非正交联合对角化盲分离算法的可辨识性研究

张延良[①②]　　楼顺天[①]　　张伟涛[①]
[①](西安电子科技大学电子工程学院　西安　710071)
[②](河南理工大学计算机科学与技术学院　焦作　454001)

摘　要：该文从非正交联合对角化的唯一性条件出发，研究了盲分离算法的可辨识性问题。由接收信号的二阶统计量和高阶累积量分别组成的目标矩阵具有可对角化的结构，因此可以用非正交联合对角化的方法解决盲分离问题。指出非正交联合对角化的唯一存在条件是：由对角矩阵中相同位置的对角元素所组成的向量两两线性无关。从该条件出发推导出基于二阶统计量的非正交联合对角化算法实现盲分离的充分必要条件是源信号自相关函数的形状不同，基于高阶累积量的算法实现盲分离的充分必要条件是源信号中没有高斯信号，从而为运用非正交联合对角化解决盲分离问题提供了理论指导。数值仿真试验验证了结论的正确性。

关键词：信号处理；盲信源分离；联合对角化；可辨识性；唯一存在条件；高阶累积量
中图分类号：TN911.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2010)05-1066-05
DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.00750

A Study of Identifiability for Blind Signal Separation via Nonorthogonal Joint Diagonalization

Zhang Yan-liang[①②]　　Lou Shun-tian[①]　　Zhang Wei-tao[①]
[①](*School of Electronic Engineering*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *China*)
[②](*College of Computer Science & Technology*, *Henan Polytechnic University*, *Jiaozuo* 454001, *China*)

Abstract: Based on the uniqueness condition of the solution of Nonorthogonal Joint Diagonalization (NJD), the identifiability for Blind Signal Separation (BSS) is analyzed. Firstly, it is proved that the target matrices consisting of Second-Order Statistics (SOS) or higher-order cumulant are diagonalizable, so the problem of BSS can be solved by NJD. The uniqueness condition for NJD is that the vectors consisting of diagonal elements in the same position of diagonal matrix are pairwise linearly independent. From this proposition, the necessary and sufficient condition for BSS is deduced. For second-order statistics based BSS, the condition is that the source signals have not the identical autocorrelation shape. For higher-order cumulant, there is not Gaussian signal in sources. The above conclusion provides a mathematical foundation for the BSS methods based on the NJD. Numerical simulations confirm the conclusion in this paper.

Key words: Signal processing; Blind Signal Separation (BSS); Joint diagonalization; Identifiability; Uniqueness condition; Higher-order cumulant

1　引言

盲信源分离[1,2] (BSS)经过 20 多年的发展，出现了许多有效的算法，并广泛的应用于盲多用户检测、语音通信、生物医学信号处理、地震波检测等领域，现已成为信号处理领域的研究热点。

在 BSS 问题中，源信号的统计独立性假设导致由混合信号的统计量组成的特征矩阵具有特定的联合对角化结构。BSS 的代数方法就是通过恢复这种联合对角化结构来辨识混合矩阵实现盲分离。在这些代数方法中，最早发展起来的是 Cardoso 提出的特征矩阵联合对角化方法[1](JADE)以及 Belouchrani 等人提出的二阶盲辨识方法[2](SOBI)。两种方法均要求对角化矩阵必须是正交的，分离矩阵中的非正交部分通过一个预白化阶段来得到。这种基于正交联合对角化的盲分离算法，因为存在一个预白化阶段，限制了算法的性能和适用范围。近几年来，研究者陆续提出了一些不需要预白化的非正交联合对角化盲分离算法[3−7]，均取得较好的分离效果。

在联合对角化盲分离算法的发展过程中，可辨识性问题始终是研究者关注的一个焦点。文献[1,2]研究了正交联合对角化 BSS 算法的可辨识性问题，文献[8]初步研究了非正交联合对角化 BSS 算法的可

2009-05-15 收到，2009-12-01 改回
国家自然科学基金(60775013)资助课题
通信作者：张延良　ylzhang119@qq.com

辨识性问题，在文献[8]中特征矩阵仅仅局限于二阶统计量矩阵，而且得出的可辨识性条件也没有与源信号的统计特性联系起来。本文研究更一般意义下非正交联合对角化 BSS 算法的可辨识性问题，给出了非正交联合对角化唯一存在条件；并推导出特征矩阵分别取二阶统计量和高阶累积量时唯一存在条件对源信号的要求，从而为运用非正交联合对角化方法实现盲分离提供了理论指导。

