

高速公路混合交通流的数值模拟*

解志民 朱祚金 王永富

(中国科学技术大学 工程科学学院 合肥 230026)

摘 要

本文用广义 LWR 模型描述四相混合的高速公路交通流, 利用二阶 TVD 格式寻求了相应的数值解, 给出了交通流动的特征值和右特征矩阵的计算过程. 举例说明了计算方法的可行性, 模拟发现了高速公路混合车流的疏散特征和双环磁滞曲线.

关键词: TVD 格式, 混合交通流, 状态方程

NUMERICAL SIMULATION OF MIXED FREEWAY TRAFFIC FLOWS

Xie Zhimin Zhu Zuojin Wang Yongfu

(School of Engineering Science, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026)

Abstract

This paper describes four-phase mixed freeway traffic flows in terms of an extended LWR (Lighthill-Whitham-Richards) model, with the traffic flow simulations conducted by virtue of the second order TVD (Total Variation Diminishing) scheme. The process of the calculation of eigenvalues and the right characteristic matrix in the traffic problem was presented, with its applicability being elucidated by the examples of mixed-freeway traffic simulations. It was found that there are rarefaction characteristics and double-loop hysteresis curve in the exemplified mixed freeway traffic flows.

Key words: TVD scheme, mixed traffic flows, state equation

§1. 引 言

交通对社会发展影响很大, 几十年以前, Lighthill, Whitham^[1] 和 Richards^[2] 就以车流量守恒原理为基础, 用流动比拟的方法分别提出了著名的 LWR 交通流模型. 最近几年, 人们把这种模型推广应用于描述混合交通流^[3], 研究发现该交通流模型的解存在交通磁滞现象. 车队离开交通运动激波时的流量 - 密度关系, 不同于车队接近运动激波时的流量密度关系^[4]. 近年来, 交通流研究在国内得到了应有的重视, 人们提出了比较合理的理论模型^[5] 和比较有效的计算方法^[6]. 从广义的 LWR 模型出发, 人们已经开展了用 WENO 格式对几十

* 2004 年 10 月 8 日收到.

相混合交通流的数值研究^[7], 本文则用文献 [8] 提出的交通流模型描述有四相混合的高速公路交通流, 通过数值模拟, 发现了混合交通流疏散过程中的一些演变特征.

§2. 多相交通流模型

本文中交通流模型采用文献 [8] 中所介绍的交通流连续性方程组模型. 应用该模型前我们采用以下的简化假定: 1. 忽略交通斜道和交叉口的影响. 2. 高速公路主干道的混合车流由四类自由车速不等的车辆组成, 每一类车辆的运动受到总的交通流密度的约束, 遵守各自的速度 - 密度变化规律. 为了给出模型方程, 我们先将交通流控制方程进行无量纲化, 取 $q_0 = 1800 \text{vh/h}$, $\rho_m = 120 \text{vh/km}$, $L_0 = 120 \text{km}$ 为交通流量, 车流密度和长度的尺度. 相应地, 时间尺度和速度尺度分别为 $t_0 = L_0 \rho_m / q_0$ 和 $v_0 = q_0 / \rho_m$, 因此无量纲化的混合交通流控制方程可以写为

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_i u_i)}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (1)$$

方程 (1) 需要补充第 i 相车流的速度与分密度 ρ_i 的关系, 为此我们用混合交通流状态方程

$$u_i = v_{f,i} (1 - \rho^{n_i}), \quad \rho = \sum_{i=1}^4 \rho_i, \quad (2)$$

其中 $v_{f,i}$, n_i 分别是第 i 相车流的自由流车速和速度 - 密度关系指数. 可以看出, 在这种模型中把自由流车速相同的车流当作一相, 具有相同速度 - 密度关系. 通过令混合交通流的分流量 $(\rho_i u_i)$ 对分密度求出的偏导数为零, 可以得到分流的最佳密度 b_i 与速度 - 密度关系指数 n_i 的约束关系

$$b_i^{n_i} = \frac{1}{n_i + 1} \quad (3)$$

流动控制方程组 (1) 的边界条件取为 $\rho_i = \rho_i(x, t)$, 当 $x = a$ $\partial \rho_i / \partial x = 0$, 当 $x = b$ 初始条件取为 $\rho_i = \rho_i(x, t)$, 当 $t = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. 四相交通流控制方程 (1) 存在四个特征值, 对于满足状态方程 (2) 的混合交通流, 一般来说这些特征值都是实数, 这一点可以用数值计算得到验证. 本模型只涉及一个偏微分方程组 (1), 没有考虑车流的加速度和动量守恒, 因此不能给出混合交通流的动力学特征, 这是它的一个主要缺陷.

