

DOI:10.3969/j.issn.1000-1298.2010.03.041

# 螺旋锥齿轮齿面误差修正\*

苏进展 方宗德 谷建功

(西北工业大学机电学院,西安 710072)

**【摘要】** 研究了基于数控加工螺旋锥齿轮齿面误差修正技术。提出了一种由摇台型机床调整参数向 Free-Form 机床转换的方法,建立了基于数控加工齿面误差模型;在此基础上,以齿面误差平方和最小为目标函数,优化摇台型机床调整参数,再将其转换为数控加工形式,从而实现数控齿面修正。最后通过算例表明,经过改变加权系数和优化可以达到齿面误差较高精度修正要求。

**关键词:** 螺旋锥齿轮 齿面 误差修正 Free-Form 机床

**中图分类号:** TH132.421; TH161<sup>+</sup>.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2010)03-0200-04

## Tooth Surface Correction for Spiral Bevel Gears

Su Jinzhan Fang Zongde Gu Jianguo

(School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

### Abstract

Based on NC machining, the tooth surface errors correction of spiral bevel gears was investigated. A new method for the machining settings transformation from cradle-type hypoid generator to Free-Form one was proposed, and the tooth errors mathematical model based on NC machining was established. The minimum of square sum of tooth surface errors was the objective function to optimize the cradle-type hypoid generator machine settings and transform those parameters into NC form so as to realize the NC machining correction of spiral bevel gears. Finally a numerical example was presented. The results showed that it could achieve precise correction after altering relative weight coefficient and optimizing for several times.

**Key words** Spiral bevel gears, Tooth surface, Error correction, Free-Form machining

### 引言

螺旋锥齿轮是传动机械中的关键部件,其齿面精度是影响齿轮传动平稳性、可靠性及耐久性的重要因素。由于机床调整参数误差及热处理变形及其他不可预测因素影响,实际齿面将偏离理论齿面,其传动性能将不能满足设计要求。国内外学者对齿面误差模型及修正技术作了大量研究<sup>[1-7]</sup>,主要集中在两个方面:一方面是基于误差敏感矩阵 CNC 齿面误差修正<sup>[1-3]</sup>,可实现齿面误差高阶修正,但由于齿面误差及其导数表达式非常复杂,实用性也受到了限制;另一方面是基于摇台型机床的齿面误差修

正<sup>[4-8]</sup>,但可调加工参数有限不能实现高精度误差修正。本文用坐标变换方法推导摇台型铣齿机向 Free-Form 机床转换方法,建立基于数控加工齿面误差模型;以齿面误差平方和最小为目标函数,优化摇台型机床调整参数和改变加权系数。

### 1 转换原理和方法

螺旋锥齿轮包括弧齿锥齿轮和准双曲面齿轮,齿面数学模型是以锥齿轮加工方法和齿轮啮合理论为基础建立的,具体的加工方法可见文献[2],在此主要研究机床调整参数转换,该转换方法可适用于格里森齿制(SGM、HFT、HGM等)和奥利康齿制

收稿日期:2009-02-24 修回日期:2009-04-10

\*国家自然科学基金资助项目(50875211)和航空科技创新基金资助项目(07B53004)

作者简介:苏进展,博士生,主要从事螺旋锥齿轮设计、数控加工研究,E-mail:sujinzhan@mail.nwpu.edu.cn

(Spiroflex、Spirac、Elloid 等)。转换基本思想是考虑在摇台型机床坐标系和 Free-Form 坐标系中, 刀具和工件必须满足一定的相对位置和相对运动关系。在摇台型机床加工坐标系中, 由于刀倾结构的存在, 工件轴和刀具轴之间最短距离矢量不断变化, 而在 Free-Form 坐标系中两者最短距离矢量的方向是不变的, 并且始终平行于某一坐标轴。这表明若将 Free-Form 坐标系中工件轴和刀具轴之间的相对位置和相对运动关系在传统坐标系中表示, 应与摇台型机床坐标系中刀具轴和工件轴的相对位置和相对运动关系是等价的。如图 1 所示, 引入辅助坐标系  $S_n$ ,  $\mathbf{j}_n$  为工件轴与刀具轴最短距离单位矢量,  $\mathbf{k}_n$  与刀具轴  $\mathbf{j}_t$  平行,  $\mathbf{i}_n = \mathbf{j}_n \times \mathbf{k}_n$ , 通过确定出刀具坐标系  $S_t$  初始位置 ( $\beta_0 = 0$ ) 在摇台型机床坐标系  $S_{m1}$  中表示和确定工件坐标系  $S_1$  初始位置 ( $\phi_0$ ) 在  $S_{m1}$  中表示, 得到如下表达式