2　盲信源分离问题

BSS 的混合模型可以表示为[2]

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t),\quad t=1,2,\cdots \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{s}(t)=[s_1(t),\cdots,s_n(t)]^{\mathrm{T}}$ 是由 n 个相互独立的源信号组成的向量；$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 的非奇异混合矩阵；$\boldsymbol{x}(t)$ 为 n 维观测信号向量。

可以通过辨识混合矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来实现盲分离。由于已知条件太少，$\boldsymbol{A}$ 的辨识存在两种固有的不确定性[2]：(1)列向量排列顺序的不确定性；(2)列向量幅值的不确定性。记 $\widehat{\boldsymbol{A}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的辨识，这两种不确定性可以表示为[2]

$$\widehat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 为 $n\times n$ 的置换矩阵，$\boldsymbol{D}$ 为 $n\times n$ 的非奇异对角矩阵，矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$ 为广义置换矩阵，它的任意行任意列有且仅有一个非零元素。因此，BSS 可以通过寻找与混合矩阵 $\boldsymbol{A}$ 本质相等[2]的矩阵 $\widehat{\boldsymbol{A}}$ 来实现盲分离。

3　接收信号统计量的可对角化结构

3.1　二阶统计量目标矩阵的可对角化结构

在盲信源分离中，源信号的统计独立性假设使混合信号的某些统计量组成的目标矩阵具有可对角化的结构，最典型的就是接收信号的二阶相关矩阵

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}(\tau)=E\left[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(t+\tau)\right]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_s(\tau)\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \tag{3}$$

取 τ 为不同值，则

$$\{\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}(\tau)\mid\tau=\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_K\} \tag{4}$$

构成一个可对角化矩阵集合，可采用非正交联合对角化的方法来辨识 $\boldsymbol{A}$,进而实现盲分离。

下面讨论更一般的情况，即目标矩阵取 $l\ (n>l>2)$ 阶累积量矩阵的情况。

3.2　高阶累积量目标矩阵的可对角化结构

为后续处理方便起见，首先对接收信号进行零均值化：$\boldsymbol{x}(t)\leftarrow\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{x}}$，式中 $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{x}}=E[\boldsymbol{x}(t)]$。接收信号的 $l\ (n>l>2)$ 阶累积量记为 $C_{\boldsymbol{x}}^l(i_1,i_2,\cdots,i_{l-1},i_l)=\mathrm{cum}[\boldsymbol{x}_{i_1},\boldsymbol{x}_{i_2},...,\boldsymbol{x}_{i_{l-1}},\boldsymbol{x}_{i_l}]$，其中 $1\le i_1,i_2,\cdots,i_{l-1},i_l\le n$。保持 $i_1,i_2,\cdots,i_{l-2}$ 为固定值，i_{l-1},i_l 在 $1\sim n$ 之间任意变动，则 $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{x}}^l(i_1,i_2,\cdots,i_{l-2},:,:)$ 构成一矩阵(“:”表示该位数值可以在 $1\sim n$ 之间任意变动)。容易证明 $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{x}}^l(i_1,i_2,\cdots,i_{l-2},:,:)$ 具有如下的可对角化结构

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{x}}^l(i_1,i_2,\cdots,i_{l-2},:,:)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_{i_1i_2\cdots i_{(l-2)}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}},\quad 1\le i_1,i_2,\cdots,i_l\le n \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{D}_{i_1i_2\cdots i_{(l-2)}}$ 为对角矩阵，其对角元素为

$$\left[\boldsymbol{D}_{i_1i_2\cdots i_{(l-2)}}\right]_{jj}=\boldsymbol{A}_{i_1j}\cdots\boldsymbol{A}_{i_{(l-2)}j}C_{\boldsymbol{s}}^l(j,\cdots,j),\ 1\le j\le n \tag{6}$$

所以可以由 $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{x}}^l(i_1,i_2,\cdots,i_{l-2},:,:)$ 组成一个目标矩阵集合

$$\left\{\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{x}}^l(i_1,i_2,\cdots,i_{l-2},:,:)\right\}_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_{(l-2)}\le n} \tag{7}$$

