第11卷 第1期 电子科学学刊 Vol.11. No.1
1989年1月 JOURNAL OF ELECTRONICS Jan. 1989

标准和非标准柱矢量波函数及其转换关系*

黎志坚 周学松
(华东师范大学,上海) (上海微波技术研究所,上海)

摘要 本文定义并构造了柱矢量波函数，导出标准和非标准柱矢量波函数的转换关系式。具体讨论了圆柱、椭圆柱和抛物柱系统中的标准和非标准矢量波函数及其转换关系式，其中圆柱坐标系统中的结果与作者1984年的结果完全一致。

关键词: 柱函数;生成函数;领示矢量;矢量波函数

1. 引言

文献[1]中提出，在某个坐标系统里，用同一生成函数集，不同的领示矢量，可以构成标准和非标准矢量波函数。但只在六个可分离变量坐标系中，才有正交、完备的标准矢量波函数系。在圆柱和圆球坐标中，标准和非标准矢量波函数的转换关系已经导出，并用它很方便地解决了平面分层媒质中两维和三维埋入异物的电磁辐射和散射场的多极子展开问题[2]。

本文用柱函数(包括圆柱、椭圆柱和抛物柱函数)作为生成函数集，构造了柱矢量波函数，利用圆柱、椭圆柱和抛物柱函数的共同特性，导出了柱坐标系中，标准和非标准柱矢量波函数的转换关系式，从而更进一步完善了标准和非标准矢量波函数理论。

2. 标准和非标准柱矢量波函数及其转换关系

圆柱、椭圆柱和抛物柱坐标系的共同特点是：沿纵向(即 z 向)不变，而横向是由径向变量和角向变量来描述的。因而，可以用柱函数统一圆柱、椭圆柱和抛物柱函数，用柱矢量波函数统一圆柱、椭圆柱和抛物柱矢量波函数，从而研究它们的共同特性。

根据 Morse-Feshbach 判据[3]，当取 $\hat{z}$ 为领示矢量时，柱矢量波函数是标准矢量波函数；而取 $\hat{x}$ 或 $\hat{y}$ 为领示矢量时，柱矢量波函数是非标准的。即

$$\psi_{\substack{e\\o}m}(h)=f_{\substack{e\\o}m}(u,v)e^{ihz} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{L}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)=\nabla\psi_{\substack{e\\o}m}(h) \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)=\nabla\times[\hat{z}\psi_{\substack{e\\o}m}(h)] \tag{2b}$$

$$\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)=\frac{1}{k}\nabla\times\nabla\times[\hat{z}\psi_{\substack{e\\o}m}(h)] \tag{2c}$$

---

* 1987年5月11日收到，1987年9月19日修改定稿。

和

$$\boldsymbol{L}^{(x,y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) = \nabla\phi_{\substack{e\\0}m}(h) \tag{3a}$$

$$\boldsymbol{M}^{(x,y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) = \nabla \times [(\hat{x},\hat{y})\phi_{\substack{e\\0}m}(h)] \tag{3b}$$

$$\boldsymbol{N}^{(x,y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) = \frac{1}{k}\nabla \times \nabla \times [(\hat{x},\hat{y})\phi_{\substack{e\\0}m}(h)] \tag{3c}$$

式中 $f_{\substack{e\\0}m}(u,v)$ 是柱函数。

柱函数 $f_{\substack{e\\0}m}(u,v)$ 展开成平面波为[4]

$$f_{\substack{e\\0}m}(u,v) = \int_c g_{\substack{e\\0}m}(\beta)e^{i\lambda p}d\beta \tag{4}$$

