分段延迟微分方程线性 θ- 方法数值解渐近稳定性*

张长海　梁久祯　　刘明珠

(大庆石油学院，安达，151400)　　(哈尔滨工业大学)

ASYMPTOTIC STABILITY OF THE θ-METHODS IN THE NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PIECEWISE DELAYS

Zhang Chang-hai　Liang Jiu-zhen　　Liu Ming-zhu

(*Daqing Petroluem Institute*)　　(*Harbin Institute & Technology*)

Abstract

This paper deals with the stability analysis of numerical solution of linear θ-methods for delay differential equations. We focus on the linear test equation $x'(t) = ax(t)+bx([t])$, where a,b are constants and [t] is the largest-integer function. Sufficent conditions are given for the numerical solution to be asymptotic stable.

Key words: Delay differential equations, numerical solution, asymptotic stability, linear θ-methods.

§ 1. 引　言

近几年来，人们对延迟微分方程初值问题数值解的研究产生了很大的兴趣，这是由于延迟问题广泛存在于许多应用科学领域，如生命数学、医学、分析数论、控制论等. 许多数学工作者研究如下形式的常延迟微分方程初值问题

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \qquad t > 0, \tag{1a}$$

$$x(t) = x_0(t), \qquad t \le 0, \tag{1b}$$

其中 $\tau > 0$. 对于变延迟 $\tau = \tau(t)$ 的微分方程也开始受到人们的关注 [1]. 本文考虑具有分段延迟项的变延迟常微分方程初值问题

$$x'(t) = f(t, x(t), x(a(t))), \qquad t > 0, \tag{2a}$$

$$x(t) = x_0(t), \qquad t \le 0, \tag{2b}$$

* 1998 年 7 月 16 日收到.

其中 f, x_0, a 为已知函数，而 $a(t) < t$, 这里 $x(t)$ 为所求函数. 利用数值方法可以计算 $x(t)$ 在节点 $t_n = nh$ 处的近似值 x_n.

§ 2. θ- 方法及试验方程

考虑如下形式的数值方法 [2,3]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} =& x_n + h\{\theta f((n+1)h, x_{n+1}, x^h(a((n+1)h))) \\ &+ (1-\theta) f(nh, x_n, x^h(a(nh)))\}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\theta \in [0,1]$.$x^h(t)$ 由分段线性函数插值定义，即

$$x^h(t) = \frac{t - kh}{h} x_{k+1} + \frac{(k+1)h - t}{h} x_k, \tag{4}$$

其中 $kh < t \leq (k+1)h,\ \ k = 0, 1, 2, \cdots$. 方法 (3)–(4) 称为线性 θ- 方法. 当 $\theta = 0, 1/2, 1$ 时，分别对应的称为 Euler 方法，梯形法和隐式 Euler 方法.

本文以如下方程为试验方程来讨论其数值解稳定性:

$$x'(t) = ax(t) + bx([t]), \qquad t > 0, \tag{5a}$$

$$x(0) = c_0, \tag{5b}$$

其中 $[t]$ 表示不大于 t 的最大整数， a, b 为实系数，这里 c_0 为初值. 由文 [3] 知当 $|c_0| < \infty, a < 0$ 且 $|b| < -a$ 时 (5) 的精确解是渐近稳定的. 我们来考察其数值解是否也具有这一性质.

§ 3. 稳定性分析

将 (3)–(4) 用于 (5), 得如下递推关系:

$$x_{n+1} = x_n + h\{\theta(ax_{n+1} + bx'_{n+1}) + (1-\theta)(ax_n + bx'_n)\}, \tag{6}$$

其中 x'_n 为 $x([t])$ 在 $t = nh$ 处的插值. 由文 [1] 知 (5) 的任何一个解都满足如下条件:

(i) $x(t)$ 是 $(0, \infty)$ 上的连续函数;

(ii) 在 $(0, \infty)$ 上的每一点上除点 $[t] \in (0, \infty)$ 之外导数 $x'(t)$ 存在，且在 $[t] \in (0, \infty)$ 点处单侧导数存在. 由此可选取整数节点以减少逼近误差. 取步长 $h = 1/m$, 其中 m 为正整数，则 (6) 式化为

$$(1 - \theta ha)x_{n+1} = (1 + (1-\theta)ha)x_n + \theta hbx_{m[\frac{n+1}{m}]} + (1-\theta)hbx_{m[\frac{n}{m}]}. \tag{7}$$

记

$$R = \frac{1 + (1-\theta)ha}{1 - \theta ha}, \quad S = \frac{\theta hb}{1 - \theta ha}, \quad T = \frac{(1-\theta)hb}{1 - \theta ha},$$

则 (7) 式可写成

$$x_{n+1} = Rx_n + Sx_{m[\frac{n+1}{m}]} + Tx_{m[\frac{n}{m}]}. \tag{8}$$

定义 1. 方程 (5) 称为渐近稳定的，如果 $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$, 其中 $x(t)$ 为 (5) 的精确解.

由文 [1] 知, (5) 的渐近稳定域可定义为 $H = \{(a, b) | a < 0, |b| < -a; a, b$为 (5) 的系数$\}$.

定义 2. 方法 (3) 称为渐近稳定的，如果将其用于方程 (5) 所得数值解 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ 对任意初值 x_0, 及步长 $h = 1/m$ 都成立，其中 m 为正整数. 记方法 (7) 的渐近稳定域为

$$S = \{(\alpha, \beta) | \alpha = ah, \beta = bh, \lim_{n \to \infty} x_n = 0, \text{满足 } (3)\}.$$

递推式 (8) 可根据 m 的取值情况分成两种情形来讨论，即 $m=1, m>1$.

情形 1. $m=1$, 此时 (8) 式可简化为

$$x_{n+1}=Rx_n+Sx_{n+1}+Tx_n. \tag{9}$$

设

$$U=\frac{R+T}{1-S}, \tag{10}$$

可得如下形式单步递推关系式：

$$x_{n+1}=Ux_n. \tag{11}$$

定理 1. 当 $a<0, |b|<-a, \theta\in[1/2,1]$ 时，由 (11) 所得数值解是渐近稳定的.

证明. 注意到 (11) 式是渐近稳定的，只要 $|U|<1$, 即 $|R+T|<|1-S|$, 或

$$\left|\frac{1+(1-\theta)h(a+b)}{1-\theta ha}\right|<\left|\frac{1-\theta h(a+b)}{1-\theta ha}\right|. \tag{12}$$

当 $a<0$, 由于 $h>0, \theta\in[1/2,1]$, 不等式 (12) 等价于

$$|1+(1-\theta)h(a+b)|<|1-\theta h(a+b)|. \tag{13}$$

又 $|b|<-a$, 则 (13) 等价于

$$|1+(1-\theta)h(a+b)|<1-\theta h(a+b) \tag{14}$$

或

$$1+(1-\theta)h(a+b)<1-\theta h(a+b), \tag{15a}$$

$$1+(1-\theta)h(a+b)>\theta h(a+b)-1. \tag{15b}$$

(15) 等价于

$$a+b<0, \tag{16a}$$

$$(2\theta-1)h(a+b)<2. \tag{16b}$$

由于 $|b|<-a, \theta\in[1/2,1]$, (16) 式显然成立. 定理证毕.

情形 2. $m>1$. 此时为便于分析可再将其分成两种情形来讨论，即 $\left[\frac{n+1}{m}\right]=\left[\frac{n}{m}\right]$ 或 $\left[\frac{n+1}{m}\right]\neq\left[\frac{n}{m}\right]$.

(1) 当 $\left[\frac{n+1}{m}\right]=\left[\frac{n}{m}\right]$ 成立时，有 $\left[\frac{n+1}{m}\right]=\left[\frac{n}{m}\right]\geq n-m+2$, 于是 (8) 的向量形式为

$$\begin{pmatrix} x_{n-m+2}\\ x_{n-m+3}\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\\ x_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & S+T & \cdots & 0 & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-m+1}\\ x_{n-m+2}\\ \vdots\\ x_{m[\frac{n}{m}]}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \tag{17}$$

(2) $\left[\frac{n+1}{m}\right]\neq\left[\frac{n}{m}\right]$ 或 $\left[\frac{n+1}{m}\right]=\left[\frac{n}{m}\right]+1$ 时，(8) 式化为

$$x_{n+1}=\frac{R}{1-S}x_n+\frac{T}{1-S}x_{n-m+1}. \tag{18}$$

其对应的向量形式为

$$\begin{pmatrix} x_{n-m+2} \\ x_{n-m+3} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \frac{T}{1-S} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{R}{1-S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-m+1} \\ x_{n-m+2} \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{19}$$

结合 (17) 和 (18) 式, 则有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n-m+2} \\ x_{n-m+3} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \frac{T}{1-S} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{R}{1-S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & S+T & \cdots & 0 & R \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} x_{n-m+1} \\ x_{n-m+2} \\ \vdots \\ x_{n-3} \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \frac{T}{1-S} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{R}{1-S} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & S+T & \cdots & 0 & R \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S+T & R \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & S+T+R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-2m+2} \\ x_{n-2m+3} \\ \vdots \\ x_{n-m-1} \\ x_{n-m} \\ x_{n-m+1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{20}$$

记

$$X_{n+1} = (x_{n-m+2}, \cdots, x_{n+1})^T,$$

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & S+T & \cdots & 0 & R \end{pmatrix},$$

这里 $(A_j)_{mj} = S+T, j = 2,3,\cdots,m-1$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \dfrac{T}{1-S} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{R}{1-S} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & R+S+T \end{pmatrix},$$

则 (20) 式化为如下简单的形式:

$$X_{n+1} = BA_2A_3\cdots A_{m-1}CX_{n-m+1}. \tag{21}$$

记 $A = BA_2A_3\cdots A_{m-1}C$. 由 (21) 可递推出

$$X_{n+1} = A^kX_{n-km+1}. \tag{22}$$

事实上，经繁琐的矩阵相乘运算，有

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & S+T+R \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & S+T+R(S+T+R) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & S+T+R(S+T)+R^2(S+T)+\cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{1-S}(T+(S+T)R\frac{1-R^{m-1}}{1-R}+R^m) \end{pmatrix}$$

而

$$\rho(A) = |\frac{1}{1-S}(T+(S+T)R\frac{1-R^{m-1}}{1-R}+R^m)|. \tag{23}$$

定理 2. 当 $a<0, |b|<-a$, 且 $\theta \in [1/2,1]$ 时，由 (21) 式所得数值解是渐近稳定的.

证明. 只需证如下两个不等式成立，即

$$T+(S+T)R\frac{1-R^{m-1}}{1-R}+R^m < 1-S, \tag{24a}$$

$$T+(S+T)R\frac{1-R^{m-1}}{1-R}+R^m > S-1. \tag{24b}$$

首先证 (24a), 事实上由 $a<0,\theta\in[1/2,1],h>0$ 得 $|R|<1$, 故

$$\begin{aligned}
&T+(S+T)R\frac{1-R^{m-1}}{1-R}+R^m<1-S\\
&\Longleftrightarrow (R+S+T-1)(R^m-1)>0\\
&\Longleftrightarrow (R+S+T-1)<0\\
&\Longleftrightarrow a+b<0 \qquad (25)
\end{aligned}$$

因此在定理 2 的条件下不等式 (24a) 成立.

$$\begin{aligned}
&T+(S+T)R\frac{1-R^{m-1}}{1-R}+R^m>S-1\\
&\Longleftrightarrow R^{m+1}+(T+S-1)R^m+(1-2S)R+S-T-1<0\\
&\Longleftrightarrow (R^m+1)(R+S+T-1)<2(RS+T)\\
&\Longleftrightarrow a+b<\frac{2b}{(1+R^m)(1-\theta ha)}. \qquad (26)
\end{aligned}$$

当 $b\geq 0$ 时, 由于 $a<0,|b|<-a,|R|<1,\theta\in[1/2,1]$, 不等式 (26) 显然成立. 当 $b>0$ 时, 则有

$$\begin{aligned}
&a+b<\frac{2b}{(1+R^m)(1-\theta ha)}\Longleftrightarrow 1+R^m>\frac{2}{(1+\frac{a}{b})(1-\theta ha)}\\
&\Longleftrightarrow (\frac{1+(1-\theta)ha}{1-\theta ha})^m>\frac{\theta ha}{1-\theta ha}+\frac{1-\frac{a}{b}}{(1+\frac{a}{b})(1-\theta ha)}. \qquad (27)
\end{aligned}$$

若 $1+(1-\theta)ha\geq 0$, 显然 (27) 成立. 若 $1+(1-\theta)ha<0$, 由于 $\theta\in[1/2,1]$, 则 $1+(1-\theta)ha>\theta ha$ 而

$$\frac{1-\frac{a}{b}}{(1+\frac{a}{b})(1-\theta ha)}<0,(\frac{1+(1-\theta)ha}{1-\theta ha})^m>\frac{1+(1-\theta)ha}{1-\theta ha},$$

故 (27) 亦成立, 结合 (25),(26),(27) 定理 2 得证.

注意到定理 2 的证明只是考虑 $\left[\frac{n+1}{m}\right]=\left[\frac{n}{m}\right]$ 的情形. 事实上, 对于 $\left[\frac{n+1}{m}\right]\neq\left[\frac{n}{m}\right]$ 的情形同样可证定理 2, 只要注意到

$$X_{n+1}=DA^kX_{n^*+1-km}, \qquad (28)$$

其中 n^* 是一整数, 满足 $\left[\frac{n^*+1}{m}\right]=\frac{n^*+1}{m}$, 而 $n-m\leq n^*\leq n$. 这里 D 是一矩阵, 即 $D=A_jA_{j+1}\cdots A_{m-1}C$, 其中 $j=n-n^*+2$.

定理 3. 当 $\theta\in[1/2,1]$ 时, 有 $H\subset S$.

参 考 文 献

[1] Kenneth L, Cook, Josph Wiener. Retarded differential equations with piecewise constant delays, *J. Math. Anal. And Appl.*, **99**(1984),265–297.

[2] M.Z.Liu, Spijker, M N. The stability of the θ-methods in the numerical solution of delay differential equations, IMAJ.Numer. Anal. **10**(1990),31–48.

[3] Jackiewicz Z. Asymptotic stability analysis of θ-methods for functional differential equations, Numer. Math. **43**(1984),389–396.