非线性抛物组具并行本性的某些实用差分格式 *1)

周毓麟　沈隆钧　袁光伟
(北京应用物理与计算数学研究所，计算物理实验室，非线性研究中心)

SOME PRACTICAL DIFFERENCE SCHEMES WITH INTRINSIC PARALLELISM FOR NONLINEAR PARABOLIC SYSTEMS

Zhou Yulin　Shen Longjun　Yuan Guangwei
(*Laboratory of Computational Physics, Center of Nonlinear Studies, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics*)

Abstract

In this paper some finite difference schemes with intrinsic parallelism for nonlinear parabolic system are constructed. For the nonlinear difference system with intrinsic parallelism, a mild restriction condition for the steplengths is derived.

§1. 引　论

在 [1—5] 中，对非线性抛物组具并行本性的一般差分格式已进行了研究，得到差分解的存在性、唯一性、收敛性和稳定性等许多结果. 本文将构造一些对实际计算有用的具并行本性的差分格式. 对这些差分格式给出一个关于步长的限制条件. 与直接从 [1—5] 中的结论推导出的条件相比，它是比较有意义的改进，即本文所构造的差分格式的时间步长可取为完全显式差分格式的时间步长的至少 $8k$ 倍 (k 为任一正整数).

考虑一维、两维和三维非线性抛物组的初边值问题. 在一维空间情形，非线性抛物组为

$$u_t = A(x,t,u,u_x)u_{xx} + f(x,t,u,u_x), \quad 在\ Q_T\ 中, \tag{1}$$

其中 $u(x,t)$ 是 m 维未知向量函数， $A(x,t,u,p)$ 是 $m\times m$ 矩阵， $f(x,t,u,p)$ 是 m 维向量函数， $Q_T=\{0<x<l, 0<t\le T\}$. 初边值条件为

$$u(0,t)=\psi_0(t), \quad u(l,t)=\psi_1(t), \quad 0\le t\le T, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\le x\le l, \tag{3}$$

其中 $\psi_0(t), \psi_1(t), \varphi(x)$ 为 m 维向量函数.

* 1996 年 1 月 9 日收到.
1) 国家自然科学基金资助课题和中国工程物理研究院科学基金资助课题，编号 9506081, 960686.

假定以下条件成立：

(I) 问题 (1), (2), (3) 存在唯一光滑解 $u(x,t)\in C^{(3)}(Q_T)$, G 为常数，使得 $|u(x,t)|$, $|u_x(x,t)|$, $|u_{xx}(x,t)|$, $|u_t(x,t)|$, $|u_{xt}(x,t)|\le G$.

(II) 存在常数 $\sigma_0>0$, 使得对任何 $\xi\in\mathbb{R}^m$,

$$(\xi,A(x,t,u,p)\xi)\ge\sigma_0|\xi|^2,\quad \forall(x,t)\in Q_T,\quad u,p\in\mathbb{R}^m. \tag{4}$$

(III) $A(x,t,u,p)$ 和 $f(x,t,u,p)$ 关于 $(x,t)\in Q_T$ 连续，关于 u,p 连续可微.

(IV) $\psi_0(t),\psi_1(t)$ 关于 $t\in[0,T]$ 连续可微， $\varphi(x)$ 关于 $x\in[0,l]$ 连续可微，且 $\psi_0(0)=\varphi(0)$, $\psi_1(0)=\varphi(l)$.

§2. 具并行本性的差分格式

本文采用 [1—4] 中的记号、引理、结果和处理技巧.

用 $x=x_j$ $(j=0,1,\cdots,J)$, $t=t^n(n=0,1,\cdots,N)$ 剖分 Q_T 成小的矩形网格. 其中 $x_j=jh$, $t^n=n\tau$, $Jh=l$, $N\tau=T$, J 和 N 是正整数，h 和 τ 为步长. 记 $v_\Delta=v_h^\tau=\{v_j^n|j=0,1,\cdots,J;n=0,1,\cdots,N\}$ 为定义于 $Q_\Delta=\{(x_j,t^n)|j=0,1,\cdots,J;n=0,1,\cdots,N\}$ 上的 m 维离散向量函数.

构造如下具并行本性的有限差分格式：

$$\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\tau}=A_j^{n+\alpha_j}\overset{*}{\delta}{}^2v_j^{n+\alpha_j}+f_j^{n+\alpha_j},\quad j=1,2,\cdots,J-1;n=0,1,\cdots,N-1, \tag{5}$$

$$v_0^n=\psi_0^n,\ v_J^n=\psi_1^n,\qquad n=0,1,\cdots,N, \tag{6}$$

$$v_j^0=\varphi_j,\qquad j=0,1,\cdots,J, \tag{7}$$

其中 $\psi_0^n=\psi_0(t^n)$, $\psi_1^n=\psi_1(t^n)$, $\varphi_j=\varphi(x_j)$ 且 $\psi_0^0=\varphi_0,\psi_1^0=\varphi_J$,

$$A_j^{n+\alpha_j}=A(x_j,t^{n+\alpha_j},\tilde\delta^0v_j^{n+\alpha_j},\tilde\delta^1v_j^{n+\alpha_j}),\quad f_j^{n+\alpha_j}=f(x_j,t^{n+\alpha_j},\tilde\delta^0v_j^{n+\alpha_j},\tilde\delta^1v_j^{n+\alpha_j}). \tag{8}$$

又有 $\overset{*}{\delta}{}^2v_j^{n+\alpha_j}=a_j\mathbb{A}+b_j\mathbb{B}+c_j\mathbb{C}+d_j\mathbb{D}$, 其中 $\mathbb{A}=(v_{j+1}^n-v_j^n-v_j^{n+1}+v_{j-1}^{n+1})/h^2$, $\mathbb{B}=(v_{j+1}^{n+1}-v_j^{n+1}-v_j^n+v_{j-1}^n)/h^2$, $\mathbb{C}=(v_{j+1}^{n+1}-2v_j^{n+1}+v_{j-1}^{n+1})/h^2$, $\mathbb{D}=(v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n)/h^2$. $a_j+b_j+c_j+d_j=1$. 因此

$$\overset{*}{\delta}{}^2v_j^{n+\alpha_j}=\delta^2v_j^{n+\alpha_j}+s_j^n, \tag{9}$$

其中 $s_j^n=\dfrac{1}{h^2}s_j[(v_{j+1}^{n+1}-v_{j+1}^n)-(v_{j-1}^{n+1}-v_{j-1}^n)]$, $\alpha_j=c_j+\dfrac12(a_j+b_j)$, $s_j=\dfrac12(b_j-a_j)$ $(j=1,2,\cdots,J-1;n=0,1,\cdots,N-1)$.

设 l 和 k 为两个正整数，不失一般性，设 l 为偶数.

将集合 $\{j|j=1,2,\cdots,J-1\}$ 交替地分解为两种类型的子集 (分别记为 $\mathbb{AB}$ 和 $\mathbb{BA}$) 的并. $\mathbb{BA}$ 由如下子集组成：$\{j|j=1,2,\cdots,4k+l\}$, $\{j|j=2(4k+l)-3,2(4k+l)-2,\cdots,3(4k+l)-4\},\cdots,\{j|j=2m(4k+l)-(4m-1),2m(4k+l)-(4m-2),\cdots,(2m+1)(4k+l)-4m\}$, 其中 $(2m+1)(4k+l)-4m=J-1$. 剩下的离散线段为 $\mathbb{AB}$ 型的，它们是 $\{j|j=4k+l-1,4k+l,\cdots,2(4k+l)-2\}$, $\{j|j=3(4k+l)-5,3(4k+l)-4,\cdots,4(4k+l)-6\},\cdots,\{j|j=(2m-1)(4k+l)-(4m-3),(2m-1)(4k+l)-(4m-4),\cdots,2m(4k+l)-(4m-2)\}$.

在 $\mathbb{BA}$ 上，对 $j=1,2,\cdots,4k+l$ 定义如下：

(i) $a_j=0,\ b_j=\dfrac{k-\left[\frac{j-1}{2}\right]}{k}, c_j=d_j=\dfrac{1}{2}(1-b_j)=\dfrac{\left[\frac{j-1}{2}\right]}{2k}$, $j=1,2,\cdots,2k$, 其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数;

(ii) $a_j=b_j=0,\ c_j=d_j=\dfrac{1}{2}\ (j=2k+1,\cdots,2k+l)$;

(iii) $a_j=\dfrac{\left[\frac{j-(2k+l)+1}{2}\right]}{k},\ b_j=0,\ c_j=d_j=\dfrac{1}{2}(1-a_j)=\dfrac{k-\left[\frac{j-(2k+l)+1}{2}\right]}{2k}\ (j=2k+l+1,\cdots,4k+l)$, 于是

$$\alpha_j=\frac{1}{2},\quad j=1,2,\cdots,4k+l, \tag{10}$$

且 $s_j=\dfrac{k-\left[\frac{j-1}{2}\right]}{2k}\ (j=1,2,\cdots,2k)$, $s_j=0\ (j=2k+1,\cdots,2k+l)$, $s_j=-\dfrac{\left[\frac{j-(2k+l)+1}{2}\right]}{2k}$ $(j=2k+l+1,\cdots,4k+l)$.

定义 $s_0=s_1$, 则有

$$\max_{0\le j\le 2k+l-1}|s_{j+1}-s_j|=\frac{1}{2k}, \tag{11}$$

且对奇数 $j\ (1\le j\le 2k+l-1)$ 有

$$s_{j+1}-s_j=0. \tag{12}$$

在 $\mathbb{BA}$ 上

$$\begin{pmatrix}a_j\\ b_j\\ c_j\\ d_j\end{pmatrix}=\left(\overbrace{\begin{matrix}0&0&0&0&\cdots&0&0\\ 1&1&\frac{k-1}{k}&\frac{k-1}{k}&\cdots&\frac{1}{k}&\frac{1}{k}\\ 0&0&\frac{1}{2k}&\frac{1}{2k}&\cdots&\frac{k-1}{2k}&\frac{k-1}{2k}\\ 0&0&\frac{1}{2k}&\frac{1}{2k}&\cdots&\frac{k-1}{2k}&\frac{k-1}{2k}\end{matrix}}^{2k}\ \overbrace{\begin{matrix}0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0\\ \frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\end{matrix}}^{l}\right.$$

$$\left.\overbrace{\begin{matrix}\frac{1}{k}&\frac{1}{k}&\frac{2}{k}&\frac{2}{k}&\cdots&\frac{k-1}{k}&\frac{k-1}{k}&1&1\\ 0&0&0&0&\cdots&0&0&0&0\\ \frac{k-1}{2k}&\frac{k-1}{2k}&\frac{k-2}{2k}&\frac{k-2}{2k}&\cdots&\frac{1}{2k}&\frac{1}{2k}&0&0\\ \frac{k-1}{2k}&\frac{k-1}{2k}&\frac{k-2}{2k}&\frac{k-2}{2k}&\cdots&\frac{1}{2k}&\frac{1}{2k}&0&0\end{matrix}}^{2k}\right),$$

并且

$$\begin{pmatrix}\alpha_j\\ s_j\end{pmatrix}=\left(\overbrace{\begin{matrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{k-1}{2k}&\frac{k-1}{2k}&\cdots&\frac{1}{2k}&\frac{1}{2k}\end{matrix}}^{2k}\ \overbrace{\begin{matrix}\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\ 0&\cdots&0\end{matrix}}^{l}\right.$$

$$\left.\overbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2k} & -\frac{1}{2k} & -\frac{2}{2k} & -\frac{2}{2k} & \cdots & -\frac{k-1}{2k} & -\frac{k-1}{2k} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}}^{2k}\right).$$

在 $\mathbb{AB}$ 上，例如当 $j=4k+l-1,\ 4k+l,\cdots,2(4k+l)-2$，定义：

(i) $a_j=\dfrac{k-\left[\frac{j-(4k+l-1)}{2}\right]}{k}$, $b_j=0$, $c_j=d_j=\dfrac{1}{2}(1-a_j)=-\dfrac{\left[\frac{j-(4k+l-1)}{2}\right]}{2k}$ $(j=4k+l-1,4k+l,\cdots,6k+l-2)$;

(ii) $a_j=b_j=0$, $c_j=d_j=\dfrac{1}{2}$ $(j=6k+l-1,\cdots,6k+2l-2)$;

(iii) $a_j=0, b_j=\dfrac{\left[\frac{j-(6k+2l)+3}{2}\right]}{k}$, $c_j=d_j=\dfrac{1}{2}(1-a_j)=\dfrac{k-\left[\frac{j-(6k+2l)+3}{2}\right]}{2k}$ $(j=6k+2l-1,\cdots,8k+2l-2)$.

于是可得

$$\alpha_j=\frac{1}{2},\quad j=4k+l-1,4k+l,\cdots,8k+2l; \tag{13}$$

$$s_j=-\frac{1}{2}a_j=-\frac{k-\left[\frac{j-(4k+l-1)}{2}\right]}{2k},\quad j=4k+l-1,4k+l,\cdots,6k+l-2;$$

$$s_j=0,\quad j=6k+l-1,\cdots,6k+2l-2;$$

$$s_j=\frac{1}{2}b_j=\frac{\left[\frac{j-(6k+2l)+3}{2}\right]}{2k},\quad j=6k+2l-1,\cdots,8k+2l-2.$$

从而，有

$$\max_{0\le j\le 8k+2l-2}|s_{j+1}-s_j|=\frac{1}{2k}, \tag{14}$$

并且对奇数 $j(1\le j\le 8k+2l-1)$,

$$s_{j+1}-s_j=0, \tag{15}$$

即在 $\mathbb{AB}$ 上,

$$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \\ d_j \end{pmatrix}=\left(\overbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \frac{k-1}{k} & \frac{k-1}{k} & \cdots & \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2k} & \frac{1}{2k} & \cdots & \frac{k-1}{2k} & \frac{k-1}{2k} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2k} & \frac{1}{2k} & \cdots & \frac{k-1}{2k} & \frac{k-1}{2k} \end{matrix}}^{2k}\ \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \end{matrix}}^{l}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cc} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{k} & \frac{1}{k} & \frac{2}{k} & \frac{2}{k} & \cdots & \frac{k-1}{k} & \frac{k-1}{k} \\ \frac{k-1}{2k} & \frac{k-1}{2k} & \frac{k-2}{2k} & \frac{k-2}{2k} & \cdots & \frac{1}{2k} & \frac{1}{2k} \\ \frac{k-1}{2k} & \frac{k-1}{2k} & \frac{k-2}{2k} & \frac{k-2}{2k} & \cdots & \frac{1}{2k} & \frac{1}{2k} \end{matrix}}^{2k} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right).$$

并且

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ s_j \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \overbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{k-1}{2k} & -\frac{k-1}{2k} & \cdots & -\frac{1}{2k} & -\frac{1}{2k} \end{matrix}}^{2k} & \overbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{l} \\ \overbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2k} & \frac{1}{2k} & \frac{2}{2k} & \frac{2}{2k} & \cdots & \frac{k-1}{2k} & \frac{k-1}{2k} \end{matrix}}^{2k} & \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \end{array}\right).$$

(8) 式中的差分近似 $\bar{\delta}^0 v_j^{n+\alpha_j}$, $\tilde{\delta}^0 v_j^{n+\alpha_j}$, $\bar{\delta}^1 v_j^{n+\alpha_j}$ 和 $\tilde{\delta}^1 v_j^{n+\alpha_j}$ 已在 [3] 中定义.

§3. 存在性

记 $u_\Delta = u_h^\tau = \{u_j^n = u(x_j, t^n) | j = 0, 1, \cdots, J; n = 0, 1, \cdots, N\}$, 其中 $u(x,t)$ 是问题 (1), (2), (3) 的唯一光滑解. 于是有

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \bar{A}_j^{n+\alpha_j} \overset{*}{\delta}{}^2 u_j^{n+\alpha_j} + \bar{f}_j^{n+\alpha_j} + R_j^{n+\alpha_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, J-1; n = 0, 1, \cdots, N-1. \tag{5}$$

其中

$$\bar{A}_j^{n+\alpha_j} = A(x_j, t^{n+\alpha_j}, \bar{\delta}^0 u_j^{n+\alpha_j}, \bar{\delta}^1 u_j^{n+\alpha_j}), \quad \bar{f}_j^{n+\alpha_j} = f(x_j, t^{n+\alpha_j}, \tilde{\delta}^0 u_j^{n+\alpha_j}, \tilde{\delta}^1 u_j^{n+\alpha_j}).$$

$$\overset{*}{\delta}{}^2 u_j^{n+\alpha_j} = \delta^2 u_j^{n+\alpha_j} + \frac{\tau}{h^2} s_j \Big(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\tau} - \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\tau} \Big)$$

$$j = 1, 2, \cdots, J-1; n = 0, 1, \cdots, N-1.$$

不难验证截断误差满足

$$R_j^{n+\alpha_j} = O\Big(\frac{\tau}{h} + h\Big).$$

离散初边值条件为

$$u_0^n = \psi_0^n, \quad u_J^n = \psi_1^n, \quad n = 0, 1, \cdots, N, \tag{6}$$

$$u_j^0 = \varphi_j, \quad j = 0, 1, \cdots, J. \tag{7}$$

记 $\omega_\Delta = u_\Delta - v_\Delta = \{\omega_j^n = u_j^n - v_j^n | j = 0, 1, \cdots, J; n = 0, 1, \cdots, N\}$, 那么由 (5)—(7) 和 $(\bar{5})$—$(\bar{7})$, 可得

$$\frac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^n}{\tau} = A(v)_j^{n+\alpha_j} \overset{*}{\delta}{}^2 \omega_j^{n+\alpha_j} + B(u,v)_j^{n+\alpha_j} \bar{\delta}^0 \omega_j^{n+\alpha_j} + C(u,v)_j^{n+\alpha_j} \bar{\delta}^1 \omega_j^{n+\alpha_j}$$

$$+ D(u,v)_j^{n+\alpha_j} \tilde{\delta}^0 \omega_j^{n+\alpha_j} + E(u,v)_j^{n+\alpha_j} \tilde{\delta}^1 \omega_j^{n+\alpha_j} + R_j^{n+\alpha_j}, \tag{16}$$

$$\omega_0^n = \omega_J^n = 0, \quad n = 0, 1, \cdots, N,$$

$$\omega_j^0 = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, J, \tag{17}$$

其中 $A(v)_j^{n+\alpha_j} = A_j^{n+\alpha_j}$, $B(u,v)_j^{n+\alpha_j} = (\tilde{A}_u)_j^{n+\alpha_j} \overset{*}{\delta}{}^2 u_j^{n+\alpha_j}$, $C(u,v)_j^{n+\alpha_j} = (\tilde{A}_p)_j^{n+\alpha_j} \overset{*}{\delta}{}^2 u_j^{n+\alpha_j}$, $D(u,v)_j^{n+\alpha_j} = (\tilde{f}_u)_j^{n+\alpha_j}$, $E(u,v)_j^{n+\alpha_j} = (\tilde{f}_p)_j^{n+\alpha_j}$, 且 $(\tilde{A}_u)_j^{n+\alpha_j} = \int_0^1 A_u(x_j, t^{n+\alpha_j}, \lambda\bar{\delta}^0 u_j^{n+\alpha_j} + (1-\lambda)\bar{\delta}^0 v_j^{n+\alpha_j}, \lambda\bar{\delta}^1 u_j^{n+\alpha_j} + (1-\lambda)\bar{\delta}^1 v_j^{n+\alpha_j}) d\lambda$. 对 $(\tilde{A}_p)_j^{n+\alpha_j}$, $(\tilde{f}_u)_j^{n+\alpha_j}$, $(\tilde{f}_p)_j^{n+\alpha_j}$ 有类似表示式.

记 $R^* = R^{m(J+1)(N+1)}$, 定义 $\Phi: R^* \to R^*$ 如下：

对任何 $z_\Delta = z_h^\tau = \{z_j^n | j = 0, 1, \cdots, J; n = 0, 1, \cdots, N\}$, $\omega_\Delta = \Phi(z_\Delta)$ 为如下差分组的解：

$$\frac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^n}{\tau} = A(u-z)_j^{n+\alpha_j} \overset{*}{\delta}{}^2 \omega_j^{n+\alpha_j} + H_j^{n+\alpha_j}, \tag{18}$$

以及初边值条件 (17), 其中

$$H_j^{n+\alpha_j} = B(u, u-z)_j^{n+\alpha_j} \bar{\delta}^0 \omega_j^{n+\alpha_j} + C(u, u-z)_j^{n+\alpha_j} \bar{\delta}^1 \omega_j^{n+\alpha_j}$$

$$+ D(u, u-z)_j^{n+\alpha_j} \tilde{\delta}^0 \omega_j^{n+\alpha_j} + E(u, u-z)_j^{n+\alpha_j} \tilde{\delta}^1 \omega_j^{n+\alpha_j} + R_j^{n+\alpha_j}.$$

定义 $\Omega \subset R^*$ 为如下有界闭凸集：

$$\Omega = \Big\{ z_\Delta \big| \max_{0 \le n \le N} \|z_h^n\|_\infty, \ \max_{0 \le n \le N} \|\delta z_h^n\|_\infty \le G \Big\}. \tag{19}$$

作线性差分组 (17) 和 (18) 解 ω_Δ 的先验估计.

将 $\overset{*}{\delta}{}^2 \omega_j^{n+\alpha_j} h\tau$ 与 (18) 作内积，对 $j = 1, 2, \cdots, J-1$ 求和，然后与 [3] 中的计算相同，可推出

$$\|\delta\omega_h^{n+1}\|_2^2 - \|\delta\omega_h^n\|_2^2 + 2\tau \sum_{j=1}^{J-1} (\overset{*}{\delta}{}^2 \omega_j^{n+\alpha_j}, A(u-z)_j^{n+\alpha_j} \overset{*}{\delta}{}^2 \omega_j^{n+\alpha_j}) h$$

$$= -\frac{1}{h} \sum_{j=0}^{J-1} 2(s_{j+1} - s_j)(\omega_{j+1}^{n+1} - \omega_{j+1}^n, \omega_j^{n+1} - \omega_j^n)$$

$$- 2\tau \sum_{j=0}^{J-1} (\overset{*}{\delta}{}^2 \omega_j^{n+\alpha_j}, H_j^{n+\alpha_j}) h, \tag{20}$$

其中 $\alpha_0 = \alpha_1$, $\alpha_J = \alpha_{J-1}$, $s_0 = s_1, s_J = s_{J-1}$. 由 (10)—(15), 得

$$\|\delta\omega_h^{n+1}\|_2^2 - \|\delta\omega_h^n\|_2^2 + 2\tau \sum_{j=1}^{J-1} (\overset{*}{\delta}{}^2 \omega_j^{n+\alpha_j}, A(u-z)_j^{n+\alpha_j} \overset{*}{\delta}{}^2 \omega_j^{n+\alpha_j}) h$$

$$\leq \frac{1}{2k}\cdot\frac{\tau^2}{h^2}\sum_{j=1}^{J-1}\left|\frac{\omega_j^{n+1}-\omega_j^n}{\tau}\right|^2 h + 2\tau\left|\sum_{j=1}^{J-1}(\overset{*}{\delta}{}^2\omega_j^{n+\alpha_j}, H_j^{n+\alpha_j})h\right|. \tag{21}$$

引进如下关于步长 τ 和 h 的限制条件：

(V)
$$\frac{1}{4k}\cdot\frac{\tau}{h^2}\sup_{\substack{(x,t)\in Q_T\\|u|\leq 2\delta^0 G\\|p|\leq 2\delta^1 G}}\frac{\rho^2(A(x,t,u,p))}{\sigma(A(x,t,u,p))}\leq 1-\varepsilon, \tag{22}$$

其中 $0<\varepsilon\leq 1$. 在假定 (V) 下，可得

$$\|\delta\omega_h^{n+1}\|_2^2 - \|\delta\omega_h^n\|_2^2 + \frac{1}{2}\tau\sigma_0\varepsilon\|\overset{*}{\delta}{}^2\omega_h^{n+\alpha_h}\|_2^2 \leq K\left\{\|\delta\omega_h^{n+1}\|_2^2 + \|\delta\omega_h^n\|_2^2 + O\left(\frac{\tau}{h}+h\right)\right\}. \tag{23}$$

从而

$$\max_{0\leq n\leq N}\|\delta\omega_h^n\|_2 \leq K\left(\frac{\tau}{h}+h\right), \tag{24}$$

其中 K 为常数，不依赖 h 和 τ, 但依赖 G.

取 h,τ 和 $\dfrac{\tau}{h^{3/2}}$ 足够小，可得

$$\max_{0\leq n\leq N}\|\omega_h^n\|_\infty \leq G, \quad \max_{0\leq n\leq N}\|\delta\omega_h^n\|_\infty \leq G.$$

因此， $\Phi(\Omega)\subset\Omega$. 根据 Brouwer 不动点定理，存在不动点 ω_Δ, 使得 $\omega_\Delta=\Phi(\omega_\Delta)\in\Omega$. 于是， $v_\Delta=u_\Delta-\omega_\Delta$ 是 (5), (6), (7) 的解．如下定理已获证．

定理． 设条件 (I), (II), (III), (IV) 成立，且步长 h 和 τ 满足限制条件 (V) 和

(VI) τ 和 h 足够小，且使 $\dfrac{\tau}{h^{3/2}}$ 足够小，

那么，具并行本性的差分格式 (5), (6), (7) 存在唯一解 $v_\Delta=v_h^\tau=\{v_j^n|j=0,1,\cdots,J;n=0,1,\cdots,N\}$, 且有估计

$$\max_{0\leq n\leq N}(\|\omega_h^n\|_2,\|\delta\omega_h^n\|_2),\ \left(\sum_{n=0}^{N-1}\|\overset{*}{\delta}{}^2\omega_h^{n+\alpha_h}\|_2^2\tau\right)^{1/2},$$

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1}\left\|\frac{\omega_h^{n+1}-\omega_h^n}{\tau}\right\|_2^2\tau\right)^{1/2} = O\left(\frac{\tau}{h}+h\right), \tag{25}$$

$$\max_{0\leq n\leq N}\left(\|\omega_h^n\|_\infty,\ \|\delta\omega_h^n\|_\infty\right) = O\left(\frac{\tau}{h^{3/2}}+h^{1/2}\right). \tag{26}$$

附注．设条件 (I)—(V) 成立，可以证明差分格式 (5), (6), (7) 在以下意义下是稳定的，即差分解在离散泛函空间 $W_2^{(2,1)}(Q_\Delta)$ 中的范数连续依赖于原始问题 (1), (2), (3) 的离散数据 [3,5].

完全显式差分格式的步长限制条件为

(V)′
$$2\cdot\frac{\tau}{h^2}\sup_{\substack{(x,t)\in Q_T\\|u|\leq 2\delta^0 G\\|p|\leq 2\delta^1 G}}\frac{\rho^2(A(x,t,u,p))}{\sigma(A(x,t,u,p))}\leq 1-\varepsilon. \tag{27}$$

不等式 (22) 表明，在第 2 节中构造的差分格式的步长 τ 可取为完全显式格式 (对所有 $j=1,2,\cdots,J-1,\alpha_j=0$) 的步长 τ 的至少 $8k$ 倍．

由第 2 节中 a_j, b_j, c_j, d_j 的定义，可知 $a_{2j-1} = a_{2j}$, $b_{2j-1} = b_{2j}$, $c_{2j-1} = c_{2j}$, $d_{2j-1} = d_{2j}$. 因此，不等式 (21) 右边的和式 $\sum\limits_{j=1}^{J-1} \left|\dfrac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^n}{\tau}\right|^2 h$ 中的每一项出现一次，且仅出现一次. 如果定义更多相邻的 (a_j, b_j, c_j, d_j) 相等 (例如， $a_{3j-1} = a_{3j} = a_{3j+1}$, $b_{3j-1} = b_{3j} = b_{3j+1}$, $c_{3j-1} = c_{3j} = c_{3j+1}$, $d_{3j-1} = d_{3j} = d_{3j+1}$), 那么， (21) 式右边的和 $\sum\limits_{j=1}^{J-1} \left|\dfrac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^n}{\tau}\right|^2 h$ 中的一些项将不出现. 在这种情形下，该和的系数仍是 $\dfrac{1}{2k} \cdot \dfrac{\tau^2}{h^2}$, 因此，限制条件 (V) 保持不变.

如果“删去”某些网格点，即将上面成对出现的相同的 (a_j, b_j, c_j, d_j) 和 (a_j, s_j) 变成单个的，也就是说，在 $\mathbb{BA}$ 上定义

$$
\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \\ d_j \end{pmatrix} =
\begin{array}{c}
\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{k}\ \overbrace{\qquad\qquad}^{l}\ \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{k} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{k} & \frac{2}{k} & \cdots & \frac{k-1}{k} & 1 \\
1 & \frac{k-1}{k} & \cdots & \frac{1}{k} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2k} & \cdots & \frac{k-1}{2k} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{k-1}{2k} & \frac{k-2}{2k} & \cdots & \frac{1}{2k} & 0 \\
0 & \frac{1}{2k} & \cdots & \frac{k-1}{2k} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{k-1}{2k} & \frac{k-2}{2k} & \cdots & \frac{1}{2k} & 0
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

于是有

$$
\begin{pmatrix} \alpha_j \\ s_j \end{pmatrix} =
\begin{array}{c}
\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{k}\ \overbrace{\qquad\qquad}^{l}\ \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{2k} \\
\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} & \frac{k-1}{2k} & \cdots & \frac{1}{2k} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2k} & -\frac{2}{2k} & \cdots & -\frac{k-1}{2k} & -\frac{1}{2}
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

在 $\mathbb{AB}$ 上定义

$$
\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \\ d_j \end{pmatrix} =
\begin{array}{c}
\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{k}\ \overbrace{\qquad\qquad}^{l}\ \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{k} \\
\begin{pmatrix}
1 & \frac{k-1}{k} & \cdots & \frac{1}{k} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{k} & \frac{2}{k} & \cdots & \frac{k-1}{k} & 1 \\
0 & \frac{1}{2k} & \cdots & \frac{k-1}{2k} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{k-1}{2k} & \frac{k-2}{2k} & \cdots & \frac{1}{2k} & 0 \\
0 & \frac{1}{2k} & \cdots & \frac{k-1}{2k} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{k-1}{2k} & \frac{k-2}{2k} & \cdots & \frac{1}{2k} & 0
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

则有

$$
\begin{pmatrix} \alpha_j \\ s_j \end{pmatrix} =
\begin{array}{c}
\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{k}\ \overbrace{\qquad\qquad}^{l}\ \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{k} \\
\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2} & -\frac{k-1}{2k} & \cdots & -\frac{1}{2k} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2k} & \frac{2}{2k} & \cdots & \frac{k-1}{2k} & \frac{1}{2}
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

从而在 (21) 式右边的和 $\sum_{j=1}^{J-1}\left|\frac{\omega_j^{n+1}-\omega_j^n}{\tau}\right|^2 h$ 中的每一项出现两次. 此时, 该和的系数为 $\frac{1}{k}\cdot\frac{\tau^2}{h^2}$, 于是限制条件 (V) 应改为:

$$(\mathrm{V})'' \qquad \frac{1}{2k}\cdot\frac{\tau}{h^2}\sup_{\substack{(x,t)\in Q_T\\ |u|\le 2\hat{\delta}^0 G\\ |p|\le 2\hat{\delta}^1 G}}\frac{\rho^2(A(x,t,u,p))}{\sigma(A(x,t,u,p))}\le 1-\varepsilon. \tag{28}$$

这表明上面构造的差分解的步长 τ 可取为完全显式格式的至少 $4k$ 倍.

在第 2 节中构造的差分格式是具并行本性的差分格式, 格式的离散区域分为两类离散子区域 “$\mathbb{AB}$” 和 “$\mathbb{BA}$”. 由于在 “$\mathbb{B}$” 和 “$\mathbb{A}$” 上的边值已知, 所以可首先在 “$\mathbb{BA}$” 上求解差分格式. 然后利用已求得的边值 “$\mathbb{A}$” 和 “$\mathbb{B}$”, 在 “$\mathbb{AB}$” 上求解差分格式.

§4. 两维和三维问题

在 [4] 中, 已研究了多维半线性抛物组具并行本性的差分格式, 这里将推广第 2—3 节中的想法到多个空间变量的情形. 我们仅仅简略地描述关于两维和三维问题的结果.

分解集合 $\{i|i=1,2,\cdots,I-1\}$ 成两种类型的集合 “$\mathbb{B}_x\mathbb{A}_x$” 和 “$\mathbb{A}_x\mathbb{B}_x$”. 与第 2 节的方法相同, 对每一固定的 $j=1,2,\cdots,J-1$, 定义 $a_{ij},b_{ij},c_{ij},d_{ij}(1\le i\le I-1)$. 类似地, 分解集合 $\{j|j=1,2,\cdots,J-1\}$ 成两种类型的集合 “$\mathbb{B}_y\mathbb{A}_y$” 和 “$\mathbb{A}_y\mathbb{B}_y$”, 与第 2 节的方式相同, 对每一固定的 $i=1,2,\cdots,I-1$, 定义 $\dot{a}_{ij},\dot{b}_{ij},\dot{c}_{ij},\dot{d}_{ij}$ $(1\le j\le J-1)$.

将 [4] 中条件 (V_2) 用以下限制条件 (V_2') 代替:

$$\left(\frac{1}{4k_1}\cdot\frac{\tau}{h_1^2}+\frac{1}{4k_2}\cdot\frac{\tau}{h_2^2}\right)\max_{(x,y,t)\in Q_T}\frac{\rho^2(A(x,y,t))}{\sigma(A(x,y,t))}\le 1-\varepsilon, \tag{29}$$

其中 $0<\varepsilon\le 1$, k_1,k_2 为两正整数.

于是, 用 [4] 中的方法可证明这里构造的差分格式差分解的存在性、唯一性、收敛性和稳定性.

不等式 (29) 表明: 这里构造的差分格式的步长 τ 可取为完全显式格式 ($\alpha_{ij}=0$, 对 $1\le i\le I-1, 1\le j\le J-1$) 的至少 $8\min(k_1,k_2)$ 倍.

这里构造的差分格式是具有并行本性的差分格式, 格式的离散区域分为四类离散子区域 “$(\mathbb{A}_x\mathbb{B}_x,\mathbb{A}_y\mathbb{B}_y)$”, “$(\mathbb{A}_x\mathbb{B}_x,\mathbb{B}_y\mathbb{A}_y)$”, “$(\mathbb{B}_x\mathbb{A}_x,\mathbb{A}_y\mathbb{B}_y)$”, $(\mathbb{B}_x\mathbb{A}_x,\ \mathbb{B}_y\mathbb{A}_y)$”. 首先可在 “$(\mathbb{B}_x\mathbb{A}_x,\ \mathbb{B}_y\mathbb{A}_y)$” 上求解差分格式, 因为在该离散子区域的边界上边值已知. 然后可在 “$(\mathbb{A}_x\mathbb{B}_x,\ \mathbb{B}_y\mathbb{A}_y)$” 和 “$(\mathbb{B}_x\mathbb{A}_x,\ \mathbb{A}_y\mathbb{B}_y)$” 上求解差分格式, 因为在这两类离散子区域上的边值已求出. 最后, 利用前两步的结果, 可在 “$(\mathbb{A}_x\mathbb{B}_x,\ \mathbb{A}_y\mathbb{B}_y)$” 上求解差分格式.

与上面的方法相同, 可对三维问题构造类似的具并行本性的差分格式, 格式的离散子区域可分为八类. 求解差分格式分为如下四步: 首先在 “$(\mathbb{B}_x\mathbb{A}_x,\ \mathbb{B}_y\mathbb{A}_y,\ \mathbb{B}_z\mathbb{A}_z)$” 上求解, 因为在这类离散子区域的边界上边值已知. 第二步, 在 “$(\mathbb{A}_x\mathbb{B}_x,\ \mathbb{B}_y\mathbb{A}_y,\ \mathbb{B}_z\mathbb{A}_z)$”, “$(\mathbb{B}_x\mathbb{A}_x,\ \mathbb{A}_y\mathbb{B}_y,\ \mathbb{B}_z\mathbb{A}_z)$”, “$(\mathbb{B}_x\mathbb{A}_x,\ \mathbb{B}_y\mathbb{A}_y,\ \mathbb{A}_z\mathbb{B}_z)$” 上求解. 第三步, 在 “$(\mathbb{A}_x\mathbb{B}_x,\ \mathbb{A}_y\mathbb{B}_y,\ \mathbb{B}_z\mathbb{A}_z)$”, “$(\mathbb{A}_x\mathbb{B}_x,\ \mathbb{B}_y\mathbb{A}_y,\ \mathbb{A}_z\mathbb{B}_z)$”, “$(\mathbb{B}_x\mathbb{A}_x,\ \mathbb{A}_y\mathbb{B}_y,\ \mathbb{A}_z\mathbb{B}_z)$” 上求解. 最后在 “$(\mathbb{A}_x\mathbb{B}_x,\ \mathbb{A}_y\mathbb{B}_y,\ \mathbb{A}_z\mathbb{B}_z)$” 上求解.

参 考 文 献

[1] 周毓麟，非线性抛物组的具有并行本性差分格式，数值计算与计算机应用， **16**:3 (1995), 162—172.

[2] Zhou Yu-lin, Difference Schemes with Intrinsic Parallelism for Nonlinear Parabolic Systems (I) Alternating Schemes, Preprint, 1995.

[3] Zhou Yu-lin, Difference Schemes with Intrinsic Parallelism for Nonlinear Parabolic Systems (II) General Schemes, Preprint, 1995.

[4] Zhou Yu-lin, Difference Schemes with Intrinsic Parallelism for Nonlinear Parabolic Systems (III) Multi-Dimensional Schemes, Preprint, 1995.

[5] Zhou Yu-lin, Yuan Guang-wei, Difference Schemes with Intrinsic Parallelism for Nonlinear Parabolic Systems (IV) Stability, Preprint, 1995.