其中 $p = x\cos\beta + y\sin\beta, \lambda = \sqrt{k^2 - h^2}$，$g_{\substack{e\\0}m}(\beta)$ 是只与 β 和 m 有关的函数。柱矢量波函数的展开式则写为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) &= \Delta\phi_{\substack{e\\0}m}(h)\\ &= \Big\{\int_c i\lambda\cos\beta g_{\substack{e\\0}m}(\beta)e^{i\lambda p}d\beta\hat{x}\\ &\quad + \int_c i\lambda\sin\beta g_{\substack{e\\0}m}(\beta)e^{i\lambda p}d\beta\hat{y}\\ &\quad + \int_c ihg_{\substack{e\\0}m}(\beta)e^{i\lambda p}d\beta\hat{z}\Big\}e^{ihz}\end{aligned} \tag{5a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) &= \nabla \times [\hat{z}\phi_{\substack{e\\0}m}(h)] = \nabla\phi_{\substack{e\\0}m}(h) \times \hat{z}\\ &= \Big\{\int_c i\lambda\sin\beta g_{\substack{e\\0}m}(\beta)e^{i\lambda p}d\beta\hat{x}\\ &\quad - \int_c i\lambda\cos\beta g_{\substack{e\\0}m}(\beta)e^{i\lambda p}d\beta\hat{y}\Big\}e^{ihz}\end{aligned} \tag{5b}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) &= \frac{1}{k}\nabla \times \nabla \times [\hat{z}\phi_{\substack{e\\0}m}(h)] = \frac{1}{k}\nabla \times M_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)\\ &= \frac{1}{k}\Big\{\int_c \lambda^2 g_{\substack{e\\0}m}(\beta)e^{i\lambda p}d\beta\hat{z}\\ &\quad - \int_c h\lambda\sin\beta g_{\substack{e\\0}m}(\beta)e^{i\lambda p}d\beta\hat{y}\\ &\quad - \int_c h\lambda\cos\beta g_{\substack{e\\0}m}(\beta)e^{i\lambda p}d\beta\hat{x}\Big\}e^{ihz}\end{aligned} \tag{5c}$$

和

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^{(x,y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) &= \nabla\phi_{\substack{e\\0}m}(h)\\ &= \Big\{\int_c i\lambda\cos\beta g_{\substack{e\\0}m}(\beta)e^{i\lambda p}d\beta\hat{x}\\ &\quad + \int_c i\lambda\sin\beta g_{\substack{e\\0}m}(\beta)e^{i\lambda p}d\beta\hat{y}\\ &\quad + \int_c ihg_{\substack{e\\0}m}(\beta)e^{i\lambda p}d\beta\hat{z}\Big\}e^{ihz}\end{aligned} \tag{6a}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}^{(x,y)}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h) &= \nabla\times[(\hat{x},\hat{y})\phi_{\substack{e\\o}m}(h)]\\
&=\left\{\int_c ihg_{\substack{e\\o}m}(\beta)e^{i\lambda\rho}d\beta(\hat{y},-\hat{x})\right.\\
&\quad\left.+\int_c i\lambda(-\sin\beta,\cos\beta)g_{\substack{e\\o}m}(\beta)e^{i\lambda\rho}d\beta\hat{z}\right\}e^{ihz}
\end{aligned}
\tag{6b}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}^{(x,y)}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h) &= \frac{1}{k}\nabla\times\nabla\times[(\hat{x},\hat{y})\phi_{\substack{e\\o}m}(h)]\\
&=\frac{1}{k}\left\{\int_c(h^2+\lambda^2\sin^2\beta,-\lambda^2\cos\beta\sin\beta)g_{\substack{e\\o}m}(\beta)e^{i\lambda\rho}d\beta\hat{x}\right.\\
&\quad+\int_c(-\lambda^2\sin\beta\cos\beta,h^2+\lambda^2\cos^2\beta)g_{\substack{e\\o}m}(\beta)e^{i\lambda\rho}d\beta\hat{y}\\
&\quad\left.-\int_c h\lambda(\cos\beta,\sin\beta)g_{\substack{e\\o}m}(\beta)e^{i\lambda\rho}d\beta\hat{z}\right\}e^{ihz}
\end{aligned}
\tag{6c}
$$

标准和非标准柱矢量波函数的转换关系式，可以通过比较两者的直角分量得到．首先，标准和非标准柱矢量波函数的生成函数集相同，纵向部分 $\boldsymbol{L}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)$ 不变．即

$$\boldsymbol{L}^{(x,y)}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)=\boldsymbol{L}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h) \tag{7a}$$

横向的转换关系式为：

$$\boldsymbol{M}^{(x,y)}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)=\frac{h^2}{\lambda^2}(\hat{y},-\hat{x})\times\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)-\frac{ihk}{\lambda^2}(\hat{x},\hat{y})\times\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h) \tag{7b}$$

和

$$\boldsymbol{N}^{(x,y)}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)=-\frac{k}{\lambda^2}[(\hat{y},-\hat{x})\cdot\nabla]\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)-\frac{ih}{\lambda^2}[(\hat{x},\hat{y})\cdot\nabla]\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h) \tag{7c}$$

(7)式是用标准柱矢量波函数表示非标准矢量波函数的显式． 同样可以得出用非标准柱矢量波函数表示标准矢量波函数的显式．即为

$$\boldsymbol{L}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)=\boldsymbol{L}^{(x,y)}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h) \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)=\hat{x}\times\boldsymbol{M}^{(y)}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)-\hat{y}\times\boldsymbol{M}^{(x)}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h) \tag{8b}$$

和

$$\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)=-\frac{1}{k}[(\hat{x}\cdot\nabla)\boldsymbol{M}^{(y)}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)-(\hat{y}\cdot\nabla)\boldsymbol{M}^{(x)}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)] \tag{8c}$$

3. 圆柱、椭圆柱和抛物柱矢量波函数及其转换关系

文献[1]已着重讨论过标准和非标准圆柱矢量波函数及其转换关系式．可以证明，使用本文统一柱函数理论也可得到相同的结果．

圆柱函数的平面波展开式为[4,5]

$$J_m(\rho)\frac{\cos}{\sin}m\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{i^{-m}}{2\pi}\frac{\cos}{\sin}m\beta e^{i\lambda\rho}d\beta \tag{9}$$

即(4)式中的 $g_{\substack{e\\o}m}(\beta)=\dfrac{i^{-m}}{2\pi}\dfrac{\cos}{\sin}m\beta$．将 $g_{\substack{e\\o}m}(\beta)$ 代入(5)和(6)式，即得到标准和非标准圆柱矢量波函数的直角坐标分量表示式．如果把它们化成圆柱坐标分量，并利用贝塞尔函

数的递推关系，可推出文献[1]中的转换关系式。

椭圆柱坐标系中的生成函数集为[6,7]

$$\psi_{\substack{e\\0}m}(h) = R_{\substack{e\\0}m}(u)S_{\substack{e\\0}m}(v)e^{ihz} \tag{10}$$

椭圆柱函数的平面波展开式为[4]：

$$R^{(1)}_{\substack{e\\0}m}(u)S_{\substack{e\\0}m}(v) = \int_0^{2\pi}\frac{i^{-m}}{\sqrt{8\pi}}S_{\substack{e\\0}m}(\beta)e^{i\lambda p}d\beta \tag{11}$$

相应于椭圆柱函数的 $g_{\substack{e\\0}m}(\beta) = \frac{i^{-m}}{\sqrt{8\pi}}S_{\substack{e\\0}m}(\beta)$. 将 $g_{\substack{e\\0}m}(\beta)$代入(5)和(6)式，即为标准和非准标椭圆柱矢量波函数的直角坐标分量表示式。

将 $\hat{x} = \frac{c}{\alpha}(\mathrm{Sh}u\cos v\hat{u} - \mathrm{Ch}u\sin v\hat{v})$, $\hat{y} = \frac{c}{\alpha}(\mathrm{Ch}u\sin v\hat{u} + \mathrm{Sh}u\cos v\hat{v})$ 代入(7)和(8)式，(式中 c 是常数，$\alpha = c(\mathrm{Ch}^2u - \cos^2v)^{1/2}$)，得到椭圆柱坐标形式下的转换关系.

$$\boldsymbol{L}^{(x,y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) = \boldsymbol{L}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) \tag{12a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^{(x,y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) = {}& \frac{c}{\alpha\lambda^2}\hat{u}\times\{k^2\mathrm{Ch}u\sin v[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h), -\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\\ &- ihk\mathrm{Sh}u\cos v[\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h), -\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\}\\ &+ \frac{c}{\alpha\lambda^2}\hat{v}\times\{k^2\mathrm{Sh}u\cos v[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h), -\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\\ &+ ihk\mathrm{Ch}u\sin v[\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h), -\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\}\end{aligned} \tag{12b}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}^{(x,y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) = {}& -\frac{c}{\alpha\lambda^2}(\hat{u}\cdot\nabla)\{k\mathrm{Ch}u\sin v[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h), -\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\\ &- ih\mathrm{Sh}u\cos v[\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h), -\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\}\\ &- \frac{c}{\alpha\lambda^2}(\hat{v}\cdot\nabla)\{k\mathrm{Sh}u\cos v[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h), -\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\\ &+ ih\mathrm{Ch}u\sin v[\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h), -\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\}\end{aligned} \tag{12c}$$

$$\boldsymbol{L}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) = \boldsymbol{L}^{(x,y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) \tag{13a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) = {}& \frac{c}{\alpha}\hat{u}\times[\mathrm{Sh}u\cos v\boldsymbol{M}^{(y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) - \mathrm{Ch}u\sin v\boldsymbol{M}^{(x)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\\ &- \frac{c}{\alpha}\hat{v}\times[\mathrm{Ch}u\sin v\boldsymbol{M}^{(y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) + \mathrm{Sh}u\cos v\boldsymbol{M}^{(x)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\end{aligned} \tag{13b}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) = {}& -\frac{c}{\alpha k}(\hat{u}\cdot\nabla)[\mathrm{Sh}u\cos v\boldsymbol{M}^{(y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)\\ &- \mathrm{Ch}u\sin v\boldsymbol{M}^{(x)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\\ &+ \frac{c}{\alpha k}(\hat{v}\cdot\nabla)[\mathrm{Ch}u\sin v\boldsymbol{M}^{(y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)\end{aligned}$$

$$+\operatorname{Sh}u\cos v\boldsymbol{M}^{(x)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)] \tag{13c}$$

用(12)和(13)式可以求解需要同时以直角和椭圆柱坐标描写边界条件的一类边值问题。

抛物柱坐标集中，生成函数集为[8,9]：

$$\psi_{\substack{e\\0}m}(h)=W_m(\mu)D_{\substack{e\\0}m}(\nu)e^{ihz} \tag{14}$$

抛物柱函数的平面波展开式是：

$$W_m(\mu)D_{\substack{e\\0}m}(\nu)=\frac{Q_m}{T_m}\int_0^{2\pi}a_{\substack{e\\0}m}(\beta)e^{i\lambda\rho}d\beta \tag{15}$$

相应于抛物柱函数的 $g_{\substack{e\\0}m}(\beta)=\frac{Q_m}{T_m}a_{\substack{e\\0}m}(\beta)$，其中 $a_{\substack{e\\0}m}(\beta)=\int_0^{\infty}e^{-i\lambda\nu^2}D_{\substack{e\\0}m}(\nu)d\nu$，

$$T_m=\int_0^{\infty}[W_m(\mu)]^2d\mu,\ Q_m=\int_0^{2\pi}[a_{\substack{e\\0}m}(\beta)]^2d\beta.$$

