# 非线性对流-扩散方程的高阶特征-差分格式及其误差估计[*1)]

由 同 顺
(南开大学数学系)

# HIGH-ORDER CHARACTERISTIC-DIFFERENCE SCHEMES FOR THE NONLINEAR CONVECTION-DIFFUSION EQUATION AND THEIR ERROR ESTIMATES

You Tong-shun
(*Department of Mathematics, Nankai University*)

**Abstract**

A high-order characteristic-difference method for the nonlinear convection-dominated diffusion problem is considered. The method is of order two for the diffusion term and of order m($\geqslant 3$) for the convection term. The error estimates of the scheme are given. Numerical computations for the model problem of [4] are presented. The numerical results show that the method is better than the Godunov-mixed method of [4].

## §1. 引　　言

由于对流项在对流占优的扩散问题中起主导作用，所以人们在构造数值格式时，应设法提高对流项的逼近精度，从而达到提高对整个对流扩散问题逼近精度的目的．为此，本文对于对流项的逼近采用比扩散项更高阶的逼近．本文对下列问题

$$
(\mathrm{A})\begin{cases} c(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial t}+b(x,u)\cdot\nabla u-\nabla\cdot(a(x,u)\nabla u)=f(x,u),\ x\in\Omega=[0,1]^2, 0\leqslant t\leqslant T, \\ u(x,0)=u_0(x), \\ \text{周期为 1 的边界条件,} \end{cases}
$$

其中 $b(x,u)=(b_1(x,u),b_2(x,u))$，$T$ 为固定正常数．建立了基于分片 $m(\geqslant 3)$ 次三角形或矩形插值的高阶特征-差分格式，其对扩散的逼近为 2 阶，对于对流项的逼近为 $m$ 阶．本文在比[1]—[3]更弱的时间与空间步长限制(见(3.17))下，得到了格式的 $L^2$, $H^1$ 及最

* 1993 年 11 月 19 日收到．
1) 攀登计划大规模科学工程计算项目资助．

大模误差估计，从而改善和推广了[1]—[3]的结果．本文对[4]中模型问题进行了计算，计算结果表明高阶特征-差分格式远优于全隐格式及[4]中混合 Godunov 格式．本文只对均匀网格进行了讨论，对于非均匀网的情形以后讨论．

假定问题(A)的相关系数，初始数据及解是周期的且有必要的光滑性并满足条件(H)：

(i) $\|u_0\|L^\infty(\Omega)\leqslant K_1$，(ii) $\forall(x,q)\in\Omega\times[-2K_1,2K_1]$ 有 $0<c_0\leqslant c(x,q)\leqslant K_2$，$0<a_0\leqslant a(x,q)\leqslant K_2$，$|b_i(x,q)|\leqslant K_2$ 及 $a,b_i,c,f$ 的一阶偏导数及 $\dfrac{\partial^2 a}{\partial q^2},\dfrac{\partial^2 a}{\partial x\partial q}$ 有界．

文中，$v_{ij}^n$ 表示 $v(x_{ij},t^n)$，$\varphi(v_{ij}^n)$ 表示 $\varphi(x_{ij},v_{ij}^n)$ 等，$M$ 表示绝对正常数，$\widetilde{M}(s_1,\cdots,s_r)$ 表示与 $s_1,\cdots,s_r$ 相关的正常数，$\varepsilon$ 表示小的正数．不同式子中的 $\varepsilon$，$M$，$\widetilde{M}$ 可以不相同．

## §2. 特征-差分格式

假设空间步长 $h=\dfrac{1}{J}$，$x_{ij}=(x_{1i},x_{2j})$，$x_{1i}=ih$，$x_{2j}=jh$，$i,j=1,2,\cdots,J$；$\Delta t=\dfrac{T}{N}$ 为时间步长，$t^n=n\Delta t$，$n=0,1,\cdots,N$．在 $(x_{ij},t^n)$ 处，特征方向导数如下逼近[1]-[3]：

$$\left(c(u)\frac{\partial u}{\partial t}+\boldsymbol{b}(u)\cdot\nabla u\right)^n_{ij}\approx c(u_{ij}^n)\frac{u_{ij}^n-\bar{u}_{ij}^{n-1}}{\Delta t},$$

