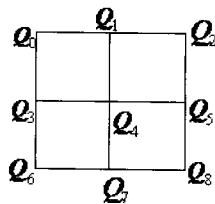
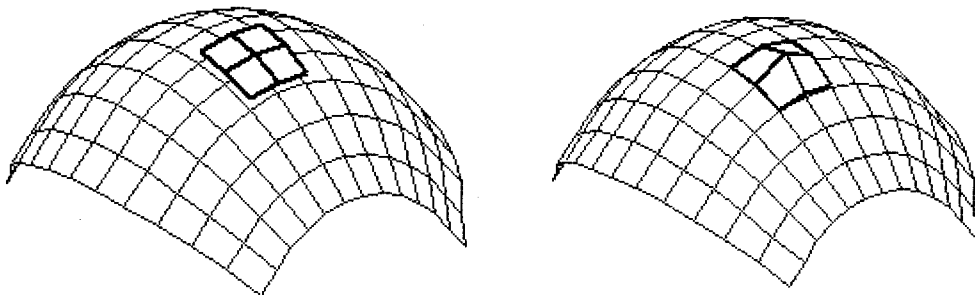


图 3 模板中的顶点

优化模型 (4) 有这样的缺点: 它的目标表达式把所有 $Q_k (0 \leq k \leq 8)$ 不加区分, 而 Q_k 在模板中的位置是有差别的, 如图 3 所示. 由于对一个模板来说, 中心点对应的 a_k 最大, 四个角点对应的 a_k 最小, 这就导致了新得到的点中, 中心点对于初始相应点的偏移最大, 四个角点对初始相应点的偏移最小, 如图 4(a) 所示. 这种偏移的分布是不均匀的, 大大改变了原模板的形状, 从而容易导致结果曲面与原始曲面的形状差异较大, 并带来不光顺的效果.



(a) 优化模型 (4) 计算新点

(b) 优化模型 (6) 计算新点

图 4 用优化模型计算的新点

粗线条所示小网格为新计算出的模板, 淡色细线条所示网格为 P^1

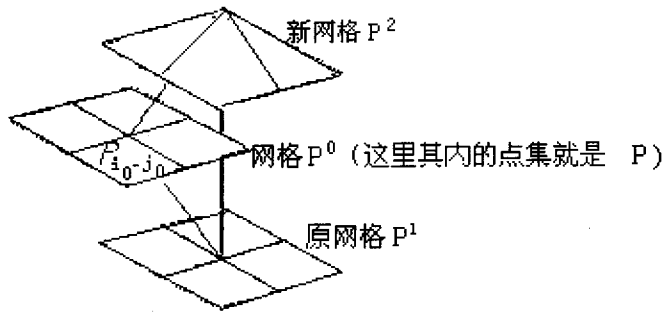


图 5 新网格、原网格的相对位置

为了改变优化模型 (4) 导致模板上的点偏移分布不均匀这种情况, 对此模型作一下改进. 首先考虑到该模板的中心 Q_4^0 是网格 P^1 中与 P_{i_0, j_0} 对应的点, 即细分时由 P_{i_0, j_0} 产生的新顶点, 于是先对此模板作一个平移

$$Q_k^0 + (P_{i_0, j_0} - Q_4^0), \quad (5)$$

其中 $0 \leq k \leq 8$. 平移后的点仍然记作 Q_k^0 . 这样处理的原因就是: 新模板与原模板中心的偏差值与角点的偏差值相差太多, 而由凸包性, 网格 P^1 位于网格 P^0 形成的凸包内, 而 P 内的点则位于 P^2 形成的凸包内, 所以新模板与原模板中心的偏差应该不小于新模板中心与 P_{i_0, j_0} 的偏差 (如图 5 所示). 通过平移重新构造原模板, 再用优化模型 (4) 求得新模板, 就缩小了新、原模板中心的差, 从而也就缩小了新、原模板中心的偏差值与角点的偏差值的差. 其次, 对于优化模型 (4) 来说, 考虑到各点在约束式中系数的不同导致了偏差的不同, 因此对目标式中的各项也添加 a_k 作为系数. 于是优化模型 (4) 变为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=0}^8 a_k (Q_k - Q_k^0)^2, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k=0}^8 a_k Q_k = P_{i_0, j_0}, \\ & n_{i_0, j_0} \sum_{k=0}^8 b_k Q_k = 0, \\ & n_{i_0, j_0} \sum_{k=0}^8 c_k Q_k = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

上式中 $Q_k^0 (0 \leq k \leq 8)$ 是经 (5) 式平移的点. 模型 (6) 计算所得的新模板如图 4(b) 所示, 本文在具体算例中给出了用这两个优化模型的计算结果. 这样, 对网格 P^1 中每个模板利用优化模型 (6) 更新其顶点, 由 P^1 得到了 P^2 . 得到 P^2 后, 把 (3) 式中的 $P_{i, j}^1$ 换为 $P_{i, j}^2$ 也就得到了插值于待插点与待插法矢量的曲面, 剩下的任务就是根据需要去调整自由顶点的位置以调整曲面形状.

