

## 水平欠驱动机械臂的反步自适应滑模控制

林 壮, 段广仁, 宋申民

(哈尔滨工业大学航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:** 针对二自由度水平欠驱动机械臂系统, 提出了基于分层滑模控制思想的反步自适应滑模控制方法. 该方法能够在不对系统状态模型进行复杂坐标变换, 并且没有约束方程限制的前提下实现对欠驱动系统的反馈滑模控制. 仿真结果表明了该方法的有效性, 而且优化后的控制器具有较好的适应性和控制效果.

**关键词:** 欠驱动机械臂; 反步控制; 滑模控制

**中图分类号:** TP24

**文献标识码:** A

### Backstepping Adaptive Sliding Mode Control for Horizontal Underactuated Manipulators

LIN Zhuang, DUAN Guang-ren, SONG Shen-min

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** A method of backstepping adaptive sliding mode control based on hierarchical sliding mode control theory is presented for a 2-DOF horizontal underactuated manipulator. The method can achieve underactuated system's feedback sliding mode control without either complex coordinate transformation for the system state model or constraint equation restrictions. Simulation results show that the method is valid and the optimized controller can get better adaptability and control results.

**Keywords:** underactuated manipulator; backstepping control; sliding mode control

## 1 引言 (Introduction)

近年来, 欠驱动机械系统成为世界各国都在致力研究的一个科研课题. 到目前为止, 在关于欠驱动系统的诸如动力学分析、运动规划、反馈控制等方面, 已经取得了许多研究成果<sup>[1~3]</sup>. 但是, 由于欠驱动系统特点是输入空间 (即控制空间) 维度小于构造空间维度, 不满足 Brockett 关于光滑反馈镇定的必要条件, 因此通常采用非光滑控制器和时变的光滑控制器, 或两者混合的控制方法<sup>[2,3]</sup>.

文 [4] 提出了一种针对 Pendubot 的分层滑模控制思想, 在确保系统的滑模稳定性的同时, 具有很好的抗扰性. 但是, 由于水平欠驱动机械臂系统不存在重力因素, 使其稳定控制器的设计难度有所加大, 这一定程度上降低了该方法对水平欠驱动系统的适用性<sup>[5,6]</sup>. 虽然可以通过某些方法来解决其控制器参数的优化选择问题<sup>[7,8]</sup>, 但却无法从根本上解决问题.

反步 (backstepping) 设计方法也称为后推设计

法, 它通常与李亚普诺夫型自适应律相结合, 综合考虑控制律和自适应律, 使整个闭环系统满足期望的动静态性能. 其递推性的设计步骤不仅可以处理非匹配不确定性, 还可以处理有未知参数的非线性系统, 使其在非线性和非线性系统控制设计中表现出了很大的优势. 但是, 反步设计法一般要求系统结构满足所谓的块严格反馈条件, 即只有对于满足一定几何结构的非线性系统, 才可以经过微分同胚变换转化为具有下三角结构的系统来进行反步设计<sup>[9,10]</sup>.

由于欠驱动系统的子系统之间没有明显的微分关系, 且存在不可积分的二阶约束, 所以上述反步设计的一般方法对欠驱动系统的控制无能为力. 有很多学者提出了解决这个问题的方法, 如采用静态的坐标变换在保证变换后的系统与原系统微分同胚的基础上使其满足反步设计的要求<sup>[11]</sup>, 这也是一般较为常用的设计思想. 但是变化后的系统要求满足三个辅助稳定方程和一个难以解析性求解的超越方程, 增加了设计难度, 且需要在机械臂结构严格符合相关条件的前提下才能得到一个近似的稳定解.

而文 [12] 证明只要能将系统的状态模型进行上三角化或下三角化, 就可以通过坐标变换方法使系统的驱动部分和非驱动部分具有相对直观的微分关系, 从而使常规的反步设计法得以应用. 但是其坐标变换方法需要在引入诸如理想电机模型等辅助系统模型的基础上, 通过间接变换使系统状态矩阵满足上下三角的条件, 给复杂的系统模型增加了更多的不确定因素. 此外还有很多解决方法 [13,14], 但是都因存在不同的限制条件而制约了其适用性.

因此, 针对上述反步设计的问题, 本文将反步设计与分层滑模控制思想相结合, 提出了一种适用于水平欠驱动系统的基于分层滑模控制思想的反步自适应滑模控制方法, 使其在无需对原系统状态模型进行复杂坐标变换且没有约束方程限制的前提下实现稳定的反馈滑模控制, 解决了因系统的复杂性和多重约束带来的设计难度和稳定控制问题, 实现了二自由度水平欠驱动机械臂的有效控制, 并在文中给出了相应的理论推导和仿真结果.

