

# 基于分布式控制的多个体系统的循环追踪控制

张世杰,段广仁

(哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术研究中心, 哈尔滨 150001)

**摘要:**给出了多个体系统在循环追踪控制率下在达到平衡状态时关于个体运动轨迹的2个结果。针对线性和非线性多个体系统分别进行了讨论,指出在稳定的线性多个体系统的情况下,如果初始位置的摆放保持一定的形状,每个个体将按照一定的轨迹收敛到平衡点;在稳定的非线性多个体系统中,每个个体到达平衡状态之后的运动轨迹也将保持一定的性质。最后通过仿真验证了本文的结果。

**关键词:**自动控制技术;多个体系统;协调控制;分布式控制;循环追踪

**中图分类号:**TP273;V249.121 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5497(2010)02-0506-05

## Distributed control for multi-agent system using cyclic pursuit

ZHANG Shi-jie, DUAN Guang-ren

(Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** Two results about the behaviour of a group of agents in multi-agent systems using cyclic pursuit are provided. Linear cyclic pursuit law and nonlinear pursuit law are discussed respectively. Under stable linear pursuit law, if the arrangement of the initial positions of all agents is in a specified formation, then each agent will converge to an equilibrium point following a certain track and all agents will remain the same formation. Under stable nonlinear pursuit law, all the agents will remain a specified property when they reach the equilibrium state. Simulation experiments verify the results.

**Key words:** automatic control technology; multi-agent systems; cooperative control; distributed control; cyclic pursuit

多个体系统是由  $n$  个自治的并且能够移动的个体组成,每个个体可以是飞行器、卫星、机器人等,可以应用到搜寻任务、空间和海洋探测、以及多个机器人之间协调完成某项任务等方面。在多个体系统中,每个个体只需要知道自己周围个体的信息,而不需要知道每个个体的信息就可以得到期望的整体的要求。这样的要求可以是稳定性要求、某种期望达到的队形,或者是鲁棒性等方面

的要求。换句话说,在多个体系统中,可以用局部的控制率来达到全局的性能要求,而不需要用整个体的控制率。实际上,针对多个体系统设计全局的控制率是不现实的。而在局部控制中,循环追踪控制是一种比较简单并且易于实现的控制率。它也是一种分布式的控制率。本文用点来表示个体,讨论的多个体系统是由已经标好顺序(从 1 到  $n$ )的  $n$  个点  $p_1, \dots, p_n$  在平面上做运动的情

**收稿日期:**2008-05-06.

**基金项目:**国家自然科学基金项目(60710002);长江学者创新团队发展计划项目.

**作者简介:**张世杰(1984-),男,博士研究生.研究方向:非线性控制,协调控制. E-mail:n920@sohu.com

**通信作者:**段广仁(1962-),男,教授,博士生导师.研究方向:鲁棒控制,飞行器制导与控制.

E-mail:g. r. duan@hit. edu. cn

况。平面上的每个点不需要知道自己的序号。循环追踪控制是让  $p_i$  追踪它前一个点  $p_{i+1}$ , 对于  $i = 1, \dots, n-1$ , 让  $p_n$  追踪  $p_1$ 。

循环追踪控制的思想实际上是从生物学的角度得来的,例如蚁群、飞行中的鸟群等。文献[1]建立了蚁群和其他群体的连续的和离散的追踪控制模型,并且讨论了在追踪控制率下群体的整体行为。文献[2-4]讨论了线性模型下的循环追踪控制问题,指出了稳定的多个体系统在循环追踪控制下系统的每个个体将收敛到平衡点,又进一步指出如果初始位置已知,则可以确定平衡点的位置,并给出了系统全局稳定的条件和不稳定的条件。文献[5-8]讨论了非线性模型下的循环追踪控制问题,从图论的角度出发研究了这一问题,并给出了稳定性条件。

在本文所考虑的多个体系统中,已经提前假设这些系统是稳定的。分别考虑线性和非线性 2 种情况,在模型是线性的情况下,把文献[3]中的一个结果推广到控制器增益不确定的情况;在模型是非线性的情况下,当系统达到平衡状态时,每个个体将围绕一个圆心固定、半径相同的圆做周期运动。最后,本文通过仿真验证了结果的正确性。

