文章编号：0253-374X(2010)01-0054-04　　DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2010.01.010

小周期复合材料弹性结构的混合有限元计算

郝　颖[1]，宋士仓[2]

(1.同济大学 航空航天与力学学院，上海 200092；2.郑州大学 数学系，河南 郑州 450052)

摘要：在多尺度渐近展开式的基础上，讨论小周期复合材料弹性结构均匀化方程的各向异性混合元，给出了关于位移向量的L^2-模和应变张量的$H(\mathrm{div})$-模的误差估计.这种单元具有各向异性特征，解除了正则性条件的束缚，有较好的实用性.最后的数值结果验证了理论的正确性.

关键词：弹性结构；均匀化方程；各向异性；混合有限元

中图分类号：O 242.21　　**文献标识码**：A

Mixed Finite Element Method for Elastic Problems of Composite Materials with Small Period

HAO Ying[1], *SONG Shicang*[2]

(1. College of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052, China)

Abstract: Based on the multi-scale asymptotic expansion, a mixed finite element method is discussed on anisotropic meshes. The method involves homogenization theory in small periodic elastic structure of composite materials. The error estimates in L^2-norm for displacement vector and H(div)-norm for strain tensor are derived. Relieving regularity assumption, this element is more practical. Finally, the numerical results validate the theoretical analysis.

Key words: elastic problems; homogenized equations; anisotropic; mixed finite element

周期复合材料的弹性力学问题，在数学上表现为如下的椭圆形方程的边值问题：

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\boldsymbol{A}_{pk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial \boldsymbol{u}_\varepsilon(x)}{\partial x_k}\right) = \boldsymbol{f}(x) \quad & \Omega \\ \boldsymbol{u}_\varepsilon(x) = 0 \quad & \partial\Omega \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{A}_{pk}(x/\varepsilon)$是$n\times n$矩阵族，令$\xi=x/\varepsilon$，其元素$a_{pk,ij}(\xi)$关于$\xi$是以1为周期的；$\boldsymbol{u}_\varepsilon(x)=(u_{\varepsilon,1}(x),u_{\varepsilon,2}(x),\cdots,u_{\varepsilon,n}(x))^{\mathrm{T}}$是位移列向量；$\boldsymbol{f}(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))^{\mathrm{T}}$是体积力列向量.由于复合材料的材料特征剧烈震荡，当$0<\varepsilon<1$非常小时，$\boldsymbol{A}_{pk}(x/\varepsilon)$中的元素变化非常频繁，在计算它的位移场、应力、应变场时，传统的有限元方法因网格生成的困难和计算量太大而难以实现. Oleinik O A等人用均匀化方法，研究了复合材料弹性结构问题[1].该方法能够有效地描述复合材料弹性结构的材料常数和刚度性质，但是不能准确刻画应力和应变场的局部变化.后来，曹礼群、崔俊芝、宋士仓、刘晓奇等人分别得到了整周期2阶椭圆问题、热传导问题的完全多尺度展开式以及高精度算法[2-5].他们的理论和数值结果表明：多尺度渐近分析对于解决周期复合材料的问题是十分有效的.

针对问题(1)，崔俊芝在文献[2]提出问题的解向量，可以用双尺度表现为

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon(x) = \boldsymbol{u}_0(x) + \sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l \sum_{|\alpha|=l} N_\alpha(\xi) D^\alpha \boldsymbol{u}_0(x) \tag{2}$$

式中，$N_\alpha(\xi)$，$\boldsymbol{u}_0(x)$分别为辅助周期问题和均匀化问题的解.