其中 $\bar{x}_{ij}=x_{ij}-\boldsymbol{b}(u_{ij}^n)\Delta t/c(u_{ij}^n)$，$\bar{u}_{ij}^{n-1}=u(\bar{x}_{ij},t^{n-1})$．用 $\delta_{x_i}$，$\delta_{\bar{x}_i}$ 分别表示 $x_i$ 方向的向前和向后差分算子．

$$\nabla_h(a\nabla_h u)_{ij}^n=\delta_{\bar{x}_1}(a\delta_{x_1}u)_{ij}^n+\delta_{\bar{x}_2}(a\delta_{x_2}u)_{ij}^n,$$

$$\delta_{\bar{x}_1}(a\delta_{x_1}u)_{ij}^n=h^{-1}(a^n_{i+\frac{1}{2},j}\delta_{x_1}u_{ij}^n-a^n_{i-\frac{1}{2},j}\delta_{x_1}u_{ij}^n),\ a^n_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{1}{2}(a(u_{ij}^n)+a(u^n_{i+1,j})),$$

类似地可定义 $\delta_{\bar{x}_2}(a\delta_{x_2}u)_{ij}^n$，$a^n_{i,j+\frac{1}{2}}$．

设 $\{U_{ij}^n\}$ 为问题(A)的逼近解，$U^{n-1}(x)$ 表示由 $\{U_{ij}^{n-1}\}$ 在 $\Omega$ 上进行分片 $m$ 次三角形或矩形插值得到的函数，则问题(A)的高阶特征-差分格式为

$$\begin{cases}c(U_{ij}^{n-1})\dfrac{U_{ij}^n-\widetilde{U}_{ij}^{n-1}}{\Delta t}-\nabla_h(A\nabla_h U)_{ij}^n=f(U_{ij}^{n-1}),\ i,j=1,2,\cdots,J,\\[2mm] U_{ij}^0=u_0(x_{ij}),\end{cases}$$

其中 $\widetilde{U}_{ij}^{n-1}=U^{n-1}(\tilde{x}_{ij})$，$\tilde{x}_{ij}=x_{ij}-\boldsymbol{b}(U_{ij}^{n-1})\Delta t/c(U_{ij}^{n-1})$，

$$A^n_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{1}{2}[a(U_{ij}^{n-1})+a(U^{n-1}_{i+1,j})],\quad A^n_{i,j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}[a(U_{ij}^{n-1})+a(U^{n-1}_{i,j+1})].$$

最后，我们定义网函数的内积和范数，即

$$(W,Z)=\sum_{i,j=1}^{J}w_{ij}z_{ij}h^2,\quad \|W\|^2=(W,W),\quad \|W\|_\infty=\max_{1\leqslant i,j\leqslant J}|w_{ij}|,$$

$$(a\nabla_h W,\nabla_h Z)=\sum_{i,j=1}^{J}(a_{i+\frac{1}{2},j}\delta_{x_1}w_{ij}\delta_{x_1}z_{ij}+a_{i,j+\frac{1}{2}}\delta_{x_2}w_{ij}\delta_{x_2}z_{ij})h^2,$$

$$\|a^{\frac{1}{2}}\nabla_h W\|^2=(a\nabla_h W,\nabla_h W),\ \|W\|_1^2=\|W\|^2+\|\nabla_h W\|^2,$$

$$\|W\|_{2,2}^2=\sum_{i=1}^{2}\|\delta_{\bar{x}_i}\delta_{x_i}W\|^2+2\|\delta_{x_1}\delta_{x_2}W\|^2,\|\nabla_h W\|_\infty=\max_{i=1,2}\|\delta_{x_i}W\|_\infty.$$

## §3. 误差估计

令 $\xi^n=u^n-U^n$, $\delta_{\bar{t}}\xi^n=\dfrac{\xi^n-\xi^{n-1}}{\Delta t}$, 则

$$(c(U^{n-1})\delta_{\bar{t}}\xi^n,\delta_{\bar{t}}\xi^n)-(\nabla_h(A\nabla_h\xi^n),\ \delta_{\bar{t}}\xi^n)=\sum_{i=1}^{5}(T_i,\delta_{\bar{t}}\xi^n)+(e^n,\delta_{\bar{t}}\xi^n),\quad(3.1)$$

其中 $e^n$ 为截断误差，$T_1=f(u^n)-f(U^{n-1})$, $T_2=c(U^{n-1})\dfrac{\bar{u}^{n-1}-\tilde{u}^{n-1}}{\Delta t}$,

$T_3=(c(U^{n-1})-c(u^n))\dfrac{u^n-\bar{u}^{n-1}}{\Delta t}$, $T_4=\nabla_h((a-A)\nabla_h u)^n$, $T_5=c(U^{n-1})\dfrac{\tilde{\xi}^{n-1}-\xi^{n-1}}{\Delta t}$.