顺便说明, 上面的论述是基于对初始网格 P^0 细分两次来进行的, 两次是对初始网格的最小细分次数. 实际使用时可以对初始网格进行多次细分, 运用这里的方法确定自由顶点的位置. 具体计算时可以发现, 随着细分次数的增多, 结果曲面会更光顺. 这是因为增加细分次数也就增加了自由顶点的数目, 从而增强了曲面形状调整的灵活性.

§6. 自由顶点的更新

一般来说, 对于结果曲面 S , 要求其愈光顺愈好, 因此可以采用能量优化法^[4]更新自由顶点的位置, 以达到光顺曲面的目的. 考虑到能量优化法比较繁琐而且计算量大, 在对初始网格细分两次的情况下, 根据曲线的最小能量法设计了如下重新计算新顶点的方法.

由图 2 可知, 自由点的排列呈这样的规律: 同一行的相邻模板间有三个自由点, 同一列的相邻模板间有三个自由点, 每四个相邻模板中间也存在自由点. 把这三类点分别称为第 I, II, III 型自由顶点, 如图 6 所示. 首先考察第 I 型自由顶点的确定. 对于自由顶点 P_{i_0, j_0}^2 , 取出 P^2 中与之在同一行上的前三个点与后三个点. 显然, 这六个点是模板中的点, 已经确定. 由表达式 (3) 知, 它们连同 P_{i_0, j_0}^2 确定这一段曲线

$$P_{i_0}^2(u) = \sum_{j=j_0-3}^{j_0+3} P_{i_0, j} B_j(u), \quad (7)$$

其中 $u \in [u_{j_0+1}, u_{j_0+4}]$. 由文献 [4], 待定点 P_{i_0, j_0}^2 可表示为

$$P_{i_0, j_0}^2 = - \sum_{\substack{j=j_0-3 \\ j \neq j_0}}^{j_0+3} P_{i_0, j} (c_{j_0, j} + c_{j, j_0}) / 2c_{j_0, j_0}, \quad (8)$$

这里 $c_{s, t} = \int_{u_{j_0+1}}^{u_{j_0+4}} (\mu B_s'(u) B_t'(u) + \eta B_s''(u) B_t''(u))$ (两个参数值均取为 1.0). 同理可以确定所有第 I, II 型的自由点. 确定所有第 I, II 型的自由点后, 再确定第 III 型的自由点.

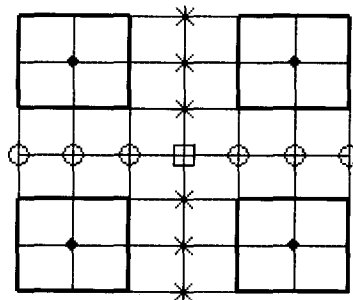


图 6 网格中的自由顶点

* 第 I 型自由顶点 ⊕ 第 II 型自由顶点 □ 第 III 型自由顶点

对于一个第 III 型的自由点, 先取出与之同一行的前后三点, 利用 (7), (8) 式计算出一

个点, 然后取出与之同一列的前后三点, 再利用 (7), (8) 式计算出一个点, 用这两个点的平均值代替这个第 III 型的自由点, 于是所有的自由顶点都得到确定. 从网格 P^2 得到了网格 P^3 , 这就是结果曲面 S 的控制网. 这样确定自由点的理由是曲面的网格线能量光顺法, 即如果一张曲面的网格线光顺, 认为这张曲面也是光顺的^[13]. 在对初始网格细分多次的情况下, 也可采用类似的方法确定自由顶点.

§7. 具体算例

为了对各种不同的插值方法进行比较, 进行数值实验时把一个直纹面作为原始曲面, 其准线由 3 个半径为 1 的半圆弧组成, 待插点和待插法向量在各半圆上呈等圆心角分布. 采用如下方式估计误差:

- (1) 在插值曲面上取点 (x_i, y_i, z_i) , 其中 $i = 1, \dots, n$;
- (2) 在原始曲面上取 (x_i, y_i) 对应的点 (x_i, y_i, z_i^0) , 其中 $i = 1, \dots, n$;
- (3) 把 $\sum_{i=1}^n |z_i^0 - z_i|/n$ 作为误差.