然后运用非正交联合对角化的方法辨识混合矩阵 $\boldsymbol{A}$ 实现盲分离。

4　非正交联合对角化的唯一存在条件

4.1　唯一存在条件的定义

假设可对角化矩阵集合 $\mathscr{R}=\{\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\cdots,\boldsymbol{R}_K\}$ 中的元素具有如下结构

$$\boldsymbol{R}_k=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}_k\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}},\ k=1,2,\cdots,K \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}_k$ 为对角矩阵，记

$$\boldsymbol{\Lambda}_k=\mathrm{diag}\left([\beta_{k1},\cdots,\beta_{kn}]\right) \tag{9}$$

非正交联合对角化所要解决的问题就是已知 $\mathscr{R}$，辨识非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$。由于仅仅知道 $\boldsymbol{\Lambda}_k$ 为对角矩阵，易知存在对角矩阵 $\boldsymbol{E}_k$ 及广义置换矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得

$$\boldsymbol{R}_k=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}_k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{\mathrm{H}},\ k=1,2,\cdots,K \tag{10}$$

因此若 $\boldsymbol{A}$ 能在相差任意一个广义置换矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的意义上被辨识出来，即 $\widehat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，则称此非正交联合对角化的解是唯一存在的。

4.2　唯一存在条件定理

关于唯一存在条件，可以在正则分解/并行因子分析[9–11] (CANDECOMP/PARAFAC)中找到答案。CANDECOMP/PARAFAC 是数据处理的一种方法，近年来已陆续有人将其应用在信号处理中，并取得了较好的效果。矩阵的非正交联合对角化可看作是一个特定的 CANDECOMP/PARAFAC 问题[12]，因此可以将文献[13]给出的 CANDECOMP/PARAFAC 唯一存在的条件推广到非正交联合对角化问题中。

下面给出非正交联合对角化解唯一存在的条件，为方便叙述先构造一个 $K\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{M}$

$$[\boldsymbol{M}]_{ki}=\beta_{ki},\ 1\le k\le K,\ 1\le i\le n \tag{11}$$

式(11)中 β_{ki} 的定义见式(8)，式(9)。$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}_k$ 的关系如图 1 所示。显然，$\boldsymbol{M}$ 的第 k 行是由式(8)中矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_k$ 的对角元素组成。矩阵 $\boldsymbol{M}$ 可以写成列向量的形式：$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2,\cdots,\boldsymbol{m}_n]$，$\boldsymbol{m}_i\,(1\le i\le n)$ 是由 $\boldsymbol{\Lambda}_k(k=1,\cdots,K)$ 处于 (i,i) 位置的 K 个元素组成的向量。

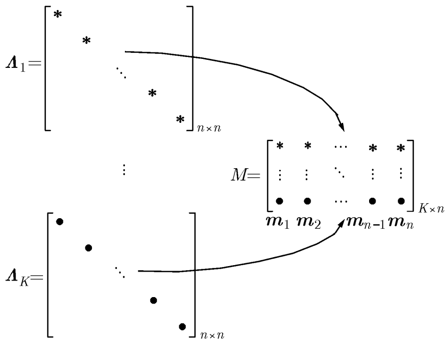

图1 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}_k$ 的关系

定理 1 对于满足式(8)的可对角化矩阵集合 $\Re=\{\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\cdots,\boldsymbol{R}_K\}$，依据式(11)构造矩阵 $\boldsymbol{M}$。假设存在矩阵 $\boldsymbol{V}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{D}_k$，使得

$$\boldsymbol{R}_k=\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}_k\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}},\ k=1,2,\cdots,K$$

当且仅当对于 $\forall 1\le i\ne j\le n$，$\boldsymbol{m}_i$，$\boldsymbol{m}_j$ 线性无关时，存在一个广义置换矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$

文献[8]给出了唯一存在条件定理的另外一种叙述形式，并给出了证明。由于 $\boldsymbol{m}_i$，$\boldsymbol{m}_j$ 分别由 $\boldsymbol{\Lambda}_k\,(k=1,\cdots,K)$ 处于 (i,i)，(j,j) 位置的 K 个元素组成，所以定理 1 可以理解为当由 $\boldsymbol{\Lambda}_k\,(k=1,\cdots,K)$ 对角线上相同位置的元素组成的 K 维向量两两线性无关时，集合 $\Re=\{\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\cdots,\boldsymbol{R}_K\}$ 的非正交联合对角化解唯一存在。