记$\boldsymbol{u}_{s,\varepsilon}(x)=\boldsymbol{u}_0(x)+\sum_{l=1}^{s}\varepsilon^l\sum_{|\alpha|=l}N_\alpha(\xi)D^\alpha\boldsymbol{u}_0(x)$，则有

$$\|\boldsymbol{u}_\varepsilon(x)-\boldsymbol{u}_{s,\varepsilon}(x)\|_h \leqslant C\varepsilon^{s-1}\|\boldsymbol{u}_0\|_{s+2,\Omega} \tag{3}$$

当$s=2$时，即可满足工程计算的需要.此时，如果先用有限元方法求出$\boldsymbol{u}_0(x)$，再用差分方法求出

收稿日期：2008-09-26
基金项目：国家自然科学基金重点资助项目(90405016)；国家自然科学基金重大资助项目(10590353)；国家自然科学基金资助项目(10771198)
作者简介：郝　颖(1979—)，女，博士生，主要研究方向为复合材料空间曲梁的动力学问题、力学问题的有限元方法.
E-mail:haohao517112@tom.com

$\nabla \boldsymbol{u}_0(x)$,势必会降低$\nabla \boldsymbol{u}_0(x)$的精度,进而影响$\nabla \cdot \nabla \boldsymbol{u}_0(x)$及式(2)的精度.为了提高精度,笔者构造了一种新的混合元格式来讨论该问题,把解放在相匹配的两个空间中,同时求解$\boldsymbol{u}_0(x)$和$\nabla \boldsymbol{u}_0(x)$,在保证$\boldsymbol{u}_0(x)$有一定精度的同时,尽量提高$\nabla \boldsymbol{u}_0(x)$的逼近阶.目前,尚未见到用混合元来讨论小周期复合材料弹性问题的文章.最后给出的数值结果,验证了理论分析的正确性,表明传统有限元分析中所依赖的前提条件(剖分满足的正则性假设)是不必要的[6].

1　单元构造

设 J_h 为 Ω 的矩形剖分族,一般单元记作 K,中心点为(x_K, y_K),x,y 方向的边长分别记为$2h_x$,$2h_y$,剖分不一定满足正则性条件.再记 $h = \max\limits_{K \in J_h} \max\{h_x, h_y\}$.参考元记为 $\hat{K} = [-1,1] \times [-1,1]$;4 顶点坐标依次为:$\hat{a}_1(-1,-1)$,$\hat{a}_2(1,-1)$,$\hat{a}_3(1,1)$,$\hat{a}_4(-1,1)$;4 边记为:$\hat{l}_i = \hat{a}_i\hat{a}_{i+1}(\hat{a}_5 = \hat{a}_1)$,$i=1,2,3,4$.

定义

$$Q_2^-(\hat{K}) = \mathrm{span}\{1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi^2\eta, \xi\eta^2\} \tag{4}$$

引理 1[4]　$\forall\, \hat{v} \in H^2(\hat{K})$,存在唯一的 $\hat{I}\hat{v} \in Q_2^-(\hat{K})$,使得对 $i=1,2,3,4$,有

$$\hat{I}\hat{v}(\hat{a}_i) = \hat{v}(\hat{a}_i)$$
$$\frac{1}{|\hat{l}_i|}\int_{\hat{l}_i} \hat{I}\hat{v}\,\mathrm{d}\hat{s} = \frac{1}{|\hat{l}_i|}\int_{\hat{l}_i} \hat{v}\,\mathrm{d}\hat{s}$$

其中,$|\hat{l}_i|$表示$\hat{l}_i$ 的长度.

引理 2[6]　Q_2^- 确定的插值 $\hat{I}$ 满足各项异性插值特征,即多重指标$|\beta| = 1$,存在常数 C,使得对$\forall\, \hat{v} \in H^2(\hat{K})$,有

$$|\hat{D}^\beta(\hat{v} - \hat{I}\hat{v})|_{0,\hat{K}} \leqslant C|\hat{D}^\beta \hat{v}|_{1,\hat{K}}$$

这里及以后出现的 C 均表示一个与 h 及 h_K/ρ_K 无关的常数,不同的地方可以取不同的值.