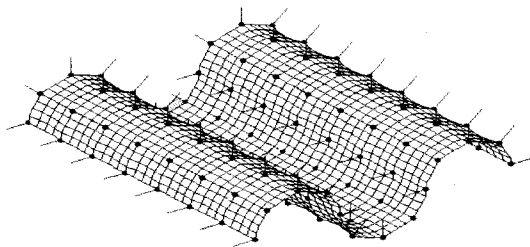


图 7 以前的方法

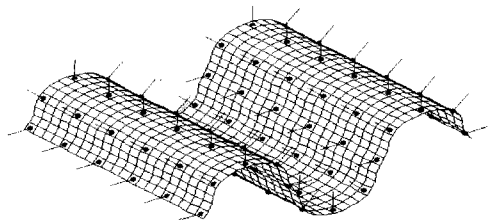
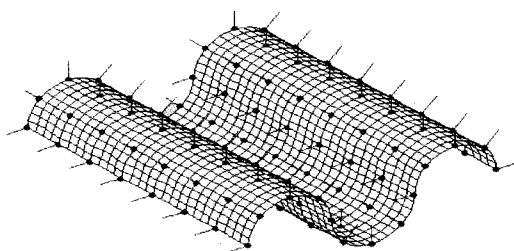
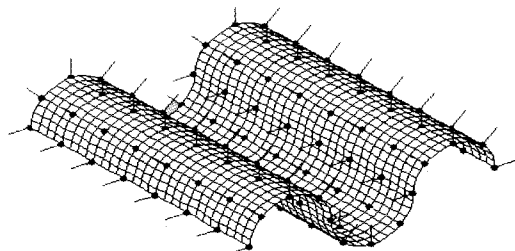


图 8 优化模型 (4)



(a) 细分 2 次



(b) 细分 3 次

图 9 优化模型 (6)

表 1 各种方法的误差

算例	图 7	图 8	图 9(a)	图 9(b)
误差	0.2487	0.0475	0.0117	0.0116

§8. 结 论

本文基于模板旋转法与非均匀 C-C 细分模式给出了非均匀三次 B 样条曲面的一种顶点及法向插值方法. 与已有模板旋转法不同体现在以下几个方面: (1) 在建构曲面时避开了构造线性方程组求解初始细分网格这一步, 直接对待插点形成的网格进行细分; (2) 根据各个模板建立规模较小的优化模型来重新模板中顶点的位置; (3) 由于引进了自由顶点, 可以通过调整自由顶点的位置对曲面进行光顺; (4) 可以对网格进行多次细分来增加自由顶点的数目, 从而增强曲面形状调整的灵活性, 得到光顺性更好的曲面, 从这种意义上说, 增加细分次数也是在满足插值条件下增强曲面光顺性的一种有效手段. 下一步, 可以考虑如何把本文的方法推广到待插网格为任意拓扑结构的情形.

参 考 文 献

- [1] Halstead Mark A., Barsky Brian A., Klein Stanley A. *etal.* Reconstructing Curved Surfaces From Specular Reflection Patterns Using Spline Surface Fitting of Normals Special. In: Computer Graphics, Annual Conference Series(ACM SIGGRAPH). New York: ACM Press, 1996, 163~170.
- [2] 曹毓秀, 李勇军, 李华等, 荫罩式 CRT 校正透镜曲面设计与实现, 计算机辅助设计与图形学学报, 12:4(2000) 272~276.
- [3] Lee Yuan-Chung, Jen Chein-Wei, Improved Quadratic Normal Vector Interpolation for Realistic Shading, Visual Computer, 17:6(2001) 337-352.
- [4] Jörg Peters, Local cubic and bicubic C^1 surface interpolation with linearly varying boundary normal. Computer Aided Geometric Design, 7:6(1990) 499-516.
- [5] Farin Gerald, Smooth Interpolation to Scattered 3D-Data, In: R E Barnhill, W Boehm eds. Surfaces in CAGD, Amsterdam: North-Holland, 1983, 43-63.
- [6] Jones A K., Nonrectangular surface patches with curvature continuity, Computer Aided Design, 20:6(1988) 325-335.
- [7] Biermann Henning, Levin Adi, Zorin Denis, Piecewise smooth subdivision surfaces with normal control, In: Computer Graphics, Annual Conference Series(ACM SIGGRAPH), New York: ACM Press, 2000, 113~120.
- [8] Halstead Mark, Kass Michael, DeRose Tony, Efficient, fair interpolation using Catmull-Clark surfaces, In: Computer Graphics, Annual Conference Series(ACM SIGGRAPH), New York: ACM Press, 1993, 35-44.
- [9] Nasri A., Surface interpolation on irregular networks with normal conditions, Computer Aided Geometric Design, 8:1(1991) 89-96.
- [10] 李桂清, 李现民, 李华, 二次 B 样条曲面顶点和法向插值, 计算机辅助设计与图形学学报, 13:5(2001) 461-466.
- [11] 李桂清, 李华, 基于混合子分方法的曲面网格顶点与法向插值, 计算机辅助设计与图形学学报, 13:6(2001) 537-544.
- [12] 施法中, 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条 (CAGD&NURBS), 北京, 北京航空航天大学出版社, 1994.
- [13] 朱心雄, 自由曲线曲面造型技术, 北京, 科学出版社, 2000.
- [14] Li Guiqing, Li Hua, Blending Parametric Patches with Subdivision Surfaces, Journal Computer Science & Technology, 17:4(2002) 498~506.
- [15] Sederberg T, Zheng J, Swell D, Sabin M., Non-Uniform recursive Subdivision Surfaces, In: Computer Graphics, Annual Conference Series(ACM SIGGRAPH), New York, ACM Press, 1998, 387-394.