§3. 计算方法

为了便于算法描述, 我们把广义 LWR 模型写成如下的向量模式:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho})}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

这里 $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)^T$, 车流量 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)^T$, 各个分量可以分别是

$$F_i = v_{f,i} \rho_i (1 - \rho^{n_i}), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (5)$$

上标 T 表示矩阵或向量的转置, 同时我们可以写出 Jacobian 矩阵 A 的表达式

$$A = \left(\frac{\partial F_i}{\partial \rho_j} \right). \quad (6)$$

对应于 Jacobian 矩阵 A 的特征方程可以写为 [8]

$$\lambda^4 - p_1 \lambda^3 - p_2 \lambda^2 - p_3 \lambda - p_4 = 0, \quad (7)$$

其中的系数可用文献 [8] 中介绍的 F-L 方法计算. 结合数学手册 [9] 中一元四次方程实根的求解方法, 可以不用迭代而直接求出特征值 λ . 根据这些特征值, 可以得出 Jacobian 矩阵的右特征矩阵, 形式如下:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 & \mathbf{r}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

右特征向量一定满足代数方程组 $(A - \lambda_j I) \mathbf{r}_j = 0$ 利用高斯消去法, 可将系数矩阵变成下三角矩阵, 则右特征向量可以顺利求出. 同时根据右特征向量 \mathbf{R} 可以求逆得到左特征矩阵 $\mathbf{L} = \mathbf{R}^{-1} = (\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4)^T$. 接下来我们就可以应用 Yee-Roe-Davis 二阶 TVD 格式来进行数值模拟 [10], 有

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \omega (\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}), \quad (9)$$

这里 $\omega = \Delta t / \Delta x$, 是时间和空间步长的比值,

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}(\rho_j^n) + \mathbf{F}(\rho_{j+1}^n) + \sum_{k=1}^4 \Psi_{k,j+1/2} \mathbf{r}_{k,j+1/2} \right], \quad (10)$$

$$\Psi_{k,j+1/2} = -\frac{1}{\omega} \left[(\omega \lambda_{k,j+1/2})^2 q_{k,j+1/2} + Q_k(\omega \lambda_{k,j+1/2}) (\alpha_{k,j+1/2} - q_{k,j+1/2}) \right], \quad (11)$$

$$q_{k,j+1/2} = \min \text{mod} (\alpha_{k,j-1/2}, \alpha_{k,j+1/2}, \alpha_{k,j+3/2}), \quad (12)$$

$$Q_k(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \geq \varepsilon_k, \\ \frac{x^2 + \varepsilon_k^2}{2\varepsilon_k}, & |x| \leq \varepsilon_k, \end{cases} \quad (13)$$

$$\alpha_{k,j+1/2} = \mathbf{l}_{k,j+1/2} (\rho_{j+1}^n - \rho_j^n), \quad (14)$$

式中 $\lambda_{k,j+1/2}$, $\mathbf{l}_{k,j+1/2}$, $\mathbf{r}_{k,j+1/2}$ 分别是矩阵 Jacobian 矩阵 $A_{j+1/2}$ 的特征值、左特征向量、右特征向量. 因为 TVD 格式是显式, 计算时用的时间步长 Δt 应当满足 Courant 条件

$$\omega \max_{j,k} |\lambda_{k,j+1/2}| < 1. \quad (15)$$

§4. 结果与讨论

用上面介绍的数值方法, 模拟四相混合交通流由拥挤到疏散的过程可以得到待讨论的结果. 要说明的是:

- 各相车流的自由流车速按以下公式来计算

$$v_{f,k} = \frac{1.0}{b_k (1 - b_k^{n_k})} \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (16)$$

- 速度 - 密度关系指数 ($n_i, i = 1, 2, 3, 4$) 通过式 (3) 来计算.
- 出现在 $Q_k(x)$ 函数中的参数 ($\varepsilon_k, k = 1, 2, 3, 4$) 我们选择 0.025 使数值粘性较小.

在数值模拟交通流动过程中, 取长为 20km 的高速公路段为研究的区间, 并分成均匀的 100 个网格, 同时分别取 $b_1 = 0.4, b_2 = 0.41, b_3 = 0.42, b_4 = 0.43$. 根据式 (16), 能够求出四种车辆的自由流车速.

在该高速公路段上的交通流总密度初始分布如图 1 所示. 从图 1(a) 可见车流高度集中的路段对应的区间是 $x \in [0.2, 0.39]$, 其中各相车流分密度分别是 $\rho_1 = 0.09, \rho_2 = 0.08, \rho_3 = 0.07, \rho_4 = 0.06$. 在该区间外的各相车流分密度为密集区间内的 66.7%. 从图 1(b) 中, 可见在此区间 $x \in [0.2, 0.39]$ 内各相车流密度分别是 $\rho_1 = 0.14, \rho_2 = 0.13, \rho_3 = 0.12, \rho_4 = 0.11$, 而在此区间以外各相车流分密度为此车流密集区间内的 50%. 在车流入口处, 密度设为 $\rho = 0.02$, 且令出口条件满足 $d\rho_i/dx = 0$. 我们对这两种情况下的交通流从拥挤到疏散的过程进行数值模拟.