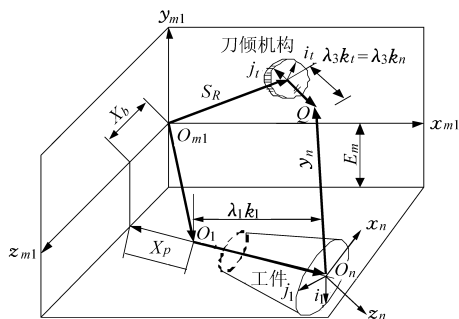


图 1  $S_n$  在  $S_{m1}$  坐标系中表示

Fig. 1 Definition of coordinate system  $S_n$  with respect to  $S_{m1}$

$$\mathbf{j}_n = \begin{bmatrix} -\cos\gamma_{m1}\cos i - \sin\gamma_{m1}\sin(q+j)\sin i \\ \sin\gamma_{m1}\cos(q+j)\sin i \\ \cos\gamma_{m1}\cos(q+j)\sin i \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{k}_n = [-\cos(q+j) - \sin(q+j)\sin i \cos i]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{i}_n = \begin{bmatrix} \sin\gamma_{m1}\cos(q+j)\sin i \cos i - \\ \cos\gamma_{m1}\cos(q+j)\sin^2 i \sin(q+j) \\ \cos\gamma_{m1}\cos^2(q+j)\sin i + \cos\gamma_{m1}\cos^2 i + \\ \sin\gamma_{m1}\sin(q+j)\sin i \cos i \\ \sin\gamma_{m1}\sin^2 i + \cos\gamma_{m1}\sin i \cos i \sin(q+j) \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中  $q = \phi_0 + m_{c1}\varphi_1$   
 式中  $\gamma_{m1}$ ——轮坯根锥角  $i$ ——刀倾角  
 $j$ ——刀转角  $q$ ——摇台转角  
 $\varphi_0$ ——摇台初始转角  $m_{c1}$ 加工滚比  
 $\varphi_1$ ——小轮转角

在 Free-Form 坐标系中, 待确定六坐标分别为  $X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma$ , 如图 2 所示定义  $X$  为刀具中心水平方向平动,  $Y$  为刀具中心垂直方向平动,  $Z$  为床位的移动方向,  $\alpha$  为工件转角,  $\beta$  为刀具转角,  $\gamma$  为轮坯根锥角。  $S_d$  为 Free-Form 机床坐标系, 定义向量  $\mathbf{V}$  为

刀具中心到工件轴与  $Z$  交点  $O_p$  之间的向量, 在传统坐标系  $S_{m1}$  中可以得如下向量方程

$$\mathbf{O}_{m1}\mathbf{O}_1 - \mathbf{O}_p\mathbf{O}_1 - \mathbf{V} + \mathbf{O}_h\mathbf{O}_t - \mathbf{O}_{m1}\mathbf{O}_t = \mathbf{0} \quad (4)$$

$$\text{其中 } \begin{cases} \mathbf{O}_{m1}\mathbf{O}_1 = [-S_R \sin q, S_R \cos q, 0]^T \\ \mathbf{O}_{m1}\mathbf{O}_t = [E_m, X_p \cos \gamma_{m1}, X_p \sin \gamma_{m1} + X_b]^T \\ \mathbf{O}_p\mathbf{O}_1 = P_d [0, -\cos \gamma_{m1}, -\sin \gamma_{m1}]^T \\ \mathbf{O}_h\mathbf{O}_t = h [-\cos(q+j)\sin i, \\ -\sin(q+j)\sin i, \cos i]^T \end{cases}$$

式中  $S_R$ ——径向刀位  $E_m$ ——垂直轮位  
 $X_p$ ——轴向轮位  $X_b$ ——床位  
 $P_d$ ——工件安装距, 即工件节锥顶点  $O_1$  到  $O_p$  的距离  
 $h$ ——刀盘安装距刀盘中心  $O_t$  到刀盘座中心  $O_1$  距离