5 唯一存在条件对盲分离源信号的要求

下面讨论唯一存在条件对源信号统计特性的要求，也就是非正交联合对角化盲分离算法可辨识性条件。

5.1 由二阶相关矩阵组成目标矩阵的情况

定理 2 采用式(4)作为非正交联合对角化盲分离算法的目标矩阵集合，当且仅当源信号自相关函数的形状互不相同的情况下，才可以实现盲分离。

证明 对于式(4)的目标矩阵集合，下式成立

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}(\tau)=E\left[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(t+\tau)\right]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{s}}(\tau)\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}},\quad \tau=\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_K$$

其中

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{s}}(\tau)=E\left[\boldsymbol{s}(t)\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}(t+\tau)\right]=\begin{bmatrix} E\left[s_1(t)s_1^*(t+\tau)\right] & 0 & \cdots & 0\\ 0 & E\left[s_2(t)s_2^*(t+\tau)\right] & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & E\left[s_n(t)s_n^*(t+\tau)\right]\end{bmatrix}$$

依据定理 1，当且仅当

$$E\left[s_i(t)s_i^*(t+\tau)\right]\ne rE\left[s_j(t)s_j^*(t+\tau)\right],\quad \forall 1\le i\ne j\le n,\ \tau=\tau_1,\tau_2,...,\tau_K$$

成立时(其中 r 为任意非零实数)，也就是源信号的自相关函数形状互不相同时，对目标矩阵集合 $\{\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}(\tau)\,|\,\tau=\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_K\}$ 进行联合对角化，辨识出的混合矩阵 $\widehat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，从而可以实现盲分离。 证毕

文献[2]指出采用二阶相关矩阵作为目标矩阵时，正交联合对角化盲分离算法实现盲分离的充要条件是源信号具有不同形状的功率谱。由此可以得出结论，当采用二阶相关矩阵作为目标矩阵时，非正交联合对角化和正交联合对角化实现盲分离的条件相同，均要求源信号具有不同形状的自相关函数/功率谱。

5.2 由高阶累积量矩阵组成目标矩阵的情况

定理 3 采用式(7)作为非正交联合对角化盲分离算法的目标矩阵集合，当且仅当源信号的 $l\ (l>2)$ 阶累积量

$$C_{\boldsymbol{s}}^l(j,\cdots,j)\ne 0,\quad j=1,\cdots,n$$

辨识出的混合矩阵 $\widehat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，从而可以实现盲分离。

证明 必要性：采用式(7)作为非正交联合对角化盲分离算法的目标矩阵集合，由定理 1 可知，如果辨识出的混合矩阵 $\widehat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，等价于对于任意 $1\le i_1,i_2,\cdots,i_{l-2}\le n$，下式成立

$$\left[\boldsymbol{D}_{i_1i_2\cdots i_{(l-2)}}\right]_{qq}\ne r\left[\boldsymbol{D}_{i_1i_2\cdots i_{(l-2)}}\right]_{pp},\quad 1\le p\ne q\le n$$

即

$$\boldsymbol{A}_{i_1q}\cdots\boldsymbol{A}_{i_{(l-2)}q}C_{\boldsymbol{s}}^l(q,\cdots,q)\ne r\boldsymbol{A}_{i_1p}\cdots\boldsymbol{A}_{i_{(l-2)}p}C_{\boldsymbol{s}}^l(p,\cdots,p),\quad 1\le p\ne q\le n$$

上两式中 r 为非零实数。上式成立，可以推出 $C_{\boldsymbol{s}}^l(j,\cdots,j)\ne 0$，其中 $j=1,\cdots,n$。

充分性：采用反证法，假设 $C_{\boldsymbol{s}}^l(j,\cdots,j)\ne 0$，$j=1,\cdots,n$，但辨识出的混合矩阵 $\widehat{\boldsymbol{A}}\ne\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$。由定理 1 可知，它等价于对于任意 $1\le i_1,i_2,\cdots,i_{l-2}\le n$，存在 $1\le p\ne q\le n$，使得

$$\boldsymbol{A}_{i_1q}\cdots\boldsymbol{A}_{i_{(l-2)}q}C_{\boldsymbol{s}}^l(q,\cdots,q)=r\boldsymbol{A}_{i_1p}\cdots\boldsymbol{A}_{i_{(l-2)}p}C_{\boldsymbol{s}}^l(p,\cdots,p)$$

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，在 $\boldsymbol{A}$ 的第 q 列必存在一非零元素，假设为 $\boldsymbol{A}_{eq}$。固定 $i_2,\cdots,i_{l-2}$ 为 e，则

$$\boldsymbol{A}_{i_1q}\boldsymbol{A}_{eq}\cdots\boldsymbol{A}_{eq}C_{\boldsymbol{s}}^l(q,\cdots,q)=r\boldsymbol{A}_{i_1p}\boldsymbol{A}_{ep}\cdots\boldsymbol{A}_{ep}C_{\boldsymbol{s}}^l(p,\cdots,p),\ n\ge i_1\ge 1,\ p\ne q$$

又 $C_{\boldsymbol{s}}^l(j,\cdots,j)\ne 0,\ j=1,\cdots,n$，所以存在一实数 r'，使得

$$\boldsymbol{A}_{i_1q}=r'\boldsymbol{A}_{i_1p},\quad n\ge i_1\ge 1,\ p\ne q$$

这与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非奇异性矛盾。所以假设不成立，从而充分性得证。 证毕

考虑到高斯随机信号的高阶累积量(三阶及三阶以上)恒等于零，有以下推论。

推论　当源信号中存在高斯随机信号时，采用式(7)作为非正交联合对角化盲分离算法的目标矩阵集合，不能够实现盲分离。

BSS 的最小互信息、最大熵等方法可以解决含一个高斯信号时的盲分离问题[14]。这些方法通过建立衡量分离输出信号独立性的对比函数，当输出信号统计独立时，对比函数取极大/小值。算法通过自适应的方法来调整分离矩阵、搜寻极值点来实现盲分离。基于高阶累积量的非正交联合对角化方法是通过恢复如式(5)所示的联合对角化结构来辨识混合矩阵。虽然此对角化结构也是源信号统计独立性的一种反映，但是当源信号中有一个高斯信号时，则式(6)值为 0，不符合定理 1 给出的唯一性条件，因此辨识出的 $\widehat{\boldsymbol{A}}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 不是本质相等的关系，从而不能够实现盲分离。

6　数值试验

本节采用 3 组数值试验来检验本文定理 1–定理 3 及推论的正确性。数值试验中的非正交联合对角化采用文献[6]中提出的算法。

当非正交联合对角化算法的解唯一存在时，其分离-混合合成矩阵具备广义置换矩阵的形式，此时可以实现最理想的盲分离。但非正交联合对交化算法存在着计算误差，在应用于盲分离时，对目标矩阵的估计也存在着误差，因此通常用串音误差[4]

$$E=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\left|c_{ij}\right|}{\max_k\left|c_{ik}\right|}-1\right)+\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\left|c_{ij}\right|}{\max_k\left|c_{kj}\right|}-1\right) \tag{12}$$

的大小来衡量非正交联合对角化算法的解是否唯一存在，其中 $\boldsymbol{C}=\{c_{ij}\}=\boldsymbol{BA}$ 为分离-混合合成矩阵。

试验 1　在本试验中，矩阵集合 $\mathfrak{R}$ 中的元素由式(8)产生，$K=100$，$\boldsymbol{A}$ 的阶数为 5。为验证本文定理 1，考查以下 4 种情况下非正交联合对角化的结果：(1) $\boldsymbol{\Lambda}_k$ 的对角元素 $\lambda_{11}^{(k)},\cdots,\lambda_{55}^{(k)}$ 独立产生；(2) $\lambda_{11}^{(k)},\lambda_{33}^{(k)},\lambda_{44}^{(k)},\lambda_{55}^{(k)}$ 独立产生，$\lambda_{22}^{(k)}=2\lambda_{11}^{(k)}$；(3) $\lambda_{11}^{(k)}$，$\lambda_{44}^{(k)},\lambda_{55}^{(k)}$ 独立产生，$\lambda_{22}^{(k)}=2\lambda_{11}^{(k)}$，$\lambda_{33}^{(k)}=3\lambda_{44}^{(k)}$；(4) $\lambda_{11}^{(k)}$，$\lambda_{33}^{(k)},\lambda_{44}^{(k)},\lambda_{55}^{(k)}$ 独立产生，$\lambda_{22}^{(k)}=0$。以上独立产生的元素均服从标准正态分布。混合矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素在每次独立试验中随机产生，其取值分为以下两种情况：(1)服从标准正态分布，记为 $\boldsymbol{A}\sim N(0,1)$；(2)服从 $[-1,+1]$ 区间的均匀分布，记为 $\boldsymbol{A}\sim U(-1,+1)$。将上述情况下的非正交联合对角化算法各独立的运行 200 次，串音误差均值如表 1 所示。

表 1　串音误差均值

	$\boldsymbol{\Lambda}_k$ 按(1)取值	$\boldsymbol{\Lambda}_k$ 按(2)取值	$\boldsymbol{\Lambda}_k$ 按(3)取值	$\boldsymbol{\Lambda}_k$ 按(4)取值
$\boldsymbol{A}\sim N(0,1)$	7.0166×10^{-15}	1.4524	4.2837	4.8247
$\boldsymbol{A}\sim U(-1,+1)$	1.1653×10^{-13}	1.4701	3.7709	4.7424

从表 1 可以看出当 $\boldsymbol{\Lambda}_k$ 按情况(2)，情况(3)，情况(4)取值时，也就是 $\boldsymbol{\Lambda}_k$ 相同位置的对角元素组成的向量存在线性相关的关系时，串音误差均值较大，说明非正交联合对角化的解不唯一存在。当在情况(1)，也就是 $\boldsymbol{\Lambda}_k$ 的对角元素独立取值、互不线性相关时，串音误差均值接近于 0，说明非正交联合对角化的解唯一存在。

试验 2　在本试验中，将非正交联合对角化算法运用于基于二阶统计量的盲分离中，以验证定理 2 的正确性。由模型式(1)产生混合信号，混合信号的 K 个自相关矩阵 $\boldsymbol{R}_k\,(0<k\le K)$ 组成目标矩阵集合。

源信号在以下信号中选取：$s_1(t)=\mathrm{sign}(\cos(2\pi100t))$, $s_2(t)=\sin(2\pi80t)$, $s_3(t)=\sin(2\pi300t+6\cdot\cos(2\pi60t))$, $s_4(t)=\sin(2\pi100t^2)$, $s_5(t)=\sin(2\pi25t)\cdot\sin(2\pi800t)$, $s_6(t)$，$s_7(t)$ 为不同参数的瑞利白噪声信号，显然 $s_6(t)$，$s_7(t)$ 具有相同的自相关函数波形。由 $s_1(t),\cdots,s_5(t)$ 构成第 1 组源信号，由 $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$, $s_6(t)$, $s_7(t)$ 构成第 2 组源信号。混合矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 5，其元素的产生方式与试验 1 相同。这两种形式的 $\boldsymbol{A}$ 分别与第 1 组、第 2 组源信号组合按照模型式(1)产生观测信号，由观测信号在不同时延处的自相关矩阵作为目标矩阵，采用文献[6]的算法进行非正交联合对角化。4 组试验各自独立运行 200 次，所得到的串音误差均值如表 2 所示。

表 2　串音误差均值

	第 1 组源信号	第 2 组源信号
$\boldsymbol{A}\sim N(0,1)$	0.4053	6.0653
$\boldsymbol{A}\sim U(-1,+1)$	0.3648	8.1793

通过表 2 可以看出，第 2 组源信号在两种混合矩阵取值时进行盲分离的串音误差均值都很大，说明不能实现盲分离；而第 1 组源信号在两种情况下的串音误差均值都很小，说明盲分离效果良好。对比源信号和恢复信号的波形也可以得出同样的结论。这说明采用二阶相关矩阵作目标矩阵时，必须要求源信号具有不同的自相关函数波形，才能够实现盲分离，从而验证了定理 2 的正确性。

试验 3 在本试验中，将非正交联合对角化算法运用于基于高阶累积量的盲信号分离中。观测信号产生的模型如式(1)所示。不失一般性，在仿真中采用四阶累积量。源信号 $s_1(t),\cdots,s_5(t)$ 的选取同试验 2。$s_6(t)$ 是高斯随机信号。由 $s_1(t),\cdots,s_5(t)$ 构成第 1 组源信号，由 $s_1(t),\cdots,s_4(t),s_6(t)$ 构成第 2 组源信号。混合矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 5，其元素的产生方式与试验 1 相同。这两种形式的 $\boldsymbol{A}$ 分别与第 1 组、第 2 组源信号组合按照模型式(1)产生观测信号。由观测信号的四阶累积量构成目标矩阵。4 组试验各独立运行 200 次所得到的串音误差均值如表 3 所示。

表 3 串音误差均值

	第 1 组源信号	第 2 组源信号
$\boldsymbol{A} \sim N(0,1)$	0.3701	9.6717
$\boldsymbol{A} \sim U(-1,+1)$	0.4032	11.7983

通过表 3 可以看出，当采用观测信号的四阶累积量构成目标矩阵时，当源信号中包含高斯信号时，不能实现盲分离。只有当源信号不包含高斯信号时才能够实现盲分离，从而验证了推论的正确性。

7 结束语

本文从非正交联合对角化的唯一存在条件出发，研究了盲分离算法的可辨识性问题。指出当采用二阶统计量构成目标矩阵时，只有当源信号自相关函数形状互不相同时，才能够实现盲分离。当采用高阶累积量构成目标矩阵时，只有当源信号中不存在高斯信号时才能够实现盲分离。这一结论对基于非正交联合对角化的盲分离算法具有理论指导意义。

参 考 文 献

[1] Cardoso J F and Souloumiac A. Blind beamforming for non Gaussian signals[J]. *IEE Proceedings, Part F: Radar and Signal Processing*, 1993, 140(6): 362–370.

[2] Belouchrani A, Meraim K, Cardoso J F, and Moulines E. A blind source separation technique using second-order statistics[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, 45(2): 434–444.

[3] Yeredor A. Non-orthogonal joint diagonalization in the least-squares sense with application in blind source separation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(7): 1545–1553.

[4] Ziehe A, Laskov P, Nolte G, and Müller K R. A fast algorithm for joint diagonalization with non-orthogonal transformations and its application to blind source separation[J]. *Journal of Machine Learning Research,* 2004, 5(12): 777–800.

[5] Li X L and Zhang X D. Nonorthogonal joint diagonalization free of degenerate solution[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(5): 1803–1814.

[6] Wang Fu-xiang, Liu Zhong-kan, and Zhang Jun. Nonorthogonal joint diagonalization algorithm based on trigonometric parameterization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(11): 5299–5308.

[7] Souloumiac A. Non-orthogonal joint diagonalization by combining givens and hyperbolic rotations[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(6): 2222–2231.

[8] Zhang Hua, Feng Da-zheng, and Zheng Wei-xing. A study of identifiability for blind source separation via nonorthogonal joint diagonalization[C]. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Seattle, Washington, USA, 2008: 3230–3233.

[9] Comon P. Canonical tensor decompositions[R]. Technology report, Laboratory of Information Signal System, French National Center for Scientific Research, June, 2004.

[10] Giorgio T and Rasmus B. A comparison of algorithms for tting the PARAFAC model[J]. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2006, 50(7): 1700–1734.

[11] De Lathauwer L. A link between the canonical decomposition in multilinear algebra and simultaneous matrix diagonalization[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2006, (28): 642–666.

[12] 李细林. 盲信号分离中的联合对角化和相位恢复问题研究[D]. [博士论文]，清华大学，2008.
Li Xi-lin. Studies on joint diagonalization and phase recovery in blind soure separation[D]. [Ph.D. dissertation], Tsinghua University, 2008.

[13] Ten Berge J M F and Sidiropoulos N D. On uniqueness in CANDECOMP/PARAFAC[J]. *Psychometrika*, 2002, (67): 399–409.

[14] Cao Xi-ren and Liu Ruey-wen. General approach to blind source separation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, 44(3): 562–571.

张延良： 男，1979 年生，讲师，博士生，研究方向为盲信号处理、独立分量分析.

楼顺天： 男，1962 年生，教授，博士生导师，主要研究方向为智能控制、盲信号处理.

张伟涛： 男，1983 年生，博士生，研究方向为盲信号处理、通信信号处理.