参考单元到一般单元的变换记为 $F_K: \hat{K} \to K$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + h_x\xi \\ y &= y_0 + h_y\eta \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

定义空间

$$H = \{\boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{\phi})_{ij} = (\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2)^{\mathrm{T}} \in L^2(\Omega)_{2\times2},\ \mathrm{div}\boldsymbol{\phi} \in L^2(\Omega)_2\}$$

$$M = \{\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}} \in L^2(\Omega)_2, \boldsymbol{v}\big|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$H_h = \{\boldsymbol{\phi}_h = (\phi_h)_{ij}$ 在单元顶点连续,边平均值跨越单元间连续$(\phi_h)_{ij}\big|_K \circ F_K^{-1} \in Q_2^- \times Q_2^-\}$.

$$M_h = \{\boldsymbol{v}_h = (v_{h_1}, v_{h_2})^{\mathrm{T}}\big|_K \in P_0(K)^2\}$$

由 $H_h \subset C_0(\Omega)_{2\times2}$,并且在每一个单元上属于$H^1(K)^{2\times2}$,从而 $H_h \subset H$.显然,又有 $M_h \subset M$.所以,H_h,M_h 对于 2 阶问题来说是协调元空间.

定义范数

$$\|\boldsymbol{\phi}\|_H^2 = \sum_{i,j=1}^{2}\|\phi_{ij}\|_0^2 + \|\mathrm{div}\boldsymbol{\phi}_1\|_0^2 + \|\mathrm{div}\boldsymbol{\phi}_2\|_0^2$$

定义插值算子

$$I_h: H^2(\Omega)_{2\times2} \to H_h:$$
$$I_h\big|_K = I_K,\quad I_K\boldsymbol{\varphi} = (\hat{I}\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \circ F_K^{-1}$$

2　混合变分形式及误差估计

考虑二维情况,并把小周期复合材料的弹性问题的均匀化方程[2]简记为

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\boldsymbol{A}_{pk}\frac{\partial \boldsymbol{u}(x)}{\partial x_k}\right) &= \boldsymbol{f}(x) \quad \Omega \\ \boldsymbol{u}(x) &= 0 \quad \partial\Omega \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

已知均匀化方程(6)为线弹性系统,引入

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{A}_{pk}\nabla \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1k}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_k} \\ \boldsymbol{A}_{2k}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \boldsymbol{A}_{12}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_2} \\ \boldsymbol{A}_{21}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \boldsymbol{A}_{22}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

则方程(6)变为

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}(\boldsymbol{\varphi}) &= \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{\varphi} &= \boldsymbol{A}_{pk}\nabla \boldsymbol{u} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$,定义 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}$,仍为 2×2的矩阵族,且满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22} \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$$

其中：$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$为单位矩阵；$\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$为零矩阵.

在式(8)第二式的两端，同时乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\phi}$，$\forall\boldsymbol{\phi}\in H$，有

$$\boldsymbol{\varphi A}_{-1}\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{A}\ \nabla\boldsymbol{u}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\phi}=$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_1}+\boldsymbol{A}_{12}\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_2}\\ \boldsymbol{A}_{21}\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_1}+\boldsymbol{A}_{22}\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{\phi}_1+\boldsymbol{B}_{12}\boldsymbol{\phi}_2\\ \boldsymbol{B}_{21}\boldsymbol{\phi}_1+\boldsymbol{B}_{22}\boldsymbol{\phi}_2\end{pmatrix}=$$

$$\left(\boldsymbol{A}_{11}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_1}+\boldsymbol{A}_{12}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_2}\right)(\boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{\phi}_1+\boldsymbol{B}_{12}\boldsymbol{\phi}_2)+$$

$$\left(\boldsymbol{A}_{21}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_1}+\boldsymbol{A}_{22}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_2}\right)(\boldsymbol{B}_{21}\boldsymbol{\phi}_1+\boldsymbol{B}_{22}\boldsymbol{\phi}_2)=$$

$$(\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{21})\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_1}\boldsymbol{\phi}_1+(\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12}+$$

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{22})\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_1}\boldsymbol{\phi}_2+(\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21})\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_2}\boldsymbol{\phi}_1+$$

$$(\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{22})\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_2}\boldsymbol{\phi}_2$$

由 $\boldsymbol{A}^{-1}$的定义以及 $\boldsymbol{A}$ 的对称正定性，对上式采用 Green 公式，并在 Ω 上积分，则上式变为

$$-\int_\Omega\frac{\partial\boldsymbol{\phi}_1}{\partial x_1}\boldsymbol{u}\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{\partial\boldsymbol{\phi}_2}{\partial x_2}\boldsymbol{u}\mathrm{d}x=-\int_\Omega\boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\phi}\mathrm{d}x\quad(9)$$

所以，方程(8)的等价形式为

$$\left.\begin{aligned}a(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\phi})+b(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u})&=0,\quad\forall\boldsymbol{\phi}\in H\\ b(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})&=F(\boldsymbol{v}),\quad\forall\boldsymbol{v}\in M\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

式中：$a(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\phi})=\int_\Omega\boldsymbol{\varphi}\ \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\phi}\mathrm{d}x$，$b(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u})=\int_\Omega\boldsymbol{u}\mathrm{div}\boldsymbol{\phi}\mathrm{d}x$；$F(\boldsymbol{v})=\int_\Omega\boldsymbol{fv}\mathrm{d}x$.

定理1 混合变分问题(10)有唯一解$(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{u})\in(H\times M)$.

证明 首先验证 $a(\cdot,\cdot)$在 $Z=\{\boldsymbol{\phi}\in H;\mathrm{div}\boldsymbol{\phi}=0\}$中强制. 对$\forall\boldsymbol{\phi}\in Z$，有

$$a(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\phi})=\int_\Omega\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\phi}\mathrm{d}x\geqslant C\int_\Omega\boldsymbol{\phi}^2\mathrm{d}x=$$

$$C\left[\int_\Omega\boldsymbol{\phi}^2\mathrm{d}x+\int_\Omega(\mathrm{div}\boldsymbol{\phi})^2\mathrm{d}x\right]=C\|\boldsymbol{\phi}\|_H$$

接着，验证 $b(\cdot,\cdot)$满足连续的 B-B 条件. 对$\forall\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega)_2$，由

$$\left.\begin{aligned}-\Delta\boldsymbol{w}&=\boldsymbol{v}\quad\Omega\\ \boldsymbol{w}&=0\quad\partial\Omega\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

有唯一的广义解 $\boldsymbol{w}\in H_0^1(\Omega)_2$，及正则性[6]，得到$\|\boldsymbol{w}\|_2\leqslant C\|\boldsymbol{v}\|_0$. 取 $\boldsymbol{\varphi}_0=\begin{pmatrix}-w_{1,x}&-w_{2,x}\\-w_{1,y}&-w_{2,y}\end{pmatrix}\in H$，使得$\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}_0=\boldsymbol{v}\in M$，则有

$$\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_H\leqslant C\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_1\leqslant C\|\boldsymbol{w}\|_2\leqslant C\|\boldsymbol{v}\|_0$$

即

$$\sup_{\forall\boldsymbol{\varphi}\in H}\frac{b(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{\varphi}\|_H}\geqslant\frac{b(\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_H}\geqslant\frac{\|\boldsymbol{v}\|_0^2}{C\|\boldsymbol{v}\|_0}\geqslant\beta\|\boldsymbol{v}\|_0$$

故连续的 B-B 条件成立，定理得证.

变分问题(10)的离散形式为

$$\left.\begin{aligned}a_h(\boldsymbol{\varphi}_h,\boldsymbol{\phi}_h)+b_h(\boldsymbol{\phi}_h,\boldsymbol{u}_h)&=0,\quad\forall\boldsymbol{\phi}_h\in H_h\\ b_h(\boldsymbol{\varphi}_h,\boldsymbol{v}_h)&=F(\boldsymbol{v}_h),\quad\forall\boldsymbol{v}_h\in M_h\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

式中：$a_h(\boldsymbol{\varphi}_h,\boldsymbol{\phi}_h)=\sum_K\int_K\boldsymbol{\varphi}_h\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\phi}_h\mathrm{d}x$，$b_h(\boldsymbol{\phi}_h,\boldsymbol{u}_h)=\sum_K\int_K\boldsymbol{u}_h\mathrm{div}\ \boldsymbol{\phi}_h\mathrm{d}x$.