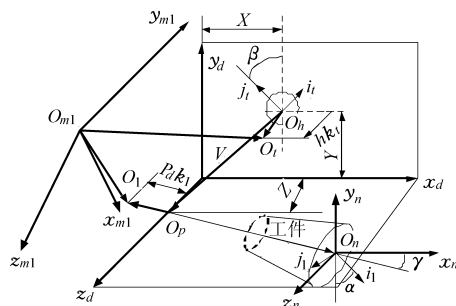


图 2  $S_d$  在  $S_{m1}$  坐标系中表示

Fig. 2 Definition of coordinate system  $S_d$  with respect to  $S_{m1}$

求解式 (4) 向量方程可以得到向量  $\mathbf{V}$  表达式

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} E_m + h\cos(q+j) + S_R \sin q \\ (X_p + P_d)\cos\gamma_{m1} - h\sin(q+j) - S_R \cos q \\ (X_p + P_d)\sin\gamma_{m1} + h\cos i + X_b \end{bmatrix} \quad (5)$$

最后可得到六轴运动的表达式。将式 (6) 展开成多项式, 一般展开到六次项就可以满足高精度的要求。

$$\mathbf{R}_6(q) = [X \ Y \ Z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T \quad (6)$$

其中  $X = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{i}_n$   $Y = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{j}_n$   $Z = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{k}_n$   
 $\alpha = \arccos(-\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_n)$   $\beta = \arccos(\mathbf{j}_t \cdot \mathbf{j}_n)$   
 $\gamma = \arccos(-\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_n)$

在 Free-Form 机床上,  $X, Y, Z, A, C$  轴联动可以展成格里森齿制锥齿轮,  $X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma$  六轴联动可以展成奥利康齿制锥齿轮。本文主要研究格里森齿展成转换, 在  $\mathbf{R}_6(q)$  中去除对刀具轴转角  $\beta$  联动控制。

## 2 齿面误差模型

### 2.1 齿面方程

为研究方便, 对图 2 坐标系进行简化, 建立如图 3 所示六轴五联动 Free-Form 数控铣齿机坐标

系,  $S_i$  刀具坐标系,  $S_{m1}$  机床坐标系,  $S_p$  工件辅助坐标系,  $S_1$  固联于工件坐标系, 将刀具坐标系通过坐标变换变换到工件坐标系下, 得到齿面位矢。

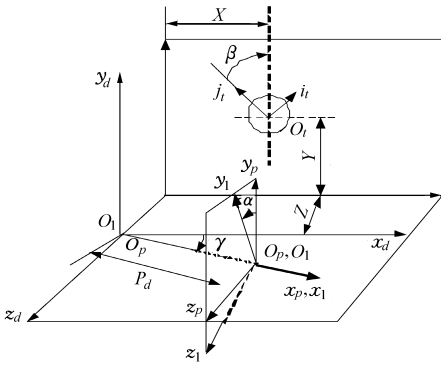


图3 Free-Form 坐标系

Fig. 3 Coordinate systems of Free-Form hypoid generator

$$r_1(u, \beta, q) = M_{1d}(q)M_{di}(q)r_i(u, \beta) \quad (7)$$

在机床坐标系下, 产形轮和工件的啮合方程为

$$f_d(u, \beta, q) = \mathbf{n}_d \cdot \mathbf{v}_d^{(c1)} \quad (8)$$

啮合点在机床坐标系下的位矢和法矢为

$$\mathbf{r}_d = M_{di}(X(q), Y(q), Z(q))\mathbf{r}(u, \beta) \quad (9)$$

$$\mathbf{n}_d(u, \beta) = \mathbf{n}_i(u, \beta) \quad (10)$$

产形轮与工件在机床坐标系下的相对速度为

$$\mathbf{v}_d^{(c1)} = \mathbf{v}_d^{(c)} - \mathbf{v}_d^{(1)}$$

其中  $\mathbf{v}_d^{(c)} = [\dot{X}(q) \quad \dot{Y}(q) \quad \dot{Z}(q)]^T$

$$\mathbf{v}_d^{(1)} = \boldsymbol{\omega}_d^{(1)} \times \mathbf{r}_d^{(1)}$$

$$\boldsymbol{\omega}_d^{(1)} = [\dot{\beta} \cos(\gamma) \quad \dot{\gamma} \quad \dot{\beta} \sin(\gamma)]^T$$

$$\mathbf{r}_d^{(1)} = [x_d + P_d \cos(\gamma) \quad y_d + P_d \sin(\gamma) \quad z_d]^T$$