为估计 $\xi^n$，作归纳假设：当 $m\leqslant n-1$ 时，

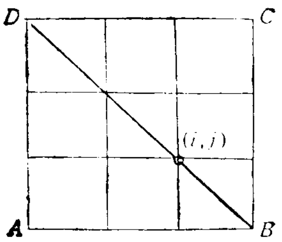
$$\|U^m\|_\infty\leqslant 2K_1,\ \|\nabla_h\xi^m\|_\infty\leqslant K_3,\quad(3.2)$$

显然(3.2)对 $m=0$ 成立．由条件 (H) 及(3.3)可得

$$\sum_{i=1}^{3}|(T_i,\delta_{\bar{t}}\xi^n)|\leqslant\varepsilon\|\delta_{\bar{t}}\xi^n\|^2+\widetilde{M}_1(\|u\|_{L^\infty(W^{1,\infty})},\ \|u\|_{W^{1,\infty}(L^\infty)})(\Delta t^2+\|\xi^{n-1}\|^2).\quad(3.3)$$

类似于[3]中的分析，经计算可知

$$|(T_4,\delta_{\bar{t}}\xi^n)|\leqslant\varepsilon\|\delta_{\bar{t}}\xi^n\|^2+\widetilde{M}_2(\|u\|_{W^{1,\infty}(W^{1,\infty})})(\Delta t^2+\|\xi^{n-1}\|_1^2).\quad(3.4)$$




用 $\pi_3 v(x)$ 表示由 $\{v_{ij}\}$ 按分片三次三角形插值得到的函数．$\Omega_{ij}=[(i-2)h,(i+1)h]\times[(j-1)h,(j+2)h]$, $\Omega_{ij}^1=\triangle ABD$, $\Omega_{ij}^2=\Omega_{ij}-\Omega_{ij}^1$, 当 $x_{ij}\in\Omega_h=\{x_{ij},i,j=1,2,\cdots,J\}$ 时，必存在下标 $i_m$, $j_m$，使得 $\tilde{x}_{ij}\in\Omega_{i_m,j_m}$，其中

$|x_{1i_m}-\tilde{x}_{1i}|=\min\{|x_{1l}-\tilde{x}_{1i}|,\ x_{1l}$ 介于 $x_{1i}$ 与 $\tilde{x}_{1i}$ 之间$\}$,

$|x_{2i_m}-\tilde{x}_{2i}|=\min\{|x_{2l}-\tilde{x}_{2i}|,\ x_{2l}$ 介于 $x_{2i}$ 与 $\tilde{x}_{2i}$ 之间$\}$.

易知，存在常数 $K_4$，使得

$$|\tilde{x}_{ij}-x_{i_m,j_m}|\leqslant|\tilde{x}_{ij}-x_{ij}|\leqslant K_4\Delta t.\quad(3.5)$$

由 Sobolev 空间插值逼近定理知

$$|(u^{n-1}-\pi_3 u^{n-1})(\tilde{x}_{ij})|\leqslant\widetilde{M}_3(\|u\|_{L^\infty(W^{4,\infty})})h^3\Delta t.$$

由 $\xi^{n-1}=u^{n-1}(\tilde{x})-\pi_3 u^{n-1}(\tilde{x})+\pi_3\xi^{n-1}(\tilde{x})$ 及上式，可得

$$|(T_5,\delta_{\bar{t}}\xi^n)|\leqslant\varepsilon\|\delta_{\bar{t}}\xi^n\|^2+M\left\|c(U^{n-1})\frac{\pi_3\xi^{n-1}(\tilde{x})-\xi^{n-1}}{\Delta t}\right\|^2+\widetilde{M}_3h^4.\quad(3.6)$$

显然

$$\pi_3\xi^{n-1}(\tilde{x}_{ij})-\xi_{ij}^{n-1}=\pi_3\xi^{n-1}(\tilde{x}_{ij})-\xi_{i_m,j_m}^{n-1}+\xi_{i_m,j_m}^{n-1}-\xi_{ij}^{n-1}\quad(3.7)$$

由 $\pi_3 v(x)$ 在 $\Omega_{i_m,i_m}$ 中的表达式，经计算可得

$$|\pi_3\xi^{n-1}(\tilde{x}_{ij})-\xi^{n-1}_{i_m,i_m}|\leqslant M\max\{|\nabla_h\xi^{n-1}_{l,l}|;|x_{sl}-x_{i_m,i_m}|\leqslant 2\sqrt{2}h\}\Delta t, \tag{3.8}$$

