

柔性两轮直立式自平衡仿人机器人的建模及控制

赵建伟, 阮晓钢

(北京工业大学电子信息与控制工程学院, 北京 100124)

摘要: 研究了柔性两轮直立式自平衡仿人机器人的动力学建模问题. 运用拉格朗日方法和动力学原理建立了柔性两轮自平衡仿人机器人的动力学模型. 使用弹簧模仿人的腰椎, 并考虑了机器人的柔性腰椎弯曲; 这是与以前机器人的不同之处. 对得到的动力学模型进行了线性化处理, 并建立其状态空间方程; 由此建立的动力学模型结构简单, 易于对机器人进行有效控制. 仿真实验验证了系统的稳定性, 对其实验结果进行的详细分析验证了系统建模和 LQR 控制器设计的合理性和有效性.

关键词: 柔性机器人; 动力学建模; 广义坐标; 拉格朗日方程; 腰椎

中图分类号: TP24

文献标识码: A

Modeling and Control of a Flexible Two-wheel Upright Self-balance Humanoid Robot

ZHAO Jian-wei, RUAN Xiao-gang

(College of Electronic Information and Control Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: The dynamic modeling problem for the flexible two-wheel upright self-balance humanoid robot is tackled. A dynamic model for the flexible two-wheel self-balance humanoid robot is obtained based on Lagrange equation and dynamics theory. Spring is used to imitate hominine lumbar spine and flexible lumbar curvature of the robot is considered, which are different from previous robots. The gained dynamics model is linearized and its state-space equations are established. The structure of the established dynamic model is very simple, and it is easy to control the robot effectively. Simulation results prove the system stability, and experiment results are analyzed in detail, verifying that the system modeling and the linear-quadratic regulator (LQR) controller design are valid and rational.

Keywords: flexible robot; dynamic modeling; generalized coordinate; Lagrange equation; lumbar

1 引言 (Introduction)

随着机器人及柔性自动化技术的发展, 各种关节型机器人已得到广泛运用. 为拓宽机器人的运用领域, 并向更符合人的机理特性的方向发展, 对柔性机器人的研究已成为国内外研究的热点. 柔性机器人中包含有柔性单元 (柔性关节), 在运动过程中会发生弯曲变形, 这给柔性机器人的动力学建模带来了许多困难; 而建立准确、实用的动力学模型是设计柔性机器人高性能控制器的前提. 近年来, 国内外许多学者对柔性机器人的动力学建模问题进行了研究, 取得了不少成果, 但大多数都是关于柔性臂的, 如 Low 和 Vidyasagar^[1], 还有 Kane 等揭示了动力学钢化现象^[2], 文 [3~10] 也研究了柔性臂的问题.

国内外研究学者对移动轮式倒立摆模型及两轮

行走平衡控制技术进行了大量的研究, 分别出现了 Quasimoro^[11] 和 JEO^[12] 等机器人实体. 由于这种结构具有极强的灵活性, 而且它的行为与火箭飞行以及两足机器人行走有很大的相似性, 因而在国内外机器人领域得到了高度重视. 然而还没有人涉入到两轮自平衡机器人的柔性问题研究, 更没有人涉入到仿人型的两轮自平衡机器人的柔性问题研究. 本文首次采用弹簧模仿人的腰椎, 并设计出了真正意义的仿人柔性机器人. 考虑了机器人的柔性腰椎弯曲, 腰椎具有一定实际长度, 不能近似为一个点处理. 以柔性铰链的方式分析腰椎的弹簧部分, 对由柔性关节和刚性身体构成的柔性两轮自平衡仿人机器人的动力学建模问题进行了研究, 利用拉格朗日方法和动力学原理建立了柔性两轮自平衡仿人机器人的动力学模型. 在建模过程中考虑了重力势能、动能等较多因素的影响, 最终的动力学方程是一组

常微分方程,其形式规范、结构简单.并对动力学方程进行了线性化处理,用简单的线性方法就可以实现控制,对其实现带来很大的方便.本文为柔性两轮自平衡仿人机器人的控制研究提供了理论依据,对拟人机器人设计、研究具有重大意义.

在很多文献中介绍了基于输出反馈的 PID 控制系统,但其控制效果不理想,主要原因是系统的高阶次和多变量.还有学者提出了基于模糊神经网络的倒立摆控制系统,该方法利用模糊神经网络系统的自适应能力,有效地克服了系统存在的非线性和不确定性,但该方法过分依赖人类直接控制被控对象的经验.本文采用了基于状态空间设计法的 LQR 最优控制器,较好地兼顾了系统的鲁棒稳定性和快速性,实例应用研究说明了该方法的有效性.本文还从生物学角度对仿人机器人结构进行了分析.

2 柔性仿人机器人系统结构分析 (The system structure analysis of flexible humanoid robot)

柔性两轮直立式自平衡仿人机器人主要由感受器官、神经系统、骨骼—肌肉执行系统三部分组成,其拓扑结构如图 1 所示.系统具有模块化、便于拓展、稳定性好等特点.

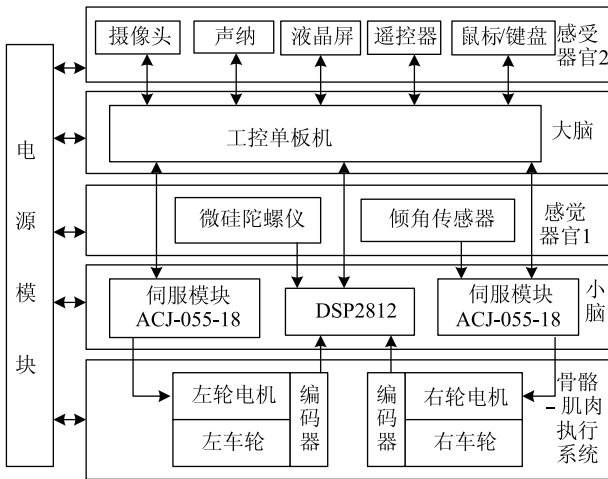


图 1 柔性仿人机器人系统结构图

Fig.1 The system structure of flexible humanoid robot

人体是一个复杂的机体,各器官、系统的功能不是孤立的,它们之间互相联系、互相制约,从生理学上可知人是由感觉器官、肢体和脑构成.人的运动控制系统是一个复杂的网络,涉及神经系统、感觉器官以及骨骼—肌肉执行系统.

1) 神经系统可分为中枢神经系统和周围神经系统.

中枢神经系统包括位于颅腔内的脑和位于椎管内的脊椎.在整个中枢神经中,脑是最重要的部分.

(1) 脑主要分为大脑和小脑两大部分.机器人的大脑就是工控单板机,用来计算运动策略和人工智能方面的控制.大脑与小脑之间通过 USB 口通讯.小脑是运动协调中枢,主要的功能是保持姿态平衡,协调运动.机器人的小脑是由 DSP 控制器 (TMS320F2812) 和电机伺服控制器 (ACJ-055-18) 一起构成.

(2) 脊髓主要是传导通路,起上通下达的桥梁作用.在机器人中就是 USB 仿真器 (起仿真、调试作用)、USB 线、串口线及各种信号导线所起的作用.

(2) 周围神经系统由感觉运动神经组成.感觉神经在机器人中就是视觉处理 (包含在摄像头中)、单片机 (包含在声纳中)、USB 仿真器、串口线.

3) 骨骼—肌肉执行系统.在机器人中对应的是车体平台、两个带有光电编码器反馈的高精度直流伺服电机和左右车轮.

3 柔性仿人机器人模型建立 (Modeling of flexible humanoid robot)

3.1 柔性仿人机器人运动学描述

本文研究的柔性仿人机器人是在水平面上由两个电动机驱动的两个自由度的柔性机器人.两个电动机驱动两个轮子运动,如图 2 和图 3 所示.在本文中将柔性仿人机器人的底座部分设计成在转动轴上下的两部分的质量相等. m_1 为底座部分的质量,机器人腰椎部分的质量为 m_3 (弹簧和绞架的质量),机器人上身部分的质量为 m_2 (头部和身体的质量),腰椎的质心到底座的顶部距离为 l_1 (腰椎部分质量分布是均匀的),上身的质心到腰椎的顶部的距离为 l_2 (上身质量分布是不均匀的,可以把质心假设在上身底部的 1/3 处).

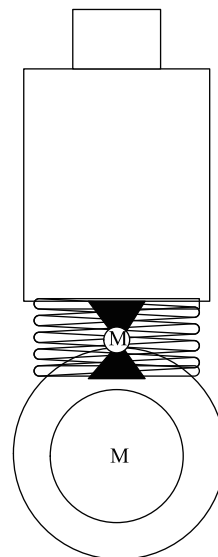


图 2 柔性仿人机器人侧视图

Fig.2 The side view of flexible humanoid robot

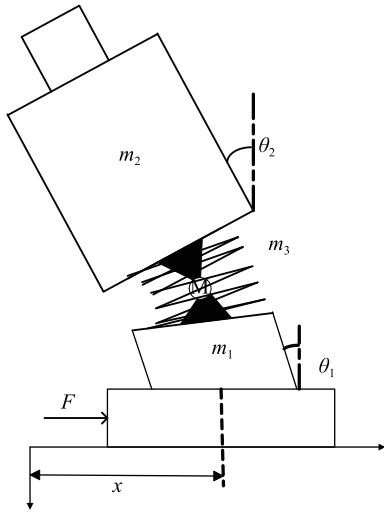


图 3 发生弯曲后的柔性仿人机器人侧视图

Fig.3 The side view of bended flexible humanoid robot

本文柔性仿人机器人为刚—柔耦合体. 上身和底座是刚性部分, 在运动过程中不会发生变形. 由于腰椎部分是柔性部件, 在运动过程中必然会发生变形. 由于在腰椎侧面部分还有柔性铰链部件 (铰链部件作用是使弹簧保持在前后方向运动, 不会左右运动), 腰椎部分的运动可等价于柔性铰链的运动. 取系统的广义坐标系如图 3 所示, 其中 x 为机器人电动机、车轮转动轴移动的位移, θ_1 为等效后底座的转角, θ_2 为上身部分的转角.

3.2 柔性机器人的动力学建模

利用拉格朗日方程推导运动学方程. 拉格朗日方程为:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q, \dot{q}) \quad (1)$$

其中, L 为拉格朗日算子, q 为系统的广义坐标, T 为系统的总动能, V 为系统的总势能.

拉格朗日方程由广义坐标 q_i 和 L 表示为如下式子:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i \quad (2)$$

其中 $i = 1, 2, 3, \dots, n$; f_i 为系统沿该广义坐标方向上的外力, 在本文系统中, 系统的 3 个广义坐标如图 3 中所示, 分别为 x 、 θ_1 、 θ_2 .

1) 柔性仿人机器人的总动能.

根据图 3 选定的坐标系, 柔性机器人的总动能可表示为:

$$T = T_{m_1} + T_{m_2} + T_{m_3} \quad (3)$$

其中, T_{m_1} 为底座部分的动能, T_{m_2} 为机器人上身部分的动能, T_{m_3} 为机器人腰椎部分的动能.

由于将柔性仿人机器人的底座部分设计为在转动轴上下的两部分的质量相等, 所以底座部分没有

转动动能, 只有平动动能.

机器人底座部分的动能:

$$T_{m_1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 \quad (4)$$

机器人上身部分的动能:

$$T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 \{ \dot{x}^2 - 2\dot{x}[l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + (l_2 + l_3) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2] + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1(l_1 + l_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)] + \frac{m_2}{6} (3l_1^2 + 6l_1 l_2 + 7l_2^2) \dot{\theta}_2^2 \} \quad (5)$$

机器人腰椎部分的动能:

$$T_{m_3} = \frac{1}{2} m_3 \{ \dot{x}^2 - 2\dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4} m_3 l_1^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \} \quad (6)$$

所以将式 (4)~(6) 代入式 (3) 就可得到机器人系统的总动能:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \{ \dot{x}^2 - 2\dot{x}[l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + (l_1 + l_2) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2] + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1(l_1 + l_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)] + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2 - m_3 \dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{3}{4} m_3 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4} m_3 l_1^2 \dot{\theta}_2^2 \} \quad (7)$$

2) 柔性仿人机器人的总势能.

本文所研究的柔性仿人机器人系统由于底座部分的质量是均匀分布在转动轴的上下, 所以不产生势能, 柔性仿人机器人的总势能只包含上身部分和腰椎部分的势能:

$$V = V_{m_2} + V_{m_3} \quad (8)$$

式中 V_{m_2} 、 V_{m_3} 分别为机器人上身部分的重力产生的重力势能、机器人腰椎部分的重力产生的重力势能, 因此有

$$V = m_3 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g [l_1 \cos \theta_1 + (l_1 + l_2) \cos \theta_2] \quad (9)$$

3.3 柔性仿人机器人的动力学模型

由上面得到的总动能式 (7) 和总势能式 (9), 可以得到拉格朗日算子:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \{ \dot{x}^2 - 2\dot{x}[l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + (l_1 + l_2) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2] + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1(l_1 + l_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)] + \frac{1}{6} m_2 (3l_1^2 + 7l_2^2 + 6l_1 l_2) \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2 - m_3 \dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{3}{4} m_3 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4} m_3 l_1^2 \dot{\theta}_2^2 + m_3 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g [l_1 \cos \theta_1 + (l_1 + l_2) \cos \theta_2] \} \quad (10)$$

由于在广义坐标 θ_1 、 θ_2 上均不受到外力的作用, 所以式 (2) 在广义坐标 θ_1 和 θ_2 上可以表示为式 (11)、(12):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (12)$$