联立式(7)~(10)可求得齿面坐标。

## 2.2 齿面误差表示

如图4所示, 在齿面的旋转投影面上取一定数目测量点(一般取45点), 通过求解非线性方程组

$$\begin{cases} \sqrt{y_1^2(u, \beta, q) + z_1^2(u, \beta, q)} = R \\ x_1(u, \beta, q) = L \\ f_1(u, \beta, q) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

可以确定理论齿面位矢  $\mathbf{r}_1^{(i)}$  和法矢  $\mathbf{n}_1^{(i)}$ 。

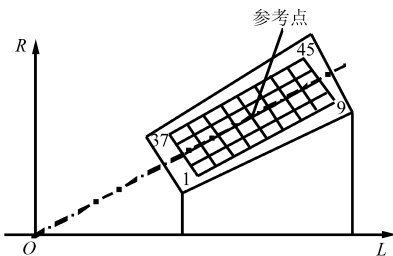


图4 齿面测量点

Fig. 4 Definition of a tooth flank grid

使用三坐标测量仪沿着齿面网格测得的实际齿面为

$$\mathbf{r}_m^{(i)} = [x_m^{(i)} \quad y_m^{(i)} \quad z_m^{(i)}] \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

则齿面误差为: 在齿面任一给定点上, 实际齿面偏离理论齿面的距离在法向方向上投影

$$\delta^{(i)} = (\mathbf{r}_m^{(i)} - \mathbf{r}_1^{(i)}) \cdot \mathbf{n}_1^{(i)} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

$\delta$  值为正时, 方向与法矢相同,  $\delta$  值为负时, 方向与法矢相反。

## 3 齿面误差修正

根据第2节齿面误差模型计算出齿面误差, 优化机床调整参数直到满足齿面误差平方和最小, 并转换成数控加工形式。由于在实际齿面和理论齿面上相应点有相同的曲面参数, 而实际齿面可以近似地看成是由一组机床调整参数直接产生的, 为了求出实际的机床调整参数, 建立以下优化目标函数<sup>[5]</sup>

$$\min f(d_j) = \sum C_i |\delta^{(i)}(d_j)|^2 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

式中  $C_i$  ( $\sum C_i = 1$ ) 为加权系数, 其取值不同将影响最终齿面误差分布, 一般在齿面中部取值大些, 两边可以取小些。  $d_j$  为摇台型机床调整参数。由于测量点  $n$  远大于调整参数, 可采用最小二乘法求解, 本文采用不需求导的 Levenberg-Marquardt 算法, 优化后的摇台型机床调整参数为  $d_j'$ 。

## 4 算例

以加工弧齿锥齿轮副小轮为例, 进行齿面误差修正, 篇幅有限仅列出工作面(小轮凹面)修正参数。采用变性法加工, 机床调整参数列于表1; 表2为 Free-Form 数控加工各运动轴相关系数。人为给定调整参数产生的齿面作为实际齿面, 利用本文提出的方法求得修正后调整参数。人为给定和通过优化方法得到机床调整参数是不同的, 原因是齿面展成的多解性, 在其拓扑空间域中, 不同机床调整参数能够展成几乎一致的齿面。从转换数控加工的结果来看变性法加工仅需三轴联动就可实现, 不同的机床参数( $P_d, h$ ), 其数控形式略有不同。图5为修正前后的齿面偏差, 修正前齿面最大偏差为  $34 \mu\text{m}$ , 经过第1次修正后齿面最大偏差为  $8 \mu\text{m}$ , 调整优化目标函数的加权系数  $C_i$ , 得到第2次修正后的齿面最大偏差为  $3 \mu\text{m}$ , 并且使齿面中部具有高的精度(齿面偏差均小于  $0.5 \mu\text{m}$ )。采用 L-M 方法避免了对齿面误差  $\delta^{(i)}$  复杂表达式及其导数求解, 可以提高其计算效率, 但该方法是对所有加工参数进行优化, 优化参数较多, 一次优化过程耗时  $3.4608 \text{ s}$ , 运行条件为 Intel Pentium 4 CPU 2.6 GHz 和 1.00 GB 内存。