## 2 水平欠驱动机械臂动力学模型 (Dynamic model of horizontal underactuated manipulators)

模型建立考虑标准假设形式, 如无摩擦等. 图 1 中  $m_1$ 、 $m_2$  分别是连杆 1 和 2 的质量,  $\theta_1$  是连杆 1 相对初始位置 (假设初始位置为系统两臂伸直  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  的初始状态, 即  $x$  轴) 的角度,  $\theta_2$  是连杆 2 相对连杆 1 的角度,  $l_1$  和  $l_2$  分别是连杆 1、2 的长度,  $r_1$  和  $r_2$  分别是连杆 1、2 的长度的一半,  $I_1$  和  $I_2$  是连杆 1 和连杆 2 相对于其质心的转动惯量,  $\tau_1$  是系统的外加控制输入量. 系统参变量的坐标是  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ , 可得系统的动力学方程 [6]:

$$A(\theta)\ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta}) = \tau \tag{1}$$

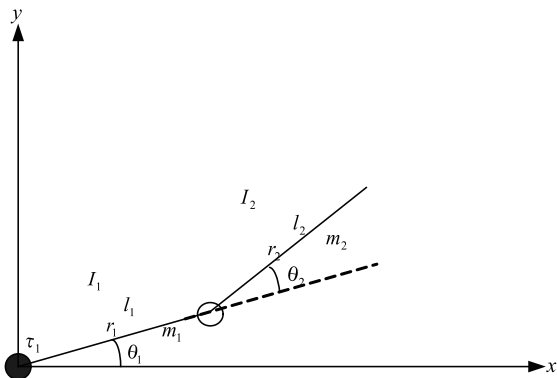


图 1 水平欠驱动二自由度机械臂

Fig.1 2-DOF horizontal underactuated manipulators

$\dot{\theta}_i$  和  $\ddot{\theta}_i (i = 1, 2)$  分别是广义的速度和广义的加

速度, 向量  $h(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbf{R}^2$ , 包括系统中的向心力和向心加速度部分 (科里奥利力), 水平系统意味着忽略重力部分. 式 (1) 可以写成:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$a_{11} = I_1 + I_2 + m_1 r_1^2 + m_2 (l_1^2 + r_2^2) + 2m_2 l_1 r_2 c_2$$

$$a_{12} = a_{21} = I_2 + m_2 r_2^2 + m_2 l_1 r_2 c_2$$

$$a_{22} = I_2 + m_2 r_2^2$$

$$h_1 = -2m_2 l_1 r_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 l_1 r_2 s_2 \dot{\theta}_2^2$$

$$h_2 = m_2 l_1 r_2 s_2 \dot{\theta}_1^2$$

这里,  $s_2 = \sin \theta_2$ ,  $c_2 = \cos \theta_2$ .

## 3 自适应反步分层滑模控制器设计 (Design of adaptive backstepping sliding mode controller)

式 (2) 是典型的单输入、多输出的非线性耦合系统, 令  $x_1 = \theta_1$ ,  $x_2 = \dot{\theta}_1$ ,  $x_3 = \theta_2$ ,  $x_4 = \dot{\theta}_2$ , 将驱动部分和非驱动部分分开, 并为方便计算, 假设其输入分为  $u_{Pa}$  和  $u_{Pu}$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(X) + b_1(X)u_{Pa} + F_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(X) + b_2(X)u_{Pu} + F_2 \end{cases} \tag{3}$$

$$F_1 = \Delta f_1 + \Delta b_1 \tag{4}$$

$$F_2 = \Delta f_2 + \Delta b_2$$

其中,  $f_1(X), f_2(X)$  和  $b_1(X), b_2(X)$  代表相应的非线性函数 [7],  $\Delta f_1, \Delta b_1$  和  $\Delta f_2, \Delta b_2$  代表不同子系统在实际控制时的参数不确定性,  $F_1$  和  $F_2$  为相应参数不确定性的加和. 假设总不确定性的上限为  $|F_1| \leq \bar{F}_1$  和  $|F_2| \leq \bar{F}_2$ , 且参数的不确定性为慢变, 即  $\dot{F}_1 = \dot{F}_2 = 0$ .

首先, 对于式 (3) 中的驱动子系统部分, 定义:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - x_{1d} \\ \alpha_1 = c_1 z_1, c_1 > 0 \\ z_2 = \dot{z}_1 + \alpha_1 = x_2 + c_1 z_1 \end{cases} \tag{5}$$

其中,  $\alpha_1$  是稳定项辅助方程, 注意到这里  $x_{1d}$  (期望值) 为常数, 所以  $\dot{z}_1 = \dot{x}_1$ . 令李亚普诺夫函数

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \tag{6}$$

对  $V_1$  求导, 则

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = z_1 z_2 - c_1 z_1^2 \tag{7}$$

再定义李亚普诺夫函数

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \quad (8)$$

其中  $\sigma_1$  为驱动子系统的滑模子函数，为

$$\sigma_1 = k_1 z_1 + z_2, k_1 > 0 \quad (9)$$

对  $V_2$  求导，则

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \sigma_1 \dot{\sigma}_1 \\ &= z_1 z_2 - c_1 z_1^2 + \sigma_1 \\ &\quad [k_1(z_2 - c_1 z_1) + f_1 + b_1 u_{Pa} + F_1 + \dot{\alpha}_1] \end{aligned} \quad (10)$$