### 1 数学模型

在本节中,分别建立线性和非线性的循环追踪控制率下的模型,首先给出线性的模型。

如前所述,假设有  $n$  个点  $p_1, \dots, p_n$  在一个平面上按照循环追踪的控制率运动。用  $p_i(t)$   $z_i(t)$  表示在  $t \geq 0$  时刻点  $p_i$  的位置,其中  $p_i(t) = [x_i(t), y_i(t)]^T \in \mathbf{R}^2, i = 1, \dots, n$ 。假设初始位置任意,那么每个点的运动学方程可以表示为

$$\dot{p}_i = u_i = k_i(p_{i+1} - p_i), i = 1, \dots, n \quad (1)$$

式中:  $u_i$  为控制输入;  $k_i$  为  $p_i$  的控制器增益。

方便起见,式(1)中用  $p_i$  表示  $p_i(t)$ , 用  $u_i$  表示  $u_i(t)$ 。本文后面的表示方式与这里相同。

在文献[3]中,所有的控制器增益  $k_i = 1$ , 本文考虑的  $k_i > 0$ , 即  $k_i$  可以取不同值。把式(1)写成向量形式

$$\dot{p} = Ap \quad (2)$$

式中:  $p = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ ;

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -k_{n-1} & k_{n-1} \\ k_n & 0 & \dots & 0 & -k_n \end{pmatrix}$$

$A$  是一个循环矩阵。

式(2)为多个体系统在循环追踪控制下的线性模型。在这个模型中,所有的点  $p_i$  是没有初始速度的。然而,还有一类多个体系统,在初始时刻  $t = 0$  时每一个点  $p_i$  有一个初始速度,在  $t > 0$  时仍然在循环追踪控制作用下运动。下面给出这样的多个体系统的运动学方程。

首先给出状态模型

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i + \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中:  $v_i$  为点  $p_i$  在某一时刻的速度;  $\theta_i \in \mathbf{R}$  为  $v_i$  相对于  $x$  轴方向的夹角; 令  $u_i = [v_i, \omega_i]^T$  为控制输入。

令  $r_i$  表示点  $p_i$  和点  $p_{i+1}$  之间的距离,  $\alpha_i$  表示从  $v_i$  方向到向量  $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$  的夹角,  $\beta_i$  表示  $v_i$  和  $v_{i+1}$  之间的夹角的补角,如图 1 所示。

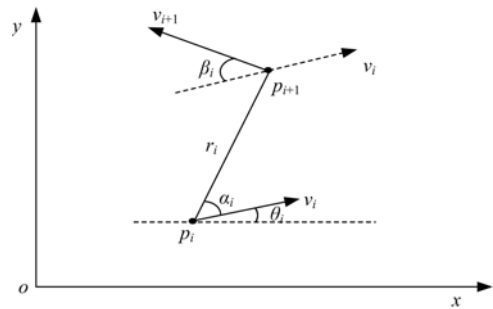


图 1 多个体系统中两点间的关系

Fig. 1 Illustration for two points in multi-agent systems

把式(3)写成关于  $r_i, \alpha_i$  和  $\beta_i$  的运动学方程

$$\begin{cases} \dot{r}_i = -v_{i+1} \cos(\alpha_i + \beta_i) - v_i \cos(\alpha_i + \beta_i) \\ r_i \dot{\alpha}_i = v_{i+1} \sin(\alpha_i + \beta_i) + v_i \sin \alpha_i - \omega_i r_i \\ \dot{\beta}_i = \omega_i - \omega_{i+1} \end{cases} \quad (4)$$

在本文中,假设在平面上运动的所有点有一个相同的速率,即  $v_i = s$ ,  $s$  是一个大于零的常数。另外,控制输入  $\omega_i = k_i \alpha_i$ 。那么,式(4)可以简化为

$$\begin{cases} \dot{r}_i = -s[\cos(\alpha_i + \beta_i) + \cos(\alpha_i + \beta_i)] \\ r_i \dot{\alpha}_i = s[\sin(\alpha_i + \beta_i) + \sin \alpha_i] - k_i \alpha_i r_i \\ \dot{\beta}_i = k_i(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \end{cases} \quad (5)$$

综上,本文给出了在循环追踪控制作用下的线性模型(2)和非线性模型(5),本文下面的所有讨论,都是基于这2个模型进行的。

## 2 主要结果

本节中将给出本文的2个结果。在此之前,为定理的证明给出一些预备知识,首先引用文献[7]中的一个引理。

**引理1** 假设  $p_0, p_1, p_2$  是平面上的3个点,如图2所示。记  $\alpha$  为向量  $\overrightarrow{p_0 p_1}$  与向量  $\overrightarrow{p_0 p_2}$  的夹

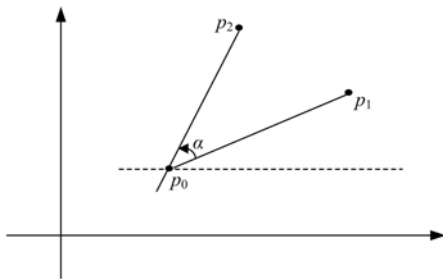


图2 平面三点示意图

Fig.2 Illustration for three points in a plane

角,  $r_1 = |p_1 - p_0|, r_2 = |p_2 - p_0|$ , 并且记  $F = \text{Im} \{ \overline{(p_1 - p_0)}(p_2 - p_0) \}$ , 那么可以得到下述结论:

- (1)  $0 < \alpha < \pi, r_1 > 0$ , 并且  $r_2 > 0$  成立的充分必要条件是  $F > 0$ 。
- (2)  $\pi < \alpha < 2\pi, r_1 > 0$ , 并且  $r_2 > 0$  成立的充分必要条件是  $F > 0$ 。
- (3) 平面上三点共线的充分必要条件是  $F = 0$ 。

上述引理的证明可以参考文献[7],下面给出本文的第一个结果。

**定理1** 在线性循环追踪控制下的模型(2)中,初始时刻如果平面上  $n$  个点  $p_1, \dots, p_n$  以逆时针或者顺时针摆放,那么在那些点收敛到平衡点的整个运动过程中,它们都将保持逆时针或者顺时针队形。

**证明** 只考虑逆时针摆放时的情形,顺时针情形时可以类似证明。

由于所考虑的系统已经假设是稳定的,所以平面上的  $n$  个点  $p_1, \dots, p_n$  将收敛到平衡点,并且

如果初始位置已知的情况下,这个平衡点是固定的,并可以由初始位置和控制增益  $k_i$  来确定。假设这个平衡点的位置是  $p_0$ 。由引理1,考虑下面2个函数

$$F_i(t) = \text{Im} \{ \overline{(p_i(t) - p_0)}(p_{i+1}(t) - p_0) \}$$

$$F_n(t) = \text{Im} \{ \overline{(p_n(t) - p_0)}(p_1(t) - p_0) \}$$

式中:  $i = 1, \dots, n-1$ 。

在初始时刻,  $p_1, \dots, p_n$  按逆时针摆放,则有  $F_i(0) > 0$ , 对于  $i = 1, \dots, n$ 。下面只需证明  $F_i(t) > 0$ , 对于  $t > 0$ 。注意到  $F_i(t)$  是关于时间  $t$  的函数,则有

$$\dot{F}_i(t) = \text{Im} \{ \overline{\dot{p}_i(t)}(p_{i+1}(t) - p_0) \} +$$

$$\text{Im} \{ \overline{(p_i(t) - p_0)} \dot{p}_{i+1}(t) \} =$$

$$\text{Im} \{ k_i \overline{(p_{i+1}(t) - p_i)}(p_{i+1}(t) - p_0) \} +$$

$$\text{Im} \{ \overline{(p_i(t) - p_0)} k_{i+1} (p_{i+2}(t) - p_{i+1}) \} =$$

$$-(k_i + k_{i+1}) F_i(t) +$$

$$k_{i+1} \text{Im} \{ \overline{(p_i(t) - p_0)}(p_{i+2}(t) - p_0) \} =$$

$$-(k_i + k_{i+1}) F_i(t) + k_{i+1} F_i(t) F_{i+1}(t)$$

$$\dot{F}_n(t) = -(k_n + k_1) F_n(t) + k_1 F_n(t) F_1(t)$$

式中:  $k_i > 0, i = 1, \dots, n-1$ 。

注意到  $F_i(t) F_{i+1}(t) > 0$ , 否则,如果它小于或者等于零,则平面上所有点将都会在它们平衡点的一侧,这是不可能的。同样可以知道,  $F_n(t) F_1(t) > 0$ , 则有

$$\dot{F}_i(t) = -(k_i + k_{i+1}) F_i(t) + k_{i+1} F_i(t) F_{i+1}(t) > - (k_i + k_{i+1}) F_i(t)$$

$$\dot{F}_n(t) = -(k_n + k_1) F_n(t) + k_1 F_n(t) F_1(t) > - (k_n + k_1) F_n(t)$$

那么,可以得到

$$F_i(t) > \exp(-(k_i + k_{i+1})t) F_i(0)$$

$$F_n(t) > \exp(-(k_n + k_1)t) F_n(0)$$

在  $t = 0$  时刻,所有点按逆时针方向摆放,从而  $F_i(0) > 0, i = 1, \dots, n$ 。最终得到  $F_i(t) > 0$ , 对于  $t > 0$ 。

下面给出本文的第二个结果。

**定理2** 在循环追踪控制作用下的非线性模型(5)中,如果系统最终达到平衡状态,那么多个体系统中的每一个点将在一个圆心固定、半径相同的圆上周期运动。

**证明** 由文献[5]中系统达到平衡状态的条件可知,多个体系统的每个点到达平衡状态时,  $\dot{r}_i = 0, \dot{\alpha}_i = 0, i = 1, \dots, n$ 。从而可得  $\alpha_i$  是一个常

数,那么可得

$$\dot{\theta} = \omega_i = k_i \alpha_i = C$$

式中:  $C$  是一个常数。

也就是说,点  $p_i$  有一个不变的横向加速度,又因为点  $p_i$  的速率是不变的,所以  $p_i$  将在一个圆上运动。假设圆心是  $O$ ,半径  $d_i = |Op_i|$ 。下面证明不同点之间的角速度也相等。由  $\dot{r}_i = 0$  可知,  $r_i$  是不变的。考虑在  $\triangle Op_i p_{i+1}$  中,因为  $\angle Op_i p_{i+1} = \pi/2 - \alpha_i$  是不变的,所以  $\triangle Op_i p_{i+1}$  是固定的,那么  $p_i$  和  $p_{i+1}$  只能以相同的角速度运动,又因为它们的速率也是相同的,因而  $p_i$  和  $p_{i+1}$  只能在一个相同的圆上运动。

用上述 2 个定理对线性和非线性两种情况进行分析,得到多个体系统在稳定条件下个体运动的性质。

### 3 仿真算例

首先给出在线性循环追踪控制下的仿真,选取 5 个点,记为  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ 。假设初始时刻这 5 个点在坐标平面的位置分别是  $p_1 = 1 + j$ ,  $p_2 = 5 + 2j$ ,  $p_3 = 6 + 3j$ ,  $p_4 = 4 + 4j$ ,  $p_5 = 2 + 3j$ 。控制器增益  $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3, k_4 = 4, k_5 = 5$ 。仿真结果如图 3 所示。从图中可以看出,选取的 5 个点最终将按照预先摆放的队形收敛到平衡点。

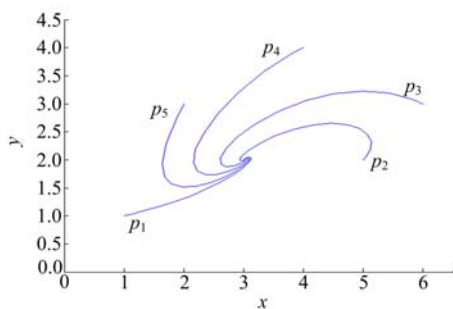
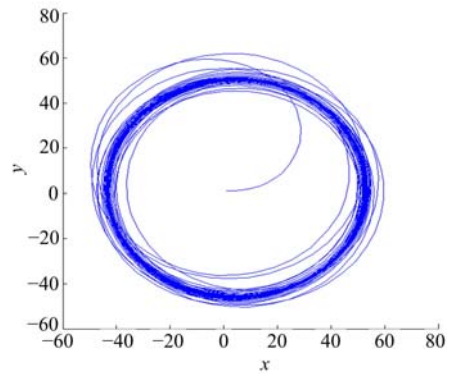


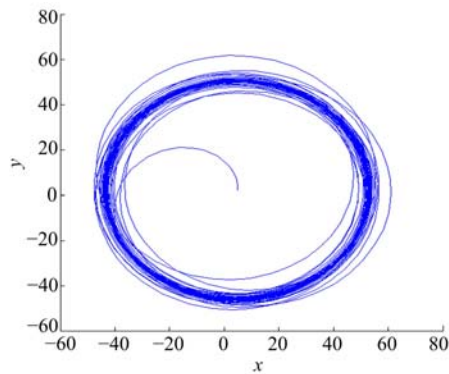
图 3 线性情形下 5 个点的运动轨迹

Fig. 3 Trajectory of all the five points under linear cyclic pursuit

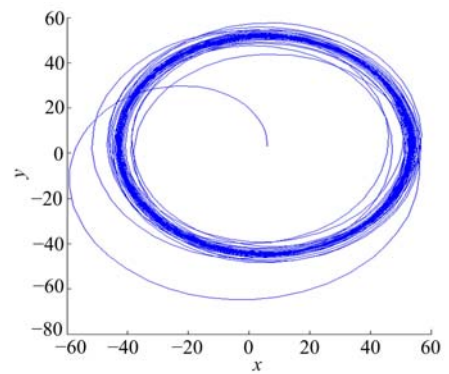
下面考虑非线性情形下的循环追踪控制,选取与线性情形下一样的 5 个点,并假设  $p_1$  的初始速度  $v_1$  与  $x$  轴的夹角为零,  $p_2$  和  $p_3$  的初始速度  $v_2$  与  $x$  轴的夹角为  $\pi/2$ ,  $p_4$  的初始速度与  $x$  轴的夹角为  $\pi$ ,  $p_5$  的初始速度与  $x$  轴的夹角为  $3\pi/2$ , 进一步假设  $v_i = 5, i = 1, \dots, 5$ 。控制器增益  $k_i = 0.1, i = 1, \dots, 5$ 。图 4 给出了 5 个点的运动



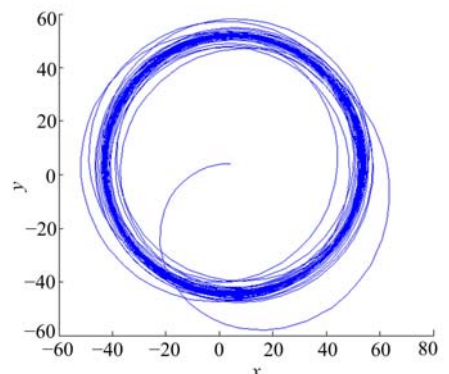
(a) 第 1 个点的轨迹



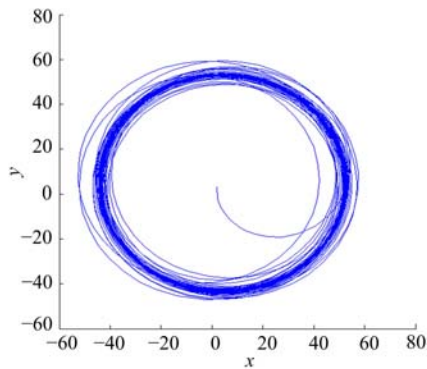
(b) 第 2 个点的轨迹



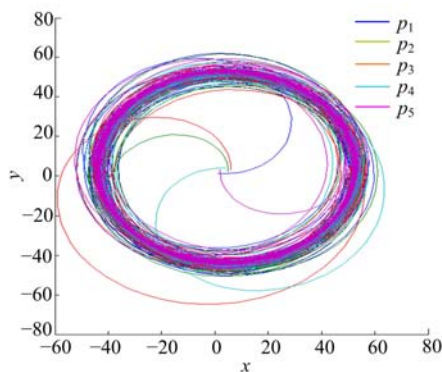
(c) 第 3 个点的轨迹



(d) 第 4 个点的轨迹



(e) 第 5 个点的轨迹



(f) 全部 5 个点的轨迹

图 4 非线性情形下 5 个点的轨迹

Fig. 4 Trajectory of five point under nonlinear cyclic pursuit

轨迹。从仿真结果可以看出,所有 5 个点最终将在一个共同的圆上运动。

### 4 结束语

本文对多个体系统在线性和非线性情形下的循环追踪控制问题进行了讨论。线性模型下,在文献[3]的基础上得到第一个关于稳定条件下多个体系统个体运动轨迹的结果。与文献[3]的结果相比较,本文的结果能够应用于更大的范围。另外,本文还分析了非线性模型下多个体系统个

体运动轨迹的情况。仿真算例验证了本文结果的正确性。本文的结果对进一步研究避免多个体系统的碰撞问题具有重要意义。

### 参考文献:

[ 1 ] Reynolds C. Flocks, birds, and schools: a distributed behavioral model[J]. Computer, 1987, 21: 25-34.

[ 2 ] Sinha A, Ghose D. Some generalization of linear cyclic pursuit[C]// Proceedings of IEEE India Annual Conference 2004, Kharagpur, India, 2004.

[ 3 ] Lin Z, Broucke M E, Francis B A. Local control strategies for groups of mobile autonomous agents [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2004, 49(4): 622-629.

[ 4 ] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2003, 48(1): 988-1001.

[ 5 ] Marshall J A, Broucke M E, Francis B A. Formation of vehicles in cyclic pursuit[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2004, 49 (11): 1963-1974.

[ 6 ] Marshall J A, Broucke M E, Francis B A. Unicycles in cyclic pursuit[C]// Proceedings of the 2004 American Control Conference, Boston, Massachusetts, 2004.

[ 7 ] Lin Z, Broucke M E, Francis B A. Local control strategies for groups of mobile autonomous agents [DB/OL]. [2008-03-12]. <http://www.control.utoronto.ca/people/profs/francis/publications.html>.

[ 8 ] Marshall J, Broucke M, Francis B A. A pursuit strategy for wheeled-vehicle formations[C]// Proceedings of IEEE Conference on Decision Control, Maui, HI, 2003.