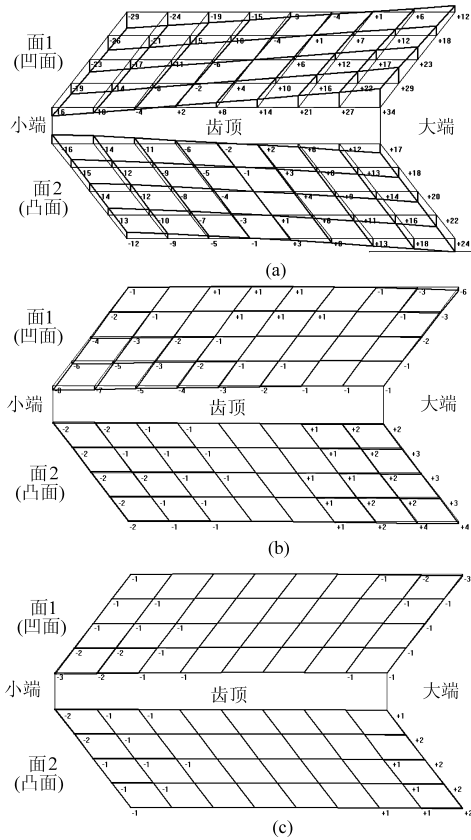


图 5 齿面偏差图

Fig. 5 Flank topographic deviations

- (a) 修正前齿面误差
- (b) 第 1 次修正后齿面误差
- (c) 第 2 次修正后齿面误差

表 1 摇台型机床调整参数

Tab. 1 Cradle-type machine tool settings

调整参数	理论数值	实际数值	修正数值
刀具齿形角/(°)	22.8	22.5	22.448 5
刀尖半径/mm	93.062 9	93.032 9	93.097 1
径向刀位/mm	109.927 0	109.907 0	109.888
角向刀位/(°)	48.683 7	-48.663 7	-48.668
滚比	0.347 58	0.347 3	0.347 3
垂直轮位/mm	2.753 4	2.653 4	2.715 4
轴向轮位/mm	-1.892 9	-1.892 9	-1.893 8
床位/mm	0.695 2	0.595 2	0.651 2
轮坯安装角/(°)	17.928 2	18.328 2	18.317 5
二阶变系数 $C$	-0.042 7	-0.042 5	-0.021 4
三阶变系数 $D$	0.091 5	0.091 3	0.015 03

### 5 结束语

提出了摇台型机床调整参数向 Free-Form 机床转换新方法,该转换的方法不仅适合于六轴五联动端面铣齿,同样也适用于六轴联动端面滚齿加工,此转换方法更具工程实用价值。齿面误差修正算例表明,通过多次优化和改变加权系数可以达到齿面较高精度修正要求,从而保证齿面的啮合质量。将优化后的机床调整参数转换成数控加工形式,可实现齿面误差的数控加工修正。本文建立的机床调整参数转换和齿面误差模型为实现基于数控技术齿面误差高阶修正打下基础。

表 2 Free-Form 系数

Tab. 2 Coefficient of Free-Form

运动主轴	常数项	1 次项	2 次项	3 次项	4 次项	5 次项	6 次项
$X$	68.028 6	82.515 1	36.285 6	-13.752 5	-3.023 9	0.687 4	0.101 2
$Y$	79.799 6	72.573 0	-41.257 5	-12.095 5	3.438 1	0.604 6	-0.114 2
$Z$	47.198 4	0	0	0	0	0	0
$\alpha$	0.0	-2.879 1	-0.061 7	0.043 3	0.000 2	-0.000 14	-0.000 1
$\gamma$	18.317 5	0	0	0	0	0	0