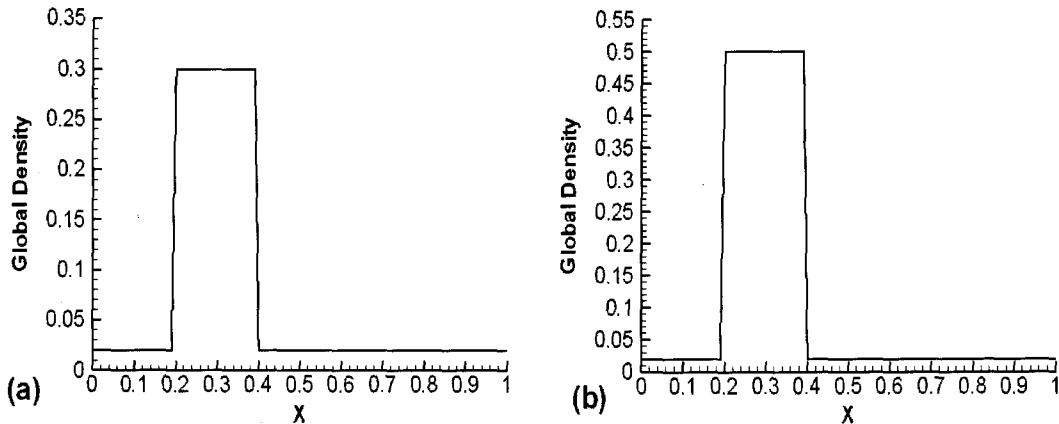


图 1 总的车流密度的初始条件 (a) 总车流密度为 0.3 的情况 (b) 总车流密度为 0.5 的情况

如图 2 所示, 可以看出这两种疏散过程是不完全相同的. 用图 1(a) 给出的初始条件, 车流的疏散曲线较平滑, 因为在高速公路主干道上车流密集区间上的车流密度小于最佳密度, 这时车流是通畅而稳定的. 如果用图 1(b) 给出的初始条件, 这时聚集车流密度超过车流的最佳密度, 该密度介于 $b_1 (= 0.4)$ 和 $b_4 (= 0.43)$ 之间, 从图 2(b) 可知, 此时初始阶段的疏散过程

存在疏散曲线都相交的一个转折点, 其位置大约在 $x=0.39$, 转折点处交通流密度等于最佳密度. 原因是当交通流密度达到最佳密度时, 交通扰动的传播速度为零 ($\partial \sum_i F_i / \partial \sum_i \rho_i = 0$). 这种疏散特征与 WENO 格式得出的结果是一致的 [6]. 疏散导致车流密度的峰值下降, 当峰值低于最佳密度时, 车流转变为稳定的疏散过程, 与图 2(a) 中显示的结果相似.

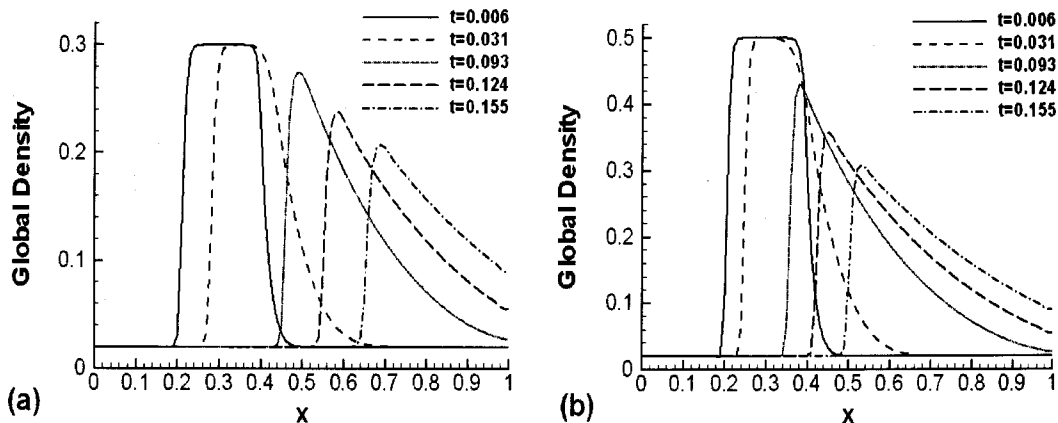


图 2 车流疏散曲线 (a) 总的车流密度为 0.3 (b) 总的车流密度为 0.5

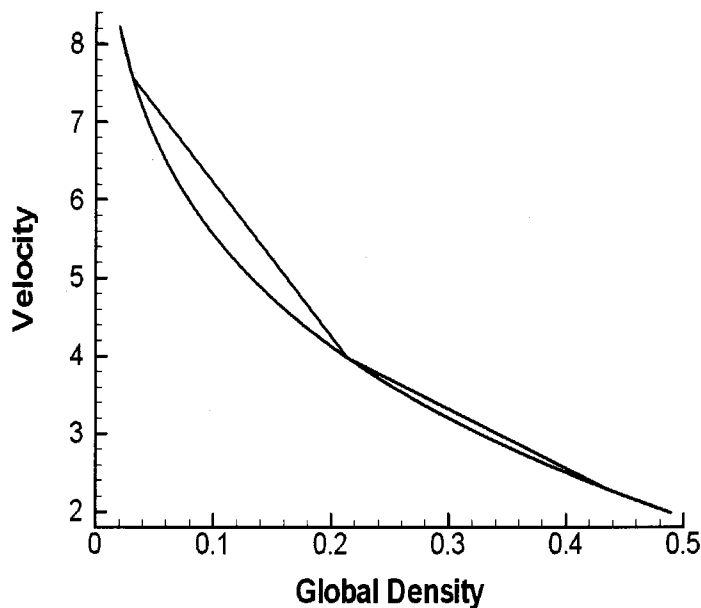


图 3 第一相车流的密度 - 速度关系曲线

比较图 2(a) 和图 2(b) 的结果可以发现, 对于非稳定交通流的疏散过程, 疏散交通波具有比较慢的传播速度. 由于本文应用的是二阶的 TVD 方法, 从理论上讲在精度方面不如著名的 WENO 格式高, 但 TVD 方法简单易行, 用于混合交通流模拟也可以得到可靠的计算

结果.

图 2(a) 所示的结果还表明用二阶 TVD 格式和广义 LWR 模型, 模拟高速公路混合交通, 可以得出交通磁滞曲线, 它反映车流运动的非线性特点. 图 3 所示的是呈双环形的第一相车流运动的磁滞曲线. 在实际的交通状况中, 还可能会出现单环甚至多环等情况^[3].

§5. 结 论

本文利用广义 LWR 交通流模型和二阶 TVD 格式, 对四相混合的高速公路交通流的疏散过程进行了数值模拟. 发现当高速公路主干道上车流密集处的车流密度小于最佳密度时, 车流是通畅而稳定的. 当聚集车流密度超过最佳密度时, 初始阶段的疏散过程存在一个疏散曲线都相交的转折点, 而且交通波传播速度较慢. 模拟结果还发现了混合交通流存在的磁滞双环, 它体现了混合车流运动的复杂性.

参 考 文 献

- [1] Lighthill M.J. & Whitham G.B., On kinematic waves. II: A theory of traffic flow on long crowded roads. Proc. Roy. Soc. London, A, vol.229(1955), 317-345.
- [2] Richards P.I., Shock waves on the highway, Oper.Res., vol.4(1956), 42-51.
- [3] Wong G.C.K. & S.C. Wong S.C., A multi-class traffic flow model-an extension of LWR model with heterogeneous drivers, Transportation Research, Part A vol.36(2002), 827-841.
- [4] Kuhne R.D. & Michalopoulos P., Continuum flow models, Chpt. 5 <http://www-cta.ornl.gov/cta/research/trb/tft.htm>, 2001.
- [5] 姜锐, 吴清松, 朱祚金, 一种新的交通流动力学模型, 科学通报, vol.45(2000), 1895-1899.
- [6] Liu R.X., Li H. & Wang Z.F., The discontinuous finite element method for red-and-green light model for the traffic flow, Mathematics and Computers in Simulation, 56:1(2001), 55-67.
- [7] Zhang M.P., Shu C.W., Wong G.C.K. & Wong S.C., A weighted essentially non-oscillatory numerical scheme for a multi-class LWR traffic flow model, Journal of Computational Physics, vol.191(2003), 639-659.
- [8] Zhu Z.J., Chang G.L. & T.Q. Wu, Numerical analysis of freeway traffic flow dynamics under multi-class drivers, Transportation Research Record, vol.1852(2003), 201-208.
- [9] 王福明, 贺正辉, 应用数值计算方法, 科学出版社, 北京, 1992.
- [10] 王元等编著, 数学手册, 高等教育出版社, 北京, 1979.
- [11] 水鸿寿, 一维流体力学差分方法, 国防工业出版社, 北京, 1998.