易知

$$|\xi^{n-1}_{ij}-\xi^{n-1}_{i_m,i_m}|\leqslant 2K_4\max\{|\nabla_h\xi^{n-1}_{l,l}|;\ |x_{sl}-x_{ij}|\leqslant K_4\Delta t\}\Delta t. \tag{3.9}$$

假设 $\Delta t\leqslant Mh$，则由(3.7)—(3.9)，可得

$$\begin{aligned}\left\|c(U^{n-1})\frac{\pi_3\xi^{n-1}(\tilde{x})-\xi^{n-1}}{\Delta t}\right\|^2&=\sum_{i,j=1}^{J}c(U^{n-1}_{ij})\left(\frac{\pi_3\xi^{n-1}(\tilde{x}_{ij})-\xi^{n-1}_{ij}}{\Delta t}\right)^2h^2\\&\leqslant M\sum_{i,j=1}^{J}\max\{|\nabla_h\xi^{n-1}_{l,l}|^2;\ |x_{sl}-x_{ij}|\leqslant 2\sqrt{2}h+K_4\Delta t\}h^2\\&\leqslant M\left(2\sqrt{2}+K_4\frac{\Delta t}{h}\right)^2\|\nabla_h\xi^{n-1}\|^2\leqslant M\|\nabla_h\xi^{n-1}\|^2.\end{aligned} \tag{3.10}$$

由(3.6)和(3.10)可知

$$|(T_5,\delta_{\bar{t}}\xi^n)|\leqslant\varepsilon\|\delta_{\bar{t}}\xi^n\|^2+M\|\nabla_h\xi^{n-1}\|^2+\widetilde{M}_3h^4. \tag{3.11}$$

(3.1)式右端最后一项估计为[1-3]

$$|(e^n,\delta_{\bar{t}}\xi^n)|\leqslant\varepsilon\|\delta_{\bar{t}}\xi^n\|^2+\widetilde{M}_4\left(\left\|\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty(L^\infty)},\|u\|_{L^\infty(W^{4,\infty})}\right)(\Delta t^2+h^4). \tag{3.12}$$

用类似于[3]的方法处理(3.1)左端及 $T_i$ 的估计式，得

$$\left(\sum_{m=1}^{n}\|\delta_{\bar{t}}\xi^m\|^2\Delta t\right)^{\frac{1}{2}}+\|\xi^n\|_1\leqslant\widetilde{M}_5\left(\|u\|_{W^{1,\infty}(W^{1,\infty})},\|u\|_{L^\infty(W^{4,\infty})},\left\|\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty(L^\infty)}\right)(\Delta t+h^2). \tag{3.13}$$

由不等式[3]

$$\|V^n\|_\infty\leqslant M\left|\log\frac{1}{h}\right|^{\frac{1}{2}}\|\nabla_hV^n\| \tag{3.14}$$

可得

$$\|\xi^n\|_\infty\leqslant\widetilde{M}_5(\Delta t+h^2)\left|\log\frac{1}{h}\right|^{\frac{1}{2}}\leqslant\widetilde{M}_5h\left|\log\frac{1}{h}\right|^{\frac{1}{2}}. \tag{3.15}$$

把(3.1)中的 $\delta_{\bar{t}}\xi^n$ 换为 $\nabla_h(\nabla_h\xi^n)$，经计算可得

$$\|\xi^n\|_{2,2}\leqslant\widetilde{M}_5(\|\nabla_h\xi^n\|+\|\xi^{n-1}\|_1+\|\delta_{\bar{t}}\xi^n\|+\Delta t+h^2). \tag{3.16}$$

假定存在正常数 $M_1$ 和 $M_2$，使得

$$M_1h^3\leqslant\Delta t\leqslant M_2h \tag{3.17}$$

由(3.13)及上式，可知

$$\|\delta_{\bar{t}}\xi^n\|\leqslant\widetilde{M}_5\Delta t^{-\frac{1}{2}}(\Delta t+h^2)\leqslant\widetilde{M}_5h^{\frac{1}{2}}. \tag{3.18}$$

对 $V^n=\nabla_h\xi^n$ 应用不等式(3.14)，可得

$$\|\nabla_h\xi^n\|_\infty\leqslant M\|\xi^n\|_{2,2}\left|\log\frac{1}{h}\right|^{\frac{1}{2}}\leqslant\widetilde{M}_5\left(h\left|\log\frac{1}{h}\right|\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.19}$$