### 参 考 文 献

- 1 Fan Qi, DaFoe R S, Swanger J W. Higher-order tooth flank form error correction for face-milled spiral bevel and hypoid gears [J]. ASME, Journal of Mechanical Design, 2008, 130(7): 072601-1 ~ 7.
- 2 Shih Y P, Fong Z H. Flank correction for spiral bevel and hypoid gears on a six-axis CNC hypoid generator[J]. Journal of Mechanical Design, ASME, 2008, 130: 062604-1 ~ 11.
- 3 Artoni A, Gabiccini M. Nonlinear identification of machine settings for flank form modifications in hypoid gears[J]. ASME, Journal of Mechanical Design, 2008, 130(11): 112602-1 ~ 8
- 4 Lin C Y, Tsay C B, Fong Z H. Computer-aided manufacturing of spiral bevel and hypoid gears with minimum surface-deviation[J]. Mechanism and Machine Theory, 1998, 33(6):785 ~ 803.
- 5 方宗德,杨宏斌,邓效忠. 弧齿锥齿轮齿面优化修正及计算机仿真[J]. 航空动力学报,2002,17(1):140 ~ 144.  
Fang Z D, Yang H B, Deng X Z. Optimal tooth surface correction of spiral bevel gears and computerized simulation[J]. Journal of Aerospace Power, 2002, 17(1):140 ~ 144. (in Chinese)

- permittivity measurements[J]. Food Control, 2006, 17(4): 304 ~ 311.
- 3 Zhang L, Lyng J G, Brunton N P. The effect of fat, water and salt on the thermal and dielectric properties of meat batter and its temperature following microwave or radio frequency heating[J]. Journal of Food Engineering, 2007, 80(1): 142 ~ 151.
- 4 Gunasekaran N, Mallikarjunan P, Eifert J, et al. Effect of fat content and temperature on dielectric properties of ground beef [J]. Transactions of the ASAE, 2005, 48(2): 673 ~ 680.
- 5 鲁勇军, 朱彤, 郭亚峰. 乳制品微波介电性能的测量[J]. 食品科学, 2000, 21(9): 8 ~ 11.  
Lu Yongjun, Zhu Tong, Guo Yafeng. Measurement and analysis on microwave dielectric properties of dairy products[J]. Food Science, 2000, 21(9): 8 ~ 11. (in Chinese)
- 6 郭文川, 吕俊峰, 谷洪超. 微波频率和温度对食用植物油介电特性的影响[J]. 农业机械学报, 2009, 40(8): 124 ~ 129.  
Guo Wenchuan, Lü Junfeng, Gu Hongchao. Effect of frequency and temperature on microwave dielectric properties of edible vegetable oils[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(8): 124 ~ 129. (in Chinese)
- 7 Nelson S O. Dielectric spectroscopy of fresh fruit and vegetable tissues from 10 to 1800 MHz[J]. Journal of Microwave Power & Electromagnetic Energy, 2005, 40(1): 31 ~ 47.
- 8 Nelson S O, Trabelsi S, Kays S J. Dielectric spectroscopy of honeydew melons from 10 MHz to 1.8 GHz for quality sensing [J]. Transactions of the ASABE, 2006, 49(6): 1977 ~ 1981.
- 9 Feng H, Tang J, Cavalieri R P. Dielectric properties of dehydrated apples as affected by moisture and temperature[J]. Transactions of the ASAE, 2002, 45(1): 129 ~ 135.
- 10 Guo W, Nelson S O, Trabelsi S, et al. Dielectric properties of honeydew melons and correlation with quality[J]. Journal of Microwave Power & Electromagnetic Energy, 2007, 41(2): 44 ~ 54.
- 11 郭文川, Nelson S O, Trabelsi S, 等. 蜜瓜和西瓜果汁的射频介电特性及其与糖度的关系[J]. 农业工程学报, 2008, 24(5): 289 ~ 292.  
Guo Wenchuan, Nelson S O, Trabelsi S, et al. Radio frequency (RF) dielectric properties of honeydew melon and watermelon juice and correlations with sugar content[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2008, 24(5): 289 ~ 292. (in Chinese)
- 12 Nelson S O, Guo W, Trabelsi S, et al. Dielectric properties of watermelons for quality sensing[J]. Measurement Science and Technology, 2007, 18(7): 1887 ~ 1892.
- 13 Guo W, Nelson S O, Trabelsi S, et al. 10 ~ 1800 MHz dielectric properties of fresh apples during storage[J]. Journal of Food Engineering, 2007, 83(4): 562 ~ 569.
- 14 Rynnänen S. The electromagnetic properties of food materials: a review of the basic principles [J]. Journal of Food Engineering, 1995, 26(4): 409 ~ 429.
- 15 Metaxis R C, Meredith R J. Industrial microwave heating[M]. