

文章编号: 1001-4322(2010)04-0821-04

强流柱对称相对论电子束的势能与发射度^{*}

代志勇, 江孝国, 陈思富, 谢宇彤

(中国工程物理研究院 流体物理研究所, 四川 绵阳 621900)

摘 要: 推导了柱对称相对论电子束在漂移管内的空间电荷势及相互作用势能, 分析了势能在束流传输过程中的变化规律, 并与束流均方根发射度的变化方程比较。指出一部分势能随束流传输过程中包络振荡而呈现出可逆的变化; 而另一部分势能则在束流传输系统及束流本身非线性力的作用下, 随着电荷密度分布变化而转为电荷横向热运动能量, 从而导致束流归一化发射度的增长, 这种转化是一个不可逆的过程。

关键词: 柱对称电子束; 相互作用势能; 均方根发射度; 电荷密度分布

中图分类号: TL501.5 **文献标志码:** A **doi:** 10.3788/HPLPB20102204.0821

强流电子束在漂移管内传输时, 一般会受到非线性力的影响而导致束流归一化发射度的增长^[1-5], 由于很难界定非线性力的具体表现形式, 在理论分析上多采用能量守恒定律对束流的传输状态进行宏观描述。章冠人曾经利用 Tonks 定律分析并推导了电子束在传输过程中与管壁相互作用产生辐射场时的发射度变化公式, 并对发射度的物理意义作了另一种解释^[6]。实际上, 在直线感应加速器中, 虽然束流在通过有阻抗的管壁时要激发电磁波, 并从束中抽取能量, 但除非发生束流崩溃(BBU), 束流电磁辐射能力是很微弱的, 这种壁阻抗效应是影响束流发射度的原因之一, 但不会成为束流传输过程中发射度增长的主要根源。本文也将从束流能量的构成出发, 讨论束流传输过程中势能的变化与发射度增长的关系。

1 束流的空间电荷势与相互作用势能

在柱对称直流模型中, 运动坐标系下只存在径向电场, 由高斯定律很容易得到 2 个区域的径向电场

$$E_m(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \begin{cases} \int_0^r 2\pi r \rho_m(r) dr & (0 \leq r \leq a) \\ \int_0^a 2\pi r \rho_m(r) dr & (a \leq r \leq b) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\rho_m(r)$ 为粒子密度; a 为束流的边半径; b 为传输管道半径; ϵ_0 为介电常数; q 为粒子电荷量; r 为粒子径向位置。利用关系式 $E_r(r) = -\partial\phi(r)/\partial r$ 积分可以得到从 $r(r < a)$ 到 a 和从 a 到 b 的电势差

$$\begin{cases} \phi_m(a) - \phi_m(r) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int_r^a \frac{dr}{r} \left[\int_0^r 2\pi r \rho_m(r) dr \right] \\ \phi_m(b) - \phi_m(a) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} \left[\int_0^a 2\pi r \rho_m(r) dr \right] \end{cases} \quad (2)$$

设管道壁上的电势 $\phi(b) = 0$, 则可以得到电荷分布空间中任意点 r 的电势

$$\phi_m(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[\int_r^a \frac{dr}{r} \left(\int_0^r 2\pi r \rho_m(r) dr \right) + \int_a^b \frac{dr}{r} \left(\int_0^a 2\pi r \rho_m(r) dr \right) \right] \quad (3)$$

通过洛伦兹(Lorentz)变换转到实验室坐标系, 并用电流密度代替电荷密度, 该点的电势表达式变为

$$\phi(r) = \frac{I}{2\pi\epsilon_0\beta c} \left[\int_r^a \frac{I(r)}{I} \frac{dr}{r} + \ln \frac{b}{a} \right] \quad (4)$$