定理2 离散问题(12)有唯一解$(\boldsymbol{\varphi}_h,\boldsymbol{u}_h)\in(H_h\times M_h)$.

证明 对于前面定义的插值算子，以及$\forall\boldsymbol{\varphi}\in(H^2(\Omega))_{2\times2}$，有

$$b_h(\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{I}_h\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v}_h)=\sum_K\int_K\boldsymbol{v}_h\mathrm{div}(\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{I}_h\boldsymbol{\varphi})\mathrm{d}x=$$

$$\sum_K\int_{\partial K}\boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{I}_h\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{n}\mathrm{d}s-\sum_K\int_K\nabla\boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{\varphi}-$$

$$\boldsymbol{I}_h\boldsymbol{\varphi})\mathrm{d}x=\sum_K\boldsymbol{v}_h\int_{\partial K}(\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{I}_h\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}s=0$$

$$\|I_h\boldsymbol{\varphi}\|_1\leqslant\|\boldsymbol{\varphi}-I_h\boldsymbol{\varphi}\|_1+\|\boldsymbol{\varphi}\|_1\leqslant$$

$$|\boldsymbol{\varphi}|_1+\|\boldsymbol{\varphi}\|_1\leqslant C\|\boldsymbol{\varphi}\|_1$$

取 $\boldsymbol{\varphi}_0\in(H^2(\Omega))_{2\times2}$，使得 $\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}_0=\boldsymbol{v}_h\in M_h\subset M$，则有

$$b_h(\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{v}_h)=\sum_K\int_K\boldsymbol{v}_h\mathrm{div}(\boldsymbol{\varphi}_0)\mathrm{d}x=\|\boldsymbol{v}\|_0$$

$$\sup_{\forall\boldsymbol{\varphi}_h\in H_h}\frac{b_h(\boldsymbol{\varphi}_h,\boldsymbol{v}_h)}{\|\boldsymbol{\varphi}_h\|_H}\geqslant\sup_{\forall\boldsymbol{\varphi}\in(H^2(\Omega))_{2\times2}}\frac{b_h(I_h\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v}_h)}{\|I_h\boldsymbol{\varphi}\|_H}\geqslant$$

$$\sup_{\forall\boldsymbol{\varphi}\in(H^2(\Omega))_{2\times2}}\frac{b_h(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v}_h)}{\|I_h\boldsymbol{\varphi}\|_1}\geqslant C\sup_{\forall\boldsymbol{\varphi}\in(H^2(\Omega))_{2\times2}}\frac{b_h(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v}_h)}{\|\boldsymbol{\varphi}\|_1}\geqslant$$

$$C\frac{b_h(\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{v}_h)}{\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_1}\geqslant C\frac{\|\boldsymbol{v}_h\|_0^2}{\|\boldsymbol{v}_h\|_0}\geqslant\beta\|\boldsymbol{v}\|_0$$

所以，离散的 B-B 条件成立，命题得证.

由此得到本文的主要结论：

定理3 当连续问题(10)有唯一解$(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{u})\in(H\times M)$，离散问题(12)有唯一解$(\boldsymbol{\varphi}_h,\boldsymbol{u}_h)\in(H_h\times M_h)$时，无论剖分是否满足正则性条件，都有如下估计式：

$$\|\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\varphi}_h\|_H+\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_M\leqslant C\,h(\|\boldsymbol{\varphi}\|_2+\|\boldsymbol{u}\|_1)$$

3 数值算例

为了验证本方法的可行性，以问题(1)为算例.

其中，$\Omega=[0,1]\times[0,1]$，$\boldsymbol{A}_{pk}$ 取为单位阵；$\boldsymbol{f}=(-2\pi^2\sin(\pi,x)\sin(\pi,y),-2y(1-y)-2x(1-x))^{\mathrm{T}}$，可以验证，真解为 $\boldsymbol{u}=(\sin(\pi,x)\sin(\pi,y),y(1-y)x(1-x))^{\mathrm{T}}$，用 α 表示收敛阶.

对 Ω 采用各向异性网格剖分，x 轴和 y 轴方向的网格比为 8∶1(图 1). 表 1 的数据显示不同范数意义下的误差结果. 可以看出，当 $h\to 0$ 时，$\|u_1-u_{h,1}\|_0$，$\|u_2-u_{h,2}\|_0$，$\|\boldsymbol{\varphi}_1-\boldsymbol{\varphi}_{h,1}\|_{\mathrm{div}}$，$\|\boldsymbol{\varphi}_2-\boldsymbol{\varphi}_{h,2}\|_{\mathrm{div}}$，均收敛于误差阶 $o(h)$. 这和前面理论分析的结果完全一致.

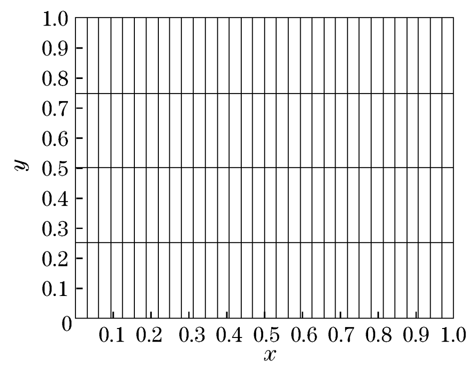

图 1　各向异性网格剖分 4×32

Fig.1　Anisotropic mesh 4×32

表 1　逼近结果

Tab.1　Approximation results

范数	网格剖分			α
	2×16	4×32	8×64	
$\|u_1-u_{h,1}\|_0$	0.079 448 313 790	0.043 049 670 790	0.021 953 169 220	0.971 572 978 8
$\|u_2-u_{h,2}\|_0$	0.005 370 304 553	0.002 871 292 365	0.001 463 488 651	0.971 915 393 7
$\|\boldsymbol{\varphi}_1-\boldsymbol{\varphi}_{h,1}\|_{\mathrm{div}}$	1.284 634 408 000	0.695 589 481 800	0.354 631 508 600	0.972 288 680 2
$\|\boldsymbol{\varphi}_2-\boldsymbol{\varphi}_{h,2}\|_{\mathrm{div}}$	0.092 043 503 310	0.049 566 669 920	0.025 283 180 130	0.971 192 398 5

参考文献：

[1]　Oleinik O A，Shamaev A V，Yosifian G A. Mathematical problems in elasticity and hom-genization[M]. Amsterdan：[s. n.]，1992.

[2]　曹礼群，崔俊芝. 整周期复合材料弹性结构的双尺度渐进分析[J]. 应用数学学报，1999，22(1)：38.
CAO Liqun，CUI Junzhi. The two-scale asymptotic analysis for elastic structures of composite materials with only including entirely basic configuration[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，1999，22(1)：38.

[3]　Cui J Z，Yang H Y. A dual coupled method for boundary value problem of PDE with coefficients of small period[J]. Journal of Computational Mathematics，1996，14(2)：159.

[4]　宋士仓，崔俊芝，刘红生. 复合材料稳态热传导问题多尺度计算的一个数学模型[J]. 应用数学，2005，18(4)：560.
SONG Shicang，CUI Junzhi，LIU Hongsheng. A new model of multiscale computation for steady heat transfer equation of composite materials[J]. Mathematica Applicata，2005，18(4)：560.

[5]　刘晓奇，刘金朝，朱起定. 具有周期振荡系数二阶椭圆形方程的双尺度高精度算法[J]. 系统科学与数学，2005，25(4)：471.
LIU Xiaoqi，LIU Jinchao，ZHU Qiding. High accuracy algorithm for second order elliptic problem with rough periodic coefficients[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences，2005，25(4)：471.

[6]　宋士仓，陈绍春. 一个各向异性插值定理及其在二阶问题混合元中的应用[J]. 高等学校计算数学学报，2004，26(3)：230.
SONG Shicang，CHEN Shaochun. An anisotropic interpolate theorem and its applications to the mixed form of second order elliptic problem[J]. Numerical Mathematics：A Journal of Chinese Universities，2004，26(3)：230.