将 $g_{\substack{e\\0}m}(\beta)$ 代入(5)和(6)式，可得到标准和非标准抛物柱矢量波函数的直角坐标分量表示式。

利用 $\hat{x}=\frac{1}{\alpha}(\mu\hat{\mu}-\nu\hat{\nu})$，$\hat{y}=\frac{1}{\alpha}(\nu\hat{\mu}+\mu\hat{\nu})$，代入(7)和(8)式，得到抛物柱坐标形式的转换关系式。

$$\boldsymbol{L}^{(x,y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)=\boldsymbol{L}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) \tag{16a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^{(x,y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)=&\frac{\hat{\mu}}{\alpha\lambda^2}\times\{k^2\nu[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h),-\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\\&-ihk\mu[\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h),-\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\}\\&+\frac{\hat{\nu}}{\alpha\lambda^2}\times\{k^2\mu[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h),-\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\\&+ihk\nu[\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h),-\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\}\end{aligned} \tag{16b}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}^{(x,y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)=&\frac{-1}{\alpha\lambda^2}(\hat{\mu}\cdot\nabla)\{k\nu[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h),-\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\\&-ih\mu[\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h),-\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\}\\&+\frac{-1}{\alpha\lambda^2}(\hat{\nu}\cdot\nabla)\{k\mu[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h),-\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\\&+ih\nu[\boldsymbol{N}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h),-\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\}\end{aligned} \tag{16c}$$

和

$$\boldsymbol{L}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)=\boldsymbol{L}^{(x,y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h) \tag{17a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)=&\frac{\hat{\mu}}{\alpha}\times[\mu\boldsymbol{M}^{(y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)-\nu\boldsymbol{M}^{(x)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\\&-\frac{\hat{\nu}}{\alpha}\times[\nu\boldsymbol{M}^{(y)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)+\mu\boldsymbol{M}^{(x)}_{\substack{e\\0}m\lambda}(h)]\end{aligned} \tag{17b}$$

$$N_{\substack{e\\o}m\lambda}(h) = \frac{-1}{\alpha k}(\hat{\mu}\cdot\nabla)[\mu M^{(y)}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h) - \nu M^{(x)}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)]$$

$$+ \frac{1}{\alpha k}(\hat{\nu}\cdot\nabla)[\nu M^{(y)}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h) + \mu M^{(x)}_{\substack{e\\o}m\lambda}(h)] \tag{17c}$$

式中 $\alpha = (\mu^2 - \nu^2)^{1/2}$. 用(16)和(17)式可以求解需要同时以直角和抛物柱坐标描写边界条件的一类边值问题.

参 考 文 献

[1] 周学松,中国科学,(A 辑), 1984 年,第 9 期,第 841—849 页.
[2] 周学松,电子学报, 1984 年,第 6 期,第 16—23页.
[3] P. M. Morse, H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill Book Company, New York, (1953). Vol. 2, pp. 1723—1755.
[4] J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill Book Company, New York, (1941), pp. 364—374.
[5] 林为干,微波理论与技术,科学出版社,北京,(1979),第 89—96 页
[6] 王竹溪,郭敦仁,特殊函数概论,科学出版社,北京,(1978),第 680—719 页.
[7] C. T. Tai, Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory, Intext Educational Publishers, Scranton, pp. 112—119.
[8] P. Moon, D. E. Speneer, Field Theory Handbook, McGraw-Hill Book Company, New York, (1961), pp. 110—112.
[9] A. Erdèlyi, Higher Transcendential Functions, McGraw-Hill Book Company, New York. (1953), Vol. 2, pp. 45—81.

NORMAL AND ABNORMAL CYLINDRICAL VECTOR WAVE FUNCTIONS AND SOME IMPORTANT CONVERSION RELATIONS

Li Zhijian
(East China Normal University, Shanghai)

Zhou Xuesong
(Shanghai Research Institute of Microwave Technology, Shanghai)

Abstract In this paper, the normal and abnormal cylindrical vector wave functions are constructed and their conversion relations are found out. Furthermore, thte normal and abnormal vector wave functions and their conversion relations in circular, elliptic and parabolic cylindrical coordinate systems are discussed in detail, where the result in circular cylindrical coordinate system is the same as that given by Zhou Xuesong (1984).

Key words Cylindrical functions; Generating functions; Piloting vectors; Vector wave functions