式中: $I(r)$ 为半径为 r 的圆形截面内的束流强度; I 为总束流强度; β 为相对论速度因子; c 为光速。对束流截面中所有的带电粒子积分, 得到单位长度束流的势能

$$U = \int_0^a 2\pi r \frac{1}{2} \rho(r) \phi(r) dr = \frac{I}{4\pi\epsilon_0\beta^2 c^2} \int_0^a \frac{d[I(r)]}{dr} \left[\int_r^a \frac{I(r)}{I} \frac{dr}{r} + \ln \frac{b}{a} \right] dr \quad (5)$$

式中: $\rho(r)$ 为实验室坐标系下粒子密度。对上式进行分部积分

^{*} 收稿日期: 2009-11-04; 修订日期: 2010-01-11

作者简介: 代志勇(1968—), 男, 博士, 主要从事加速器物理及技术研究; dzycap@yahoo.com.cn。

$$U = \frac{II(r)}{4\pi\epsilon_0\beta^2c^2} \left[\int_r^a \frac{I(r)}{I} \frac{dr}{r} + \ln \frac{b}{a} \right] \Big|_0^a - \frac{I}{4\pi\epsilon_0\beta^2c^2} \int_0^a I(r) d \left[\int_r^a \frac{I(r)}{I} \frac{dr}{r} + \ln \frac{b}{a} \right] = \frac{I^2}{4\pi\epsilon_0\beta^2c^2} \ln \frac{b}{a} + \frac{I^2}{4\pi\epsilon_0\beta^2c^2} \int_0^a \left[\frac{I(r)}{I} \right]^2 \frac{dr}{r} \quad (6)$$

把 $\ln \frac{b}{a}$ 改写成 $\ln \frac{b}{R} - \ln \frac{a}{R}$, R 为均方根(RMS)半径, 上式变为

$$U = \frac{I^2}{4\pi\epsilon_0\beta^2c^2} \ln \frac{b}{R} - \frac{I^2}{4\pi\epsilon_0\beta^2c^2} \left[\ln \frac{a}{R} - \int_0^a \left(\frac{I(r)}{I} \right)^2 \frac{dr}{r} \right] \quad (7)$$

很明显, 束流的势能由两部分构成。式(7)右边第一项表明势能与 RMS 半径和传输管道大小直接相关, 除非有特殊目的, 传输管道半径一般维持不变, 束流无损失, 而当电子束被加速到接近光速时, 能量变化对势能的影响是很微弱的, 在该项中唯一敏感因素就是带电粒子束的 RMS 包络半径, 这说明束流势能随包络振荡而变化, 包络扩张时势能降低; 包络收缩时势能增高, 这是一个可逆过程; 第二项则非常明确表明了势能只与束截面荷电粒子密度分布方式有关。

2 柱对称直流电子束的 RMS 发射度

E. P. Lee 和 R. K. Cooper 推导了柱对称电子束的均方根(RMS)包络方程, 在该方程中, 其均方根发射度表示为^[7]

$$\tilde{\epsilon}_n^2 = \gamma^2 \beta^2 K \left[v^2 - R'^2 - \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right] \quad (8)$$

式中: $R' = dR/dz$, z 为沿束流传输方向的位置; v 为束中所有粒子的 RMS 横向速率(注意: 这里的 v 为无量纲速率, 指的是相对于轴向速率 βc 的横向相对速率); L 为与角动量相关的平均量(粒子的实际平均角动量 $\bar{p}_\theta = \gamma \beta mcL$); γ 为相对论因子。

在式(8)的基础上, 根据 G. J. Caporaso 的推导方法展开进一步的变换^[8], 得到发射度沿束流传输方向上的微分方程

$$\frac{d\tilde{\epsilon}_n^2}{dz} = \frac{2IR^2(z)}{\gamma\beta I_0} \frac{d}{dz} \left[\ln \frac{a(z)}{R(z)} - \int_0^{a(z)} \left(\frac{I(r)}{I} \right)^2 \frac{dr}{r} \right] \quad (9)$$