将式 (11)、(12) 经过一系列的复杂求导和整理, 最终求解代数方程可以得到描述柔性两轮直立式自平衡仿人机器人的动力学方程为:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 = & -\left\{ \frac{1}{3} \left[\left(m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) l_1^2 + \frac{m_2}{3} (6l_1 l_2 + 7l_2^2) \right] m_2 l_1 (l_1 + l_2) \right. \\ & \left. \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2^2 l_1^2 (l_1 + l_2)^2 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right\} \\ & \sin(\theta_2 - \theta_1) + \left[\frac{1}{3} \left(m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) l_1^2 + \frac{m_2}{3} (6l_1 l_2 + 7l_2^2) \right] \\ & (m_2 + m_3) l_1 \cos \theta_1 \ddot{x} + m_2^2 l_1 (l_1 + l_2)^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ & \cos \theta_2 \ddot{x} + \left[\frac{1}{3} \left(m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) l_1^2 + \frac{m_2}{3} (6l_1 l_2 + 7l_2^2) \right] (m_2 \\ & + m_3) g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_1 (l_1 + l_2) \cos(\theta_2 - \theta_1) (l_1 \\ & + l_2) \sin \theta_2 \} / \left\{ \left(m_2 + \frac{3}{4} m_3 \right) l_1^2 \left[\frac{1}{3} \left(m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) l_1^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{m_2}{3} (6l_1 l_2 + 7l_2^2) \right] - m_2^2 l_1^2 (l_1 + l_2)^2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 = & \left[m_2 l_1^2 \left(m_2 + \frac{3}{4} m_3 \right) (l_1 + l_2) \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2^2 \right. \\ & \left. (l_1 + l_2)^2 \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l_1 \right. \\ & \left. \left(m_2 + \frac{3}{4} m_3 \right) (l_1 + l_2) \cos(\theta_2 - \theta_1) \cos \theta_1 \ddot{x} + \right. \\ & \left. \sin \theta_1 l_1 (l_1 + l_2) \cos(\theta_2 - \theta_1) m_2 \left(m_2 + \frac{3}{4} m_3 \right) \right. \\ & \left. - g \sin \theta_2 (l_1 + l_2) m_2 \left(m_2 + \frac{3}{4} m_3 \right) l_1 \right] / \left[m_2^2 (l_1 \right. \\ & \left. + l_2)^2 l_1 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{3} \left(m_2 + \frac{3}{4} m_3 \right)^2 l_1^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} (7l_2^2 + 6l_1 l_2) m_2 \left(m_2 + \frac{3}{4} m_3 \right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

式 (13)、(14) 就是所要讨论的柔性两轮直立式自平衡仿人机器人的动力学模型, 是一组高度非线性、高度耦合的常微分方程, 同时也描述了柔性两轮直立式自平衡仿人机器人的肢体关节转角的运动学特性。

4 线性化模型 (Linearized model)

上式 (13)、(14) 可以表示成如下形式:

$$\ddot{\theta}_1 = f_1(x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{x}) \quad (15)$$

$$\ddot{\theta}_2 = f_2(x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{x}) \quad (16)$$

对式 (15) 在平衡位置进行泰勒级数展开, 并线性化可得:

$$\begin{aligned} K_{11} &= 0 \\ K_{12} &= \frac{\left(\frac{1}{3} \left(m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) l_1^2 + \frac{m_2}{3} (6l_1 l_2 + 7l_2^2) \right) (m_2 + m_3) g l_1}{\left[\left(m_2 + \frac{3}{4} m_3 \right) l_1^2 \left(\frac{1}{3} \left(m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) l_1^2 + \frac{m_2}{3} (6l_1 l_2 + 7l_2^2) \right) - m_2^2 l_1^2 (l_1 + l_2)^2 \right]} \\ K_{13} &= \frac{g m_2^2 l_1 (l_1 + l_2)^2}{\left[\left(m_2 + \frac{3}{4} m_3 \right) l_1^2 \left(\frac{1}{3} \left(m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) l_1^2 + \frac{m_2}{3} (6l_1 l_2 + 7l_2^2) \right) - m_2^2 l_1^2 (l_1 + l_2)^2 \right]} \\ K_{14} &= 0, \quad K_{15} = 0, \quad K_{16} = 0 \\ K_{17} &= \frac{\left[\left(\frac{1}{3} \left(m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) l_1^2 + \frac{m_2}{3} (6l_1 l_2 + 7l_2^2) \right) (m_2 + m_3) l_1 + m_2^2 l_1 (l_1 + l_2)^2 \right]}{\left[\left(m_2 + \frac{3}{4} m_3 \right) l_1^2 \left(\frac{1}{3} \left(m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) l_1^2 + \frac{m_2}{3} (6l_1 l_2 + 7l_2^2) \right) - m_2^2 l_1^2 (l_1 + l_2)^2 \right]} \end{aligned}$$

代入 (15) 式, 得到线性化后的方程:

$$\ddot{\theta}_1 = K_{12} \theta_1 + K_{13} \theta_2 + K_{17} \ddot{x} \quad (17)$$

同样方法可以得到:

$$\begin{aligned} K_{21} &= 0 \\ K_{22} &= \frac{l_1 (l_1 + l_2) m_2 \left(m_2 + \frac{3}{4} m_3 \right)}{m_2^2 (l_1 + l_2)^2 l_1 - \frac{1}{3} \left(m_2 + \frac{3}{4} m_3 \right)^2 l_1^2 - \frac{1}{3} (7l_2^2 + 6l_1 l_2) m_2 \left(m_2 + \frac{3}{4} m_3 \right)} \end{aligned}$$

$$K_{23} = \frac{-g(l_1 + l_2)m_2(m_2 + \frac{3}{4}m_3)l_1}{m_2^2(l_1 + l_2)^2l_1 - \frac{1}{3}(m_2 + \frac{3}{4}m_3)^2l_1^2 - \frac{1}{3}(7l_2^2 + 6l_1l_2)m_2(m_2 + \frac{3}{4}m_3)}$$

$$K_{24} = 0, \quad K_{25} = 0, \quad K_{26} = 0$$

$$K_{27} = \frac{m_2l_1(m_2 + \frac{3}{4}m_3)(l_1 + l_2)}{m_2^2(l_1 + l_2)^2l_1 - \frac{1}{3}(m_2 + \frac{3}{4}m_3)^2l_1^2 - \frac{1}{3}(7l_2^2 + 6l_1l_2)m_2(m_2 + \frac{3}{4}m_3)}$$

代入式 (16), 得到线性化后的方程:

$$\ddot{\theta}_2 = K_{22}\theta_1 + K_{23}\theta_2 + K_{27}\ddot{x} \quad (18)$$

式 (17)、(18) 就是所要讨论的柔性两轮直立自平衡仿人机器人线性化后的动力学模型, 是一组线性常微分方程, 同时简单、方便地描述了柔性两轮直立自平衡仿人机器人的肢体关节转角的运动学特性。

由此得到了两个线性微分方程, 由于本文中采用加速度作为输入, 所以还需要加入一个方程:

$$F = \ddot{x} \quad (19)$$

其中, F 为机器人受到的外力。

由式 (17)~(19) 可得到系统状态空间方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ K_{17} \\ K_{27} \end{bmatrix} F \quad (20)$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F \quad (21)$$

式 (20)、(21) 就是所要讨论的柔性两轮直立自平衡仿人机器人的线性化后的动力学模型, 是一组结构简单的状态方程, 同时也描述了柔性两轮直立自平衡仿人机器人的输入/输出特性. 对系统进行线性化处理, 使原非线性系统变换为一个线性系统, 可以更方便、有效地用现代线性控制理论的控制方法对其进行控制。

5 最优控制器 LQR (Optimal controller LQR)

采用基于状态反馈的线性控制策略, 把机器人的运动解耦成直线运动和旋转运动, 然后分别设计直线运动和旋转运动控制系统, 得出机器人电机所需的控制量, 最后把两部分所得的控制量进行耦合叠加。

线性二次型 (linear quadratic, LQ) 是指系统的状态方程是线性的, 指标函数是状态变量和控制变量的二次型. 线性二次型控制理论已成为反馈系统设计的一种重要工具, 它为多变量反馈系统的设计提供了一种有效的分析方法. 它适用于时变系统, 可以处理扰动信号和测量噪声问题, 可以处理有限和无限的时间区间. 线性二次型最优控制 (LQR) 研究的是线性的或可线性化的系统, 并且系统的性能指标是状态变量和控制变量的二次型函数的积分. 可以很容易获得它的解, 并且可以达到非常好的控制效果, 因此在工程上得到广泛的应用。

1) LQR 最优调节器原理: 考虑系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (22)$$

找一个状态反馈控制律:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (23)$$

使得如下性能指标 J 最小化:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{T_f} (x^T(t)Qx(t) + u^T Ru(t))dt + \frac{1}{2} x^T(t_f)Mx(t_f) \quad (24)$$

其中 \mathbf{Q} 、 \mathbf{M} 是半正定矩阵, \mathbf{R} 是正定矩阵, \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} 分别是对状态变量和输入向量的加权矩阵, $\mathbf{x}(t)$ 是 n 维状态变量, $\mathbf{u}(t)$ 是 m 维输入变量, 终端时间 t_f 固定, 终端状态 $\mathbf{x}(t_f)$ 自由.

要使性能函数 J 最小, 首先构造一个 Hamilton 函数:

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2}[\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t))] \quad (25)$$

当输入信号不受约束时, 可对 Hamilton 函数进行求导并令其值为 0, 求出最小值:

$$\partial\mathbf{H}/\partial\mathbf{u} = -\mathbf{R}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) = 0 \quad (26)$$

从而得到最优控制信号

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (27)$$

$\boldsymbol{\lambda}(t)$ 可以由下式求出

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad (28)$$

$\mathbf{P}(t)$ 可以由 Riccati 方程求出

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q} \quad (29)$$

当 $t_f \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{P}(t)$ 趋近于一个常值矩阵, 且矩阵 $\dot{\mathbf{P}}(t) = 0$, 因此, 上式给出的 Riccati 方程就简化为:

$$-\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{Q} = 0 \quad (30)$$

上式给出的 Riccati 代数方程很适合用 Matlab 来处理, Matlab 提供了专门的函数对其进行求解.

用 Matlab 求矩阵秩命令 rank() 得到系统可控性秩判据 $\text{rank}(\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \mathbf{A}^3\mathbf{B} \ \mathbf{A}^4\mathbf{B} \ \mathbf{A}^5\mathbf{B}) = 6$ 及可观性秩判据 $\text{rank}(\mathbf{C} \ \mathbf{C}\mathbf{A} \ \mathbf{C}^2\mathbf{A} \ \mathbf{C}^3\mathbf{A} \ \mathbf{C}^4\mathbf{A} \ \mathbf{C}^5\mathbf{A})^T = 6$, 可知近似线性化系统状态完全可控可观, 系统满足最优控制使用条件.

下面应用 LQR 控制算法对其进行计算:

设最佳控制向量的矩阵为 \mathbf{K} :

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(t) \quad (31)$$

用 Matlab 求得矩阵 $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \ \mathbf{K}_2 \ \mathbf{K}_3 \ \mathbf{K}_4 \ \mathbf{K}_5 \ \mathbf{K}_6]$: 调整对角矩阵 \mathbf{Q} 中的参数即是对输入量的加权值的调整, 就可以得到不同的仿真结果, 利用式 (31) 函数, 进而得到最终的参数 \mathbf{u} .

2) 本文的实际系统中, m_1 为 8 kg (底座部分的质量), m_3 为 1 kg (机器人腰椎部分的质量), m_2 为 10 kg (机器人上身部分的质量), l_1 为 0.05 m (等效

后底座的质心到底座转动中心的距离), l_3 为 0.05 m (腰椎的质心到等效后底座的顶部距离), l_2 为 0.3 m (上身的质心到腰椎的顶部的距离). 选取 $\mathbf{Q} = [100000, 01000000, 00100000, 00010000, 000010, 000001]$, $\mathbf{R} = [1]$, 利用 Matlab 命令 $LQR(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$ 得到系统反馈增益 $\mathbf{K} = [1.0000 \ 28.6718 \ 403.1539 \ 12.5734 \ 1.7862 \ 446.7962]$, 代入式 (31) 就得到输入 \mathbf{u} .

仿真的系统零输入响应曲线如图 4 所示, 横坐标是时间, 单位是 s; 纵轴分别是位置、角度、前进速度和角速度, 单位分别为 s、rad、m/s 和 rad/s, 柔性仿人机器人在初始状态给底座的转角 θ_1 和上身的转角 θ_2 提供一个相同的约为 5.7° 的初始角. 规定机器人前进方向为正, 反方向为负.

(1) 从图 4(a) 可以看到机器人向前移动了一段距离, 并在 3 s 时刻到达最大位置处, 然后又往回移动了一段距离, 这是由于机器人的身体发生了倾斜, 机器人需要通过向前移动来调整姿态. 机器人在抵达最大位移位置后会往回移动, 这是由于在调整过程中有超调现象出现, 机器人需要有调整的过程. 由能量守恒定理知机器人的身体质心位置要比初始时刻身体的质心位置高 (机器人的势能增加), 因此机器人需要通过电机做功来提供能量 (机器人会有一段向前的位移).

(2) 图 4(b) 描述的是柔性机器人运动平衡问题最关注的量—机器人的上身和底座的姿态角度. ① 先对机器人底座的转角 θ_1 进行分析. 由于提供了一个大约为 $+5.7^\circ$ 的初始角, 在 0.18 s 内, 机器人底座由 $+5.7^\circ$ 很快变为负角度. 这是由于机器人有一个快的向前的调整, 底座的转角向反方向变化. 当达到最大约 -41.6° 时, 由于柔性部件的存在, 底座的角度将会逐渐减小, 在 0.5 s 时刻回到平衡位置, 但是由于受惯性、柔性铰链、机器人底座驱动等因素的影响, 它不会保持在平衡位置, 而是继续向正方向移动, 出现逐渐增大的正角度, 大约在 0.86 s 时刻达到正的最大角度 8.1° . 还是由于柔性铰链、机器人底座驱动的存在, 底座的角度将会逐渐减小, 经过一段时长 4.2 s 的比较缓慢平滑的调整过程, 最后大约在 5 s 时刻回到平衡位置. ② 对机器人上身的转角 θ_2 进行分析. 初始角大约为 $+5.7^\circ$, 机器人在 0.125 s 内, 底座角度变化很小, 基本保持在 $+5.7^\circ$. 这是由于存在柔性铰链, 机器人上身的角度不会很快发生变化. 在 0.125 s 时刻以后 (即底座的负向倾角达到最大), 由于柔性铰链和惯性的作用, 机器人上身角度不会马上减小, 经过大约 0.18 s 才开始变

化, 上身的角度逐渐减小, 最后在 1 s 时刻变为 0. 但是由于惯性、柔性铰链等因素的影响, 上身部分不会保持在平衡位置, 还需要经过一段 4.2 s 的调整过程, 最后大约在 5 s 时刻回到平衡位置.

(3) 从图 4(c) 中可以看到, 机器人在开始阶段有很快的加速过程, 大约在 0.4 s 时刻达到最大速度 1.3 m/s. 此时底座到达了平衡位置, 但因受到惯性影响而继续运动. 由于柔性铰链对底座的影响, 机器人的速度逐渐减小, 在 3 s 时刻机器人速度为 0, 此后, 机器人的速度还会继续减小, 并变为负的速度, 在 5 s 时刻达到 -0.14 m/s. 由于存在惯性和系统能量耗散等问题, 机器人的速度最后会减小到 0.

(4) 图 4(d) 描述的是机器人的上身和底座的姿态角速度. ① 先对机器人底座的角速度 $\dot{\theta}_1$ 进行分析. 由于提供一个大约为 $+5.7^\circ$ 的初始角, 在大约 0.125 s 内, 机器人底座的角速度为负. 底座的角速度在 0.125 s 时刻处达到 -2.9 rad/s , 而由于惯性和柔性铰链等的影响, 底座的角速度将会逐渐减小, 最后在 0.18 s 时刻变为 0. 由于存在柔性铰链, 底座

会产生一个正的角速度, 在 0.275 s 处达到正的最大角速度 2.8 rad/s . 还是由于受惯性和柔性铰链等的影响, 底座的角速度将逐渐减小, 最后在 0.86 s 时刻变为 0. 柔性铰链的存在使底座产生一个小的负角速度, 再经过时长 4.14 s 的调整过程后, 在 5 s 时刻回到平衡位置. ② 对机器人上身的角速度 $\dot{\theta}_2$ 进行分析. 由于存在一个大约为 $+5.7^\circ$ 的初始角, 在大约 0.125 s 时间内, 机器人底座角速度很小, 保持在 0° 附近. 这是由于受机器人上身和柔性铰链的作用, 机器人上身的角速度不会很快发生变化. 在 0.125 s 时刻之后, 经过一段时间的调整, 上身的角速度才会逐渐增大, 大约在 0.18 s 时刻达到负的最大值 -0.15 rad/s . 在大约 1.8 s 时刻角速度为 0, 由于柔性铰链的存在, 上身的角速度还会逐渐减小, 经过时长 3.2 s 的比较平滑的调整过程, 最后在 5 s 时刻回到平衡位置.

由上述实验看到, 在给系统一个大约为 5.7° 的初始角的情况下, 机器人经过 5 s 能调整到直立自平衡状态. 本文还做了大量仿真实验, 证实初始角度

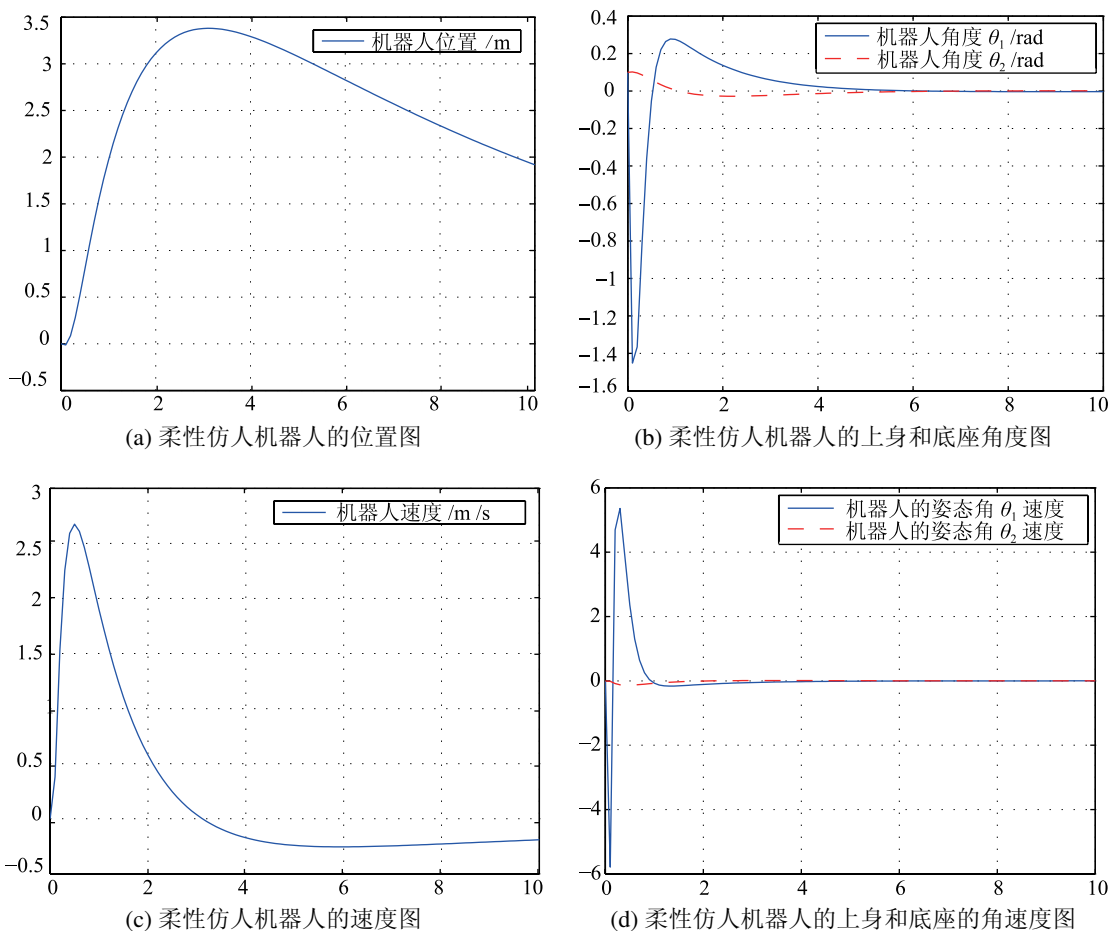


图 4 系统的仿真响应曲线

Fig.4 The response curves of system simulation

达到 28.66° 时, 机器人仍可以调整回平衡状态. 由此, 通过仿真实验验证了给系统施加一个在一定范围内的初始摆角 (小于 28.66°) 时, 系统均能调节恢复到平衡位置. 实验结果表明了系统建模和控制器设计的合理性和有效性.

6 总结 (Conclusion)

本文从生理学上对柔性两轮直立式自平衡仿人机器人进行了分析和研究. 该机器人具有柔性腰椎, 实现了真正意义上的仿人柔性机器人. 柔性两轮直立式自平衡仿人机器人是一个复杂的动力学系统, 具有高度非线性、强耦合等特点. 在整个动力学建模过程中将柔性腰椎作为柔性铰链处理, 运用了拉格朗日方法和动力学原理建立了柔性两轮直立式自平衡仿人机器人的动力学模型, 为柔性两轮直立式自平衡仿人机器人的动力学特性及控制研究提供了理论依据. 并对其进行了线性化处理, 以方便控制. 通过仿真实验验证了系统的稳定性, 对实验结果进行了详细分析. 并通过实验验证了系统建模和控制器设计的合理性和有效性, 为自主学习的智能机器人建立良好的科学研究平台. 自主式智能移动机器人在社会中起着重要的作用, 是适合在复杂、危险的环境中工作的一种智能机器人. 本文对推动机器人仿人设计、研究具有重大意义.

参考文献 (References)

- [1] Low K H, Vidyasagar M. Lagrangian formulation of the dynamic model for flexible manipulator systems[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1988, 110(2): 175~181.
- [2] Kane T R, Ryan R R, Banerjee A K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1987, 10(2): 139~151.
- [3] 陈炜, 余跃庆, 张绪平, 等. 欠驱动柔性机器人的动力学建模与耦合特性 [J]. *机械工程学报*, 2006, 42(6): 16~23.
Chen Wei, Yu Yue-qing, Zhang Xu-ping, *et al.* Dynamic modeling and coupling of underactuated flexible robot[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 42(6): 16~23.
- [4] 陈炜, 余跃庆, 张绪平, 等. 欠驱动柔性机器人动力学建模及仿真 [J]. *中国机械工程*, 2006, 17(9): 931~936.
Chen Wei, Yu Yue-qing, Zhang Xu-ping, *et al.* Dynamic modeling and simulation of underactuated flexible robot[J]. *China Mechanical Engineering*, 2006, 17(9): 931~936.
- [5] Basher H A. Modeling and simulation of flexible robot manipulator with a prismatic joint[A]. *Proceedings of the IEEE Southeast Conference 2007*[C]. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2007. 255~260.
- [6] Loudini M, Boukhetala D, Tadjine M. Comprehensive mathematical modelling of a transversely vibrating flexible link robot manipulator carrying a tip payload[J]. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 12(1): 67~83.
- [7] Kalyoncu M. Mathematical modelling and dynamic response of a multi-straight-line path tracing flexible robot manipulator with rotating-prismatic joint[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2008, 32(6): 1087~1098.
- [8] 邹建奇, 苏欣, 张京军. 柔性机械臂动力学分布参数模型的建立及其离散化 [J]. *吉林大学学报: 理学版*, 2007, 45(3): 353~357.
Zou Jian-qi, Su Xin, Zhang Jing-jun. Dynamic equation of distributed-parameter of a flexible robotic arm and its discreteness[J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2007, 45(3): 353~357.
- [9] 管贻生, 安永辰. 机器人手臂弹性动力学分析的 Kane 方法 [J]. *机器人*, 1992, 14(1): 45~51.
Guan yi-sheng, An yong-chen. A new method of dynamics of flexible robot manipulators based on Kane's method and model analysis[J]. *Robot*, 1992, 14(1): 45~51.
- [10] 孙立宁, 王洪福, 曲东升. 柔性臂动力学建模及比较研究 [J]. *压电与声光*, 2003, 25(6): 525~529.
Sun Li-ning, Wang Hong-fu, Qu Dong-sheng. Dynamic modeling of flexible manipulator and comparative study[J]. *Piezoelectrics and Acoustooptics*, 2003, 25(6): 525~529.
- [11] Salerno A, Angeles J. On the nonlinear controllability of a quasiholonomic mobile robot[A]. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*[C]. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2003. 3379~3384.
- [12] Grasser F, D'Arrigo A, Colombi S, *et al.* JOE: A mobile, inverted pendulum[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2002, 49(1): 107~114.

作者简介:

赵建伟 (1979-), 男, 博士. 研究领域: 机器人, 智能控制等.

阮晓钢 (1958-), 男, 博士后, 教授. 研究领域: 机器人, 自动控制与人工智能等.