由(3.15)和(3.19)知，当 $h$ 充分小时，(3.2)对 $m=n$ 也成立。

**定理.** 设问题 $(A)$ 的解 $u\in W^{1,\infty}(W^{1,\infty})\cap L^\infty(W^{4,\infty})$，$\dfrac{\partial^2u}{\partial\tau^2}\in L^\infty(L^\infty)$，$\{U^n_{ij}\}$ 是基于

分片三次三角形或矩形插值的特征-差分格式的解，假设(3.17)成立，则当 $h$ 足够小时，误差 $\xi^n = u^n - U^n$ 满足(3.13)和(3.15)。

## §4. 数值例子

我们对[4]中模型问题

$$\begin{cases} u_t + u_x - a u_{xx} = a\pi^2 \sin(\pi(x-t)), & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leqslant 0.125, \\ u(x,0) = \sin \pi x; \quad u(0,t) = -\sin \pi t, & u(1,t) = \sin(\pi(1-t)), \end{cases}$$

用特征-差分格式及全隐格式进行了计算。模型问题的真解 $u = \sin(\pi(x-t))$。本文采用的全隐格式（CID）为 $\delta_{\bar t} U_i^n + \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_{\bar x}) U_i^n - a\delta_{\bar x}\delta_x U_i^n = a\pi^2 \sin(\pi(x_i - t^n))$. 用

表 1　$a = 1$　Err $\times 10^4$

| 格式 / $J$ | MMM-TR | EMM-TR | $\Delta t^2$格式 | CID | 2I-CDS | 3I-CDS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 6.35 | 6.41 | 12.5 | 45.77 | 10.30 | 8.99 |
| 40 | 1.64 | 1.63 | 3.14 | 26.37 | 2.67 | 2.35 |
| 80 | 0.416 | 0.416 | 0.788 | 14.20 | 0.579 | 0.49 |
| 160 | 0.105 | 0.105 | 0.197 | 7.86 | 0.435 | 0.44 |

表 2　$a = 10^{-2}$　Err $\times 10^4$

| 格式 / $J$ | MMM-TR | EMM-TR | $\Delta t^2$ 格式 | CID | 2I-CDS | 3I-CDS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 38.64 | 39.51 | 22.07 | 105.76 | 7.39 | 0.321 |
| 40 | 11.02 | 11.14 | 5.88 | 53.30 | 1.87 | 0.0185 |
| 80 | 2.89 | 2.90 | 1.48 | 26.76 | 0.47 | 0.00696 |
| 160 | 0.729 | 0.730 | 0.370 | 13.41 | 0.12 | 0.00162 |

表 3　$a = 10^{-4}$　Err $\times 10^4$

| 格式 / $J$ | $\Delta t^2$ 格式 | CID | 2I-CDS | 3I-CDS |
|---|---|---|---|---|
| 20 | | 107.58 | 7.73 | 0.498 |
| 40 | 8.34 | 54.11 | 1.96 | 0.0521 |
| 80 | 2.68 | 27.13 | 0.491 | 0.0134 |

注：MMM-TR 格式及 EMM-TR 格式的时间步长为 $\Delta t = h^2$，其余格式为 $\Delta t = \frac{h}{2}$.

ml-CDS 表示基于 $m$ 次插值的特征-差分格式.

表中给出真解和逼近解在 $t=0.125$ 时的 $L^2$ 误差,并引用了[4]中用格式 MMM-TR, EMM-TR 及 $\Delta t^2$-格式计算结果.从表中可看出,对于占优问题,3I-CDS的精度为 2I-CDS 的几十倍, 2I-CDS 的精度大约为 MMM-TR 及 EMM-TR 的五倍, $\Delta t^2$-格式的 3 倍, CID 的几十倍. 因此, 特征-差分格式远优于[4]中的混合 Godunov 格式及全隐格式.

## 参　考　文　献


[1] J. Douglas, Jr, T. F. Russell, SIAM, J. Numer. Anal., **19**:5 (1982), 871—885.
[2] J. Douglas, Jr, SIAM, J. Numer. Anal., **20**:4(1983), 681—696.
[3] 由同顺,孙澈,计算数学,**15**. 2(1993),143—155.
[4] C. N. Dawson, SIAM, J. Numer. Anal., 28:5 (1991), 1282—1309.
[5] J. H. Bramble, Numer. Math. 4(1966), 236—249.