式中: $I_0 = 4\pi\epsilon_0 mc^3/q$ 为特征电流; m 为荷电粒子质量。

从式(9)中可以看出, 当束流在传输过程中保持“自相似”(所谓“自相似”指束流传输过程中维持束截面荷电粒子分布方式不变)特点时, 束截面荷电粒子密度分布与 z 无关, 而且边半径 a 与均方根半径 R 保持固定的比例关系, 因此上式右边为 0, 表明发射度无增长; 当束流截面的粒子密度分布在传输过程中发生变化时才导致发射度的变化。

3 束流势能降低与发射度增长

比较式(7)和式(9), 同样出现了 $\ln \frac{a}{R} - \int_0^a \left[\frac{I(r)}{I} \right]^2 \frac{dr}{r}$, 该项的值唯一确定于束截面荷电粒子密度分布方式, 在式(7)中构成了束流势能的一部分, 在式(9)中代表着发射度有无增长, 因此在束流传输过程中, 由于粒子密度分布变化引起的势能变化和发射增长之间必然存在着某种联系。

首先回到发射度的基本定义, 在 2 维 $x-x'$ 相平面, 束流中荷电粒子在该平面的投影为一个点, 所有粒子的投影点在该平面所占据的面积就是发射度。显然, 发射度表示的是粒子群体行为的一种无序状态, 这种杂乱无章的程度愈高, 发射度就愈大, 反之发射度就愈小, 如果所有粒子的 2 个相坐标满足某种线性关系, 则发射度为 0。然后再看束流传输过程中荷电粒子的横向运动情况, 在传输磁场的约束下, 粒子横向运动有其一致的方面, 在宏观上表现为束包络的振荡, 用束包络半径描述; 同时又有其不一致的方面, 在微观表现为无规则的横向运动, 用发射度描述。发射度的增长标志着这种无规则横向运动趋于剧烈, 需要有能量来源, 而式(7)和式(9)显示, 导致束流发射度增长的能量正是来源于束流传输过程中束截面电荷密度分布的变化引起的势能降低。

式(7)和式(9)因为有了共同的一项, 可以将发射度的变化与束流势能联系起来, 而单纯的束包络振荡对发射度增长没有贡献, 它只是束截面荷电粒子分布发生变化的媒介, 因此发射度的微分方程可以表示成

$$\frac{d\tilde{\epsilon}_n^2}{dz} \approx -\frac{2\beta q R^2}{\gamma m c I} \frac{dU}{dz} \quad (10)$$

束流在传输过程中如果不施加特别的手段,其发射度总是呈增长的态势,因此式(10)左边是一个大于 0 的正值,这说明束流在传输过程中其势能总是朝着降低的方向发展。如果只考虑荷电粒子分布所决定的那一部分势能,并令

$$\Lambda = \ln \frac{a}{R} - \int_0^a \left[\frac{I(r)}{I} \right]^2 \frac{dr}{r} \quad (11)$$

则式(10)变为

$$\frac{d\tilde{\epsilon}_n^2}{dz} \approx -\frac{2R^2 I}{\gamma \beta I_0} \frac{d\Lambda}{dz} \quad (12)$$

从式(12)可以获得如下结论:(1)束流发射度的增长同所传输的束流强度密切相关,传输的束流强度愈强,发射度增长愈快,必要时只能靠牺牲束流的强度来保证束流的品质;(2)束流在低能段发射度增长较在高能段要快,因此在直线感应加速器中,注入器的发射度增长较快,长度只占到整个加速器 1/15 的注入器的发射度增长几乎达到出口处发射度的一半;(3)束包络半径对发射度增长的影响也十分巨大,因此小包络半径是该类加速器所普遍采用的传输策略。这一点可以从另一个方面加以理解。束流传输空间都有一个好场区的范围,超过这个范围,非线性效应将急剧增强,小的束包络半径可以保证束流总好场区传输,即使束轴与几何轴存在偏差。(4)两方面的原因需要采用尽可能高的加速梯度,其一是抑制低能段的发射度增长,其二是缩短束势能降低这一渐变过程。

作为例子,比较一下均匀分布和高斯分布两种最常用的束截面荷电粒子分布形式之间势能的差别(高斯分布取 90% 的粒子截尾),即

$$\ln \frac{a}{R} - \int_0^a \left[\frac{I(r)}{I} \right]^2 \frac{dr}{r} \Big|_{\text{KV}} \cong 0.0966 \quad (13)$$

$$\ln \frac{a}{R} - \int_0^a \left[\frac{I(r)}{I} \right]^2 \frac{dr}{r} \Big|_{\text{GS}} \cong 0.1959 \quad (14)$$

式(13),式(14)的结果说明,在同样的能量、流强及 RMS 包络半径下,均匀束的势能比高斯束高,相比而言,高斯分布是一个更稳定的分布,因此强流电子束在磁场的约束下进行传输时,其截面电子密度总是会从注入器出口的近似均匀分布向加速器出口的近似高斯分布发展,这一结果已经被神龙一号加速器的实验测量结果所证明。

4 结 论

本文推导了单位长度柱对称直流电子束的势能表达式,并与发射度增长的微分方程进行比较,阐述了束流在传输过程中束截面荷电粒子密度分布变化引起势能的降低,这部分降低的势能导致了发射度的增长。如同发射度的增长一样,荷电粒子密度总是朝着势能下降的分布形式发展,这是一个必然的过程。另外,从发射度的基本定义出发,根据束流传输过程中束中粒子横向运动的不同方式,区分了对发射度无贡献的宏观束包络运动和对发射度有贡献的无规则横向运动,对发射度的物理意义作了另一种阐释。基于这些理论分析结果,对影响发射度的几种主要因素进行了逐条评述,并提出了抑制发射度增长的方式。

参考文献:

- [1] Lapostolle P M. Possible emittance increase through filamentation due to space charge in continuous beams[J]. *IEEE Trans on Nucl Sci*, 1971, **18**:1101-1103.
- [2] Lee E P, Yu S S, Barlett W A. Phase space distortion of a heavy-ion beam propagating through a vacuum reactor vessel[J]. *Nucl Fusion*, 1981, **21**:961-965.
- [3] Wangler T P, Crandall K R, Mills R S, et al. Relation between field energy and RMS emittance in intense particle beams[J]. *IEEE Trans on Nucl Sci*, 1985, **32**:2196-2199.
- [4] Anderson O A. Internal dynamics and emittance growth in space-charge-dominated beams[J]. *Particle Accelerators*, 1987, **21**:197-201.
- [5] Reiser M. Free energy and emittance growth in nonstationary charged particle beams[J]. *J Appl Phys*, 1991, **70**:1919-1922.
- [6] 章冠人. Tonks 定律和电子束的发射度[J]. *强激光与粒子束*, 1990, **2**(2):209-214. (Zhang Guanren. Tonk's law and rms emittance in in-

tense particle beams. *High Power Laser and Particle Beams*, 1990, **2**(2):209-214)

- [7] Lee E P, Cooper R K. General envelope equation for cylindrically symmetric charged-particle beams[J]. *Particle Accelerators*, 1976, **7**:83-88.
[8] Caporaso G J. Kiloampere high-brightness beams[R]. UCRL-95319, 1987.

Potential energy and emittance of cylindrically symmetric intense electron beams

Dai Zhiyong, Jing Xiaoguo, Chen Sifu, Xie Yutong

(*Institute of Fluid Physics, CAEP, P. O. Box 919-106, Mianyang 621900, China*)

Abstract: The potential energy expression of cylindrically symmetric intense electron beams is derived and the differential equation of RMS emittance is presented in this paper. The decrease of beam potential energy which is leded by change of charged particle density distribution during the transportation brings the growth of RMS emittance. The change of the charged particle density distribution is always toward to decreasing the potential energy, such as the growth of the emittance. Furthermore, based on the basic definition of emittance, different model transverse motions including beam envelope oscillation with no influence on emittance and ruleless thermal motion with influence on emittance are expatiated. Several factors of influencing beam emittance are discussed respectively and some methods to restrain the growth of emittance are presented.

Key words: cylindrically symmetric electron beam; potential energy; RMS emittance; charged particle density distribution