这样，取反馈控制律

$$\begin{aligned} u_{Pa} &= b_1^{-1} [-k_1(z_2 - c_1 z_1) - f_1 - \bar{F}_1 \text{sgn}(\sigma_1) \\ &\quad - \dot{\alpha}_1 - h_1(\sigma_1 + \beta_1 \text{sgn}(\sigma_1))] \end{aligned} \quad (11)$$

其中， $h_1 > 0, \beta_1 > 0$ 。将其代入式 (10) 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + |\sigma_1| (|F_1| - \bar{F}_1) - h_1 \sigma_1^2 - h_1 \beta_1 |\sigma_1| \\ &\leq -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 - h_1 \sigma_1^2 - h_1 \beta_1 |\sigma_1| \end{aligned} \quad (12)$$

这里取

$$Q_1 = \begin{bmatrix} c_1 + h_1 k_1^2 & h_1 k_1 - \frac{1}{2} \\ h_1 k_1 - \frac{1}{2} & h_1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

则当  $|Q_1| = h_1(c_1 + k_1) - \frac{1}{4} > 0$  时，有

$$\dot{V}_2 \leq -Z_1^T Q_1 Z_1 - h_1 \beta_1 |\sigma_1| \leq 0 \quad (14)$$

其中， $Z_1 = [z_1 \ z_2]^T$ ，那么只要通过取  $h_1, c_1$  和  $k_1$  来使  $|Q_1| > 0$ ，从而保证  $Q_1$  为正定阵，则必有  $\dot{V}_2 \leq 0$ ，也就保证了驱动子系统是李亚普诺夫意义下稳定的。

类似的方法对应非驱动子系统，定义

$$\begin{cases} z_3 = x_3 - x_{3d} \\ \alpha_2 = c_2 z_3, c_2 > 0 \\ z_4 = \dot{z}_3 + \alpha_2 = x_4 + c_2 z_3 \end{cases} \quad (15)$$

其中， $\alpha_2$  是稳定项辅助方程。类似的定义李亚普诺夫函数和非驱动子系统的滑模子函数为：

$$\begin{cases} V_3 = \frac{1}{2} z_3^2 \\ V_4 = V_3 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \\ \sigma_2 = k_2 z_3 + z_4, k_2 > 0 \end{cases} \quad (16)$$

同理，得到反馈控制律

$$\begin{aligned} u_{Pu} &= b_2^{-1} [-k_2(z_4 - c_2 z_3) - f_2 - \bar{F}_2 \text{sgn}(\sigma_2) \\ &\quad - \dot{\alpha}_2 - h_2(\sigma_2 + \beta_2 \text{sgn}(\sigma_2))] \end{aligned} \quad (17)$$

然后取

$$Q_2 = \begin{bmatrix} c_2 + h_2 k_2^2 & h_2 k_2 - \frac{1}{2} \\ h_2 k_2 - \frac{1}{2} & h_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$|Q_2| = h_2(c_2 + k_2) - \frac{1}{4} \quad (19)$$

那么，只要同样地通过取  $h_2, c_2$  和  $k_2$  来保证  $Q_2$  为正定阵，则必有  $\dot{V}_4 \leq 0$ ，同样也就保证了非驱动子系统是李亚普诺夫意义下稳定的。

同时，为避免固定  $F_1, F_2$  上界带来的抖振等问题<sup>[7]</sup>，采用自适应算法对其进行进一步设计：设  $\hat{F}_1, \hat{F}_2$  为  $F_1, F_2$  的估计值，估计误差为  $\tilde{F}_1 = F_1^* - \hat{F}_1, \tilde{F}_2 = F_2^* - \hat{F}_2$ 。定义李亚普诺夫函数

$$\begin{cases} V_5 = V_2 + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{F}_1^2 \\ V_6 = V_4 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{F}_2^2 \end{cases} \quad (20)$$

其中  $\gamma_1, \gamma_2$  为正常数。

对式 (20) 求导可得：

$$\begin{cases} \dot{V}_5 = z_1 z_2 - c_1 z_1^2 - \frac{1}{\gamma_1} \tilde{F}_1 (\dot{\hat{F}}_1 - \gamma_1 \sigma_1) + \sigma_1 \\ \quad [k_1(z_2 - c_1 z_1) + f_1 + b_1 u_{Pa} + \hat{F}_1 + \dot{\alpha}_1] \\ \dot{V}_6 = z_3 z_4 - c_2 z_3^2 - \frac{1}{\gamma_2} \tilde{F}_2 (\dot{\hat{F}}_2 - \gamma_2 \sigma_2) + \sigma_2 \\ \quad [k_2(z_4 - c_2 z_3) + f_2 + b_2 u_{Pu} + \hat{F}_2 + \dot{\alpha}_2] \end{cases} \quad (21)$$

定义自适应律为

$$\dot{\hat{F}}_1 = \gamma_1 \sigma_1, \dot{\hat{F}}_2 = \gamma_2 \sigma_2 \quad (22)$$

设计相应的自适应反馈控制律为

$$\begin{cases} \hat{u}_{Pa} = b_1^{-1} [-k_1(z_2 - c_1 z_1) - f_1 - \\ \quad \hat{F}_1 - \dot{\alpha}_1 - h_1(\sigma_1 + \beta_1 \text{sgn}(\sigma_1))] \\ \hat{u}_{Pu} = b_2^{-1} [-k_2(z_4 - c_2 z_3) - f_2 - \\ \quad \hat{F}_2 - \dot{\alpha}_2 - h_2(\sigma_2 + \beta_2 \text{sgn}(\sigma_2))] \end{cases} \quad (23)$$

将式 (22) 和 (23) 代入式 (21)，且由式 (13) 和 (18) 得到

$$\begin{cases} \dot{V}_5 = -Z_1^T Q_1 Z_1 - h_1 \beta_1 |\sigma_1| \leq 0 \\ \dot{V}_6 = -Z_2^T Q_2 Z_2 - h_2 \beta_2 |\sigma_2| \leq 0 \end{cases} \quad (24)$$

其中， $Z_2 = [z_3 \ z_4]^T$ ，其仍然能够保证各子系统是李亚普诺夫稳定的。但是需要注意的是，如果总的控制输入仅仅包括各个子系统的相应控制输入，是不能保证总的系统能够在有限时间内达到滑动模总

表面的<sup>[4,15]</sup>. 因此, 为保证整个系统稳定, 定义总滑模表面函数  $\sigma$  为:

$$\sigma = \tilde{a}_1 \sigma_1 + \tilde{a}_2 \sigma_2, (\tilde{a}_1 > 0, \tilde{a}_2 > 0) \quad (25)$$

令总控制输入  $\hat{u}_{\text{total}}$  为

$$\hat{u}_{\text{total}} = \hat{u}_{\text{Pa}} + \hat{u}_{\text{Pu}} + \hat{u}_{\text{f}} \quad (26)$$

系统总的李亚普诺夫函数为

$$V_7 = V_2 + V_4 + \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{1}{2\gamma} (\tilde{F}_1^2 + \tilde{F}_2^2) \quad (27)$$

其中  $\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2)$ .

对其求导得

$$\dot{\hat{u}}_{\text{f}} = \frac{-(\tilde{a}_1 b_1 \hat{u}_{\text{Pu}} + \tilde{a}_2 b_2 \hat{u}_{\text{Pa}}) + \tilde{a}_1 \hat{F}_1 + \tilde{a}_2 h_2 (\sigma_2 + \beta_2 \text{sgn}(\sigma_2)) + \tilde{a}_2 \hat{F}_2 + \tilde{a}_1 h_1 (\sigma_1 + \beta_1 \text{sgn}(\sigma_1)) - \hat{h}\sigma - \hat{\beta} \text{sgn}(\sigma)}{(\tilde{a}_1 b_1 + \tilde{a}_2 b_2)} \quad (30)$$

这样, 对式 (27) 求导, 并将式 (23)、(24) 和 (30) 代入, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_7 = & -\mathbf{Z}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Z}_1 - h_1 \beta_1 |\sigma_1| - \mathbf{Z}_2^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{Z}_2 \\ & - h_2 \beta_2 |\sigma_2| - \hat{h}\sigma^2 - \hat{\beta} |\sigma| \leq 0 \end{aligned}$$

$$\hat{u}_{\text{total}} = \frac{\tilde{a}_1 \hat{F}_1 + \tilde{a}_1 h_1 (\sigma_1 + \beta_1 \text{sgn}(\sigma_1)) + \tilde{a}_2 \hat{F}_2 + \tilde{a}_2 h_2 (\sigma_2 + \beta_2 \text{sgn}(\sigma_2)) - \hat{h}\sigma - \hat{\beta} \text{sgn}(\sigma)}{\tilde{a}_1 b_1 + \tilde{a}_2 b_2} \quad (31)$$

#### 4 反步滑模控制器稳定性分析 (Stability analysis on backstepping sliding mode controller)

由上面的推导过程可见, 反步法实际上是一种由前向后递推的设计方法, 通过逐步迭代设计李亚普诺夫函数使系统的误差为指数渐近稳定, 最终实现系统的全局镇定. 同时, 由于渐近稳定的系统一定会到达滑模表面, 因此对各滑模面的渐近稳定性证明就能够从另一方面保证整个系统的稳定可控性<sup>[4,15]</sup>. 所以, 下面通过证明系统全部滑模表面函数的李亚普诺夫渐近稳定性来说明这一点. 这里仅给出定理 1 的证明, 其他请参考文 [7] 定理 5.2、5.3、5.4、5.5 的证明, 在此不再赘述.

**定理 1:** 二自由度水平欠驱动机械臂的自适应分层反步滑模变结构控制系统的总的滑动模表面函数及其导数属于  $L_\infty$  空间, 并且总的滑动模表面函数还属于  $L_1$  和  $L_2$  空间.

$$\begin{aligned} \dot{V}_7 = & (z_1 z_2 - c_1 z_1^2 + \sigma_1 \dot{\sigma}_1) + (z_3 z_4 - c_2 z_3^2 + \sigma_2 \dot{\sigma}_2) \\ & - \frac{1}{\gamma} \tilde{F}_1 (\dot{\hat{F}}_1 - \gamma \sigma_1) - \frac{1}{\gamma} \tilde{F}_2 (\dot{\hat{F}}_2 - \gamma \sigma_2) \\ & + \sigma [(\tilde{a}_1 b_1 \hat{u}_{\text{Pu}} + \tilde{a}_2 b_2 \hat{u}_{\text{Pa}}) + (\tilde{a}_1 b_1 + \tilde{a}_2 b_2) \hat{u}_{\text{f}} \\ & - \tilde{a}_1 h_1 (\sigma_1 + \beta_1 \text{sgn}(\sigma_1)) + \tilde{a}_1 \hat{F}_1 \\ & - \tilde{a}_2 h_2 (\sigma_2 + \beta_2 \text{sgn}(\sigma_2)) + \tilde{a}_2 \hat{F}_2] \end{aligned} \quad (28)$$

针对式 (28) 最后部分的总滑模平面部分, 取高为炳先生的第二种滑模到达律<sup>[17]</sup> 可得

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} = & (\tilde{a}_1 b_1 \hat{u}_{\text{Pu}} + \tilde{a}_2 b_2 \hat{u}_{\text{Pa}}) + (\tilde{a}_1 b_1 + \tilde{a}_2 b_2) \hat{u}_{\text{f}} - \tilde{a}_1 h_1 \\ & (\sigma_1 + \beta_1 \text{sgn}(\sigma_1)) - \tilde{a}_2 h_2 (\sigma_2 + \beta_2 \text{sgn}(\sigma_2)) \\ & + \tilde{a}_1 \hat{F}_1 + \tilde{a}_2 \hat{F}_2 \\ = & -\hat{h}\sigma - \hat{\beta} \text{sgn}(\sigma) \end{aligned} \quad (29)$$

那么, 由李亚普诺夫反馈法可得  $\hat{u}_{\text{f}}$  为

这里同样需要保证矩阵  $\mathbf{Q}_i$  均为正定, 即需要满足  $h_i(c_i + k_i) > \frac{1}{4}$ , 就一定有  $\dot{V}_7 \leq 0$ , 即系统在李亚普诺夫意义下稳定.

最后可得系统总输入为:

证明: 首先令

$$\tilde{W} = \mathbf{Z}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \mathbf{Z} + \delta_1 |\sigma_1| + \delta_2 |\sigma_2| + \hat{h}\sigma^2 + \hat{\beta} |\sigma| \quad (32)$$

式中,  $\mathbf{Z} = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T$ ,  $\delta_1 = h_1 \beta_1$ ,  $\delta_2 = h_2 \beta_2$ .

对式 (31) 两端同时积分有式 (34) 和 (35)<sup>[16]</sup>:

$$0 \leq \int_0^t \tilde{W} d\tau \leq V_7(0) \quad (33)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \tilde{W} d\tau \leq V_7(0) < \infty \quad (34)$$

因为,  $\mathbf{Z}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Z}_1$ ,  $h_1 \beta_1 |\sigma_1|$ ,  $\mathbf{Z}_2^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{Z}_2$ ,  $h_2 \beta_2 |\sigma_2|$ ,  $\hat{h}\sigma^2$ ,  $\hat{\beta} |\sigma|$  这六项均大于或等于 0, 所以由式 (34) 可得

$$\int_0^t (h_1 \beta_1 |\sigma_1|) d\tau < \infty, \int_0^t (h_2 \beta_2 |\sigma_2|) d\tau < \infty \quad (35)$$

由上式可得结论  $\sigma_1 \in L_1$ ,  $\sigma_2 \in L_1$ , 也即滑模子表面函数均是绝对可积的; 而实际上由这个结论,

本文很容易得到  $\sigma \in L_1$ ，即滑模总表面函数也为绝对可积的，这是因为有：

$$\int_0^t |\sigma| d\tau \leq \int_0^t |\tilde{a}_1 \sigma_1| d\tau + \int_0^t |\tilde{a}_2 \sigma_2| d\tau < \infty \quad (36)$$

再由式 (35) 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (\mathbf{Z}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Z}_1) d\tau < \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (\mathbf{Z}_2^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{Z}_2) d\tau < \infty \quad (37)$$

这说明系统的虚拟量  $Z_i (i = 1, 2, 3, 4)$  是有界的变量，那么由文 [4,7] 的相关证明必有

$$V_7 = V_2 + V_4 + \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{1}{2\gamma} (\tilde{F}_1^2 + \tilde{F}_2^2) < \infty \quad (38)$$

同时已知上式中  $V_2$ 、 $V_4$  有界， $\tilde{F}_1^2$ 、 $\tilde{F}_2^2$  是有界的不确定因素和扰动，所以必定有  $\sigma^2 < \infty$  和  $\int_0^t \sigma^2 d\tau < \infty$ ，也就是说  $\sigma \in L_2$  是平方可积的且  $\sigma \in L_\infty$ 。由式 (39) 和文 [7] 中相关结论可知  $\dot{\sigma} \in L_\infty$ ，得证。

**证明：**由定理 1、文 [7] 的相关证明和 Babarlat 引理 (Babarlat's lemma) 的相关结论，最终可以得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\sigma}_1 = 0$ ， $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\sigma}_2 = 0$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_1 = 0$ ， $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_2 = 0$ ，证

毕。

以上证明了系统各滑动模表面是李亚普诺夫意义下渐近稳定的，这就说明控制器能够在有限时间内驱动系统到达滑模表面，最终到达并稳定在目标位置。同时由于反步法的递阶倒推特性，该结论也就意味着有  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$ ，从而保证了系统在滑动面  $\sigma = 0$  上的稳定性，说明了控制器设计的有效性。

### 5 控制系统仿真与分析 (Control system simulation and analysis)

设定两臂的初始位置为： $\theta_{10} = 55^\circ$ ， $\theta_{20} = 15^\circ$ ；期望位置为： $\theta_{1d} = 50^\circ$ ， $\theta_{2d} = 20^\circ$ ；初始和停止的角速度均为 0。系统参数为： $m_1 = 1.5 \text{ kg}$ ， $m_2 = 1 \text{ kg}$ ， $l_1 = 1 \text{ m}$ ， $l_2 = 0.5 \text{ m}$ ， $I_i = \frac{4}{3} m_i l_i^2 (i = 1, 2)$ ， $a_1 = 3.3750$ ， $a_2 = 1.39583$ ， $a_3 = 0.25$ ， $c_1 = 47$ ， $c_2 = 1$ ， $h_1 = 6.5$ ， $h_2 = 60$ ， $\beta_1 = 1$ ， $\beta_2 = 5$ ， $k_1 = 23.6$ ， $k_2 = 7.8$ ， $F(t) = 0.05 \sin(2\pi t)$  经过遗传优化 [7] 选取的控制器参数为： $\tilde{a}_1 = 7.9270$ ， $\tilde{a}_2 = 5.2280$ ， $\hat{h} = 18.2202$ ， $\hat{\beta} = 20.0291$ ，自适应参数  $\gamma = 0.9$ 。仿真的结果见图 2~4。

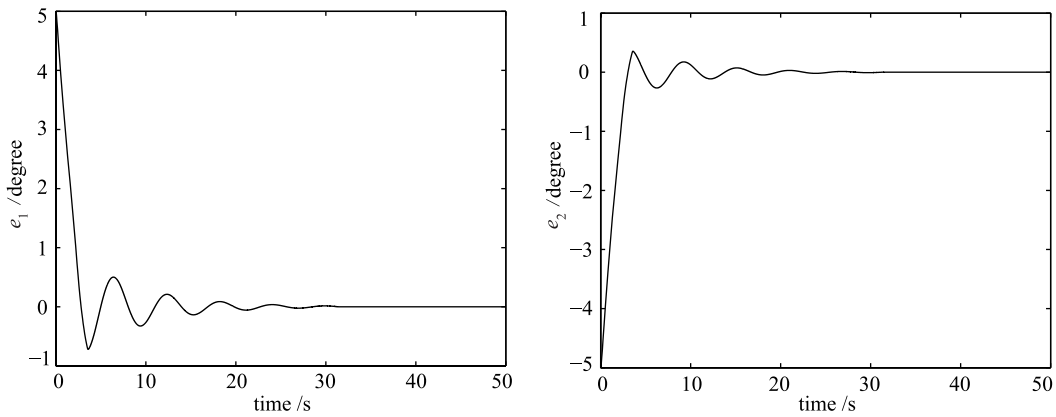


图 2 有驱动关节和非驱动关节角度误差  
Fig.2 Angle errors of actuated and underactuated joints

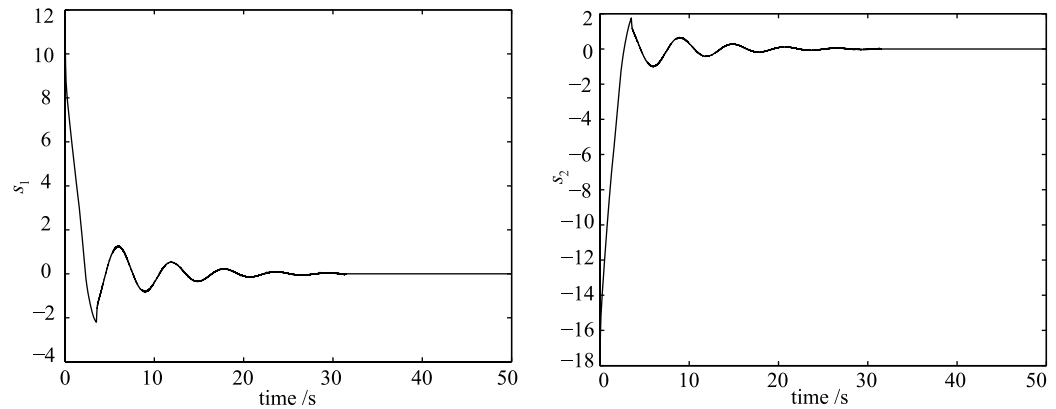


图 3 有驱动关节子系统和非驱动关节子系统滑模面函数轨迹  
Fig.3 Sliding mode surface trajectory of actuated and underactuated joint subsystems

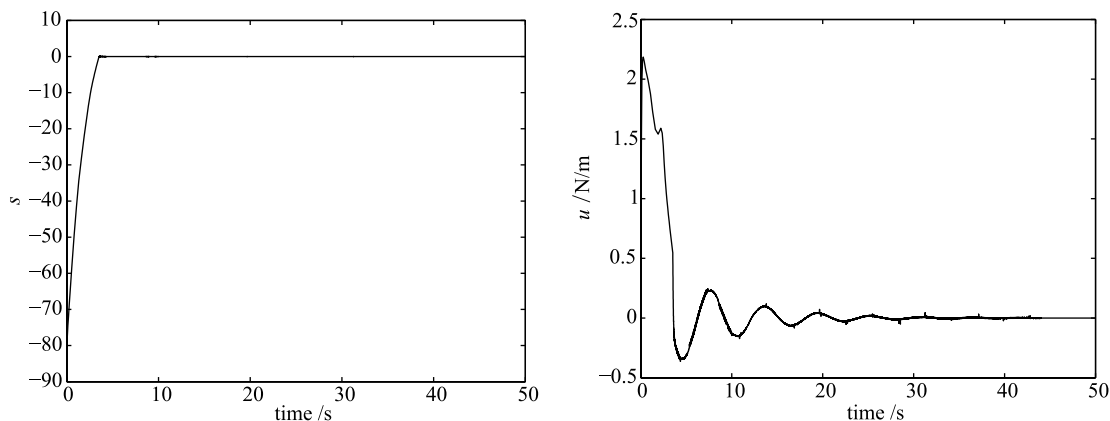


图4 系统总滑模面函数轨迹和分层反步滑模控制器输入

Fig.4 System's total sliding mode surface trajectory and hierarchical backstepping sliding mode controller inputs

在对仿真图和数据进行分析后可以看出,控制器输入能够使机械臂的两臂基本保持以同一步调到达目标位置并实现稳态,控制器输入平滑无抖动.相对于文 [15] 基于经验试凑参数的滑模控制和文 [6] 开环谐振控制的稳定时间, 25 s 左右的稳定时间大大缩短; 虽然存在干扰项, 但其对系统的控制影响很小, 基本可以忽略. 与文 [15] 的控制效果相比, 几乎不存在稳态误差且抖动明显减小, 控制精度和控制效果得到显著提高.

## 6 结论 (Conclusions)

本文以水平的二自由度欠驱动机械臂为研究对象, 完整地介绍了水平欠驱动机械臂的分层自适应反步滑模控制策略原理, 并通过仿真分析对其有效性和实用性进行了检验. 在对仿真图和实际数据进行严密的分析后, 本文认为对于水平欠驱动机械臂这一控制对象来说, 基于反步设计法的分层滑模控制策略原理是有效可行的, 并且也具有较好的控制效果和控制精度. 同时, 通过合理选择遗传操作方式及惩罚系数, 对于不同的欠驱动系统控制和相应的优化设计目标, 可以采用不同的性能指标、控制算法甚至优化策略. 因此, 该方法并不仅可以应用于本文的研究对象, 其对其他欠驱动系统的优化控制研究也有较好的参考应用价值.

## 参考文献 (References)

[1] Spong M W. Underactuated mechanical systems[A]. Control Problems in Robotics and Automation[C]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1998. 135~150.  
 [2] Spong M W. Swing up control problem for the acrobot[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1995, 15(1): 49~55.  
 [3] De Luca A, Oriolo G. Stabilization of the acrobot via iterative state steering[A]. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation[C]. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1998. 3581~3587.

[4] Wang W, Yi J, Zhao D, *et al.* Design of a stable sliding-mode controller for a class of second-order underactuated systems[J]. IEE Proceedings: Control Theory and Applications, 2004, 151(6): 683~690.  
 [5] Arai H, Tanie K, Shiroma N. Nonholonomic control of a three-DOF planar underactuated manipulator[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1998, 14(5): 681~695.  
 [6] 朱齐丹. 具有非驱动关节的机器人控制研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2002. 35~78.  
 Zhu Qi-dan. The Study of Control for Robots with Underactuated Joint[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2002: 35~78.  
 [7] 林壮. 欠驱动水平机械臂滑模变结构控制研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2007. 31~124.  
 Lin Zhuang. Sliding Mode Variable Structure Control for Underactuated Horizontal Manipulators[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2007. 31~124.  
 [8] 林壮, 朱齐丹, 邢卓异. 基于遗传优化的水平欠驱动机械臂分层滑模控制 [J]. 控制与决策, 2008, 23(1): 99~102.  
 Lin Zhuang, Zhu Qi-dan, Xing Zhuo-yi. Hierarchical sliding mode control for horizontal underactuated manipulators with optimization based on GA[J]. Control and Decision, 2008, 23(1): 99~102.  
 [9] 程代展, 洪奕光, 秦化淑. 多输入非线性系统后推 (Backstepping) 型 [J]. 控制理论与应用, 1998, 15(6): 824~830.  
 Cheng Dai-zhan, Hong Yi-guang, Qin Hua-shu. Backstepping forms of multi-input nonlinear systems[J]. Control Theory and Applications, 1998, 15(6): 824~830.  
 [10] 宫琪, 田玉平. 非线性交叉严格反馈系统的一种构造性设计方法 [J]. 自动化学报, 2000, 26(4): 447~453.  
 Gong Qi, Tian Yu-ping. A constructive design method for nonlinear cross strict feedback systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2000, 26(4): 447~453.  
 [11] Sun Z, Ge S S, Lee T H. Nonregular backstepping design of underactuated mechanical systems[A]. Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications[C]. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2001. 173~178.

- Zhong Yi-wen, Cai Rong-ying. Discrete particle swarm optimization algorithm for QAP[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(8): 871~874.
- [9] 钟一文, 杨建刚, 宁正元. 求解 TSP 问题的离散粒子群优化算法[J]. *系统工程理论与实践*, 2006, 26(6): 88~94.
- Zhong Yi-wen, Yang Jian-gang, Ning Zheng-yuan. Discrete particle swarm optimization algorithm for TSP problem[J]. *Systems Engineering - Theory and Practice*, 2006, 26(6): 88~94.
- [10] 钟一文, 宁正元, 蔡荣英, 等. 一种改进的离散粒子群优化算法[J]. *小型微型计算机系统*, 2006, 27(10): 1893~1896.
- Zhong Yi-wen, Ning Zheng-yuan, Cai Rong-ying, *et al.* An improved discrete particle swarm optimization algorithm[J]. *Micro Systems*, 2006, 27(10): 1893~1896.
- [11] 张铃, 张钊. 佳点集遗传算法[J]. *计算机学报*, 2001, 24(9): 917~922.
- Zhang Ling, Zhang Bo. Good point set based genetic algorithm[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2001, 24(9): 917~922.
- [12] Shi X H, Liang Y C, Lee H P, *et al.* Particle swarm optimization-based algorithms for TSP and generalized TSP[J]. *Information Processing Letters*, 2007, 103(5): 169~176.
- [13] 华罗庚, 王元. 数论在近似分析中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1978. 83~85.
- Hua Luo-geng, Wang Yuan. *Application of Number Theory to Approximate Analysis*[M]. Beijing: Science Press, 1978. 83~85.
- [14] Jiang M, Luo Y P, Yang S Y. Stochastic convergence analysis and parameter selection of the standard particle swarm optimization algorithm[J]. *Information Processing Letters*, 2007, 102(1): 8~16.
- [15] Liang Y, Zhou C, Wang Z, *et al.* An equivalent genetic algorithm based on extended strings and its convergence analysis[J]. *Information Sciences*, 2001, 138(1-4): 119~135.
- [16] Georg S. MP-TESTDATA - The TSPLIB symmetric traveling salesman problem instances[EB/OL]. <http://elib.zib.de/pub/mp-testdata/tsp/tsplib/tsp/index.html>, 1995/2008.

#### 作者简介:

余伶俐(1983-), 女, 博士生, 助教. 研究领域: 智能优化算法, 机器人任务规划, 机器人仿生硬件.

蔡自兴(1938-), 男, 教授, 博士生导师. 研究领域: 机器人导航, 人工智能.

(上接第 136 页)

- [12] Seto D, Annaswamy A M, Baillieul J. Adaptive control of nonlinear systems with a triangular structure[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(7): 1411~1428.
- [13] Seto D, Baillieul J. Control problems in super-articulated mechanical systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2442~2453.
- [14] Huang A C, Chen Y C. Adaptive sliding control for single-link flexible-joint robot with mismatched uncertainties[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2004, 12(5): 770~775.
- [15] 林壮. 欠驱动水平机械臂的分层滑模变结构控制[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2006. 31~44.
- Lin Zhuang. Hierarchical Variable Structure Sliding Mode Control for Robots with Underactuated Joints[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2006. 31~44.
- [16] 吴玉香. 滑模控制理论及在移动机械臂中的应用[D]. 广州: 华南理工大学, 2006. 45~54.
- Wu Yu-xiang. *Sliding Mode Control Theory and Its Application in Mobile Manipulators*[D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2006. 45~54.
- [17] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- Gao Wei-bing. *Variable Structure Control: Theory and Applications*[M]. Beijing: Science Press, 1998.

#### 作者简介:

林 壮(1978-), 男, 博士后. 研究领域: 非线性控制, 欠驱动系统.

段广仁(1962-), 男, 长江学者, 教授, 博士生导师. 研究领域: 非线性控制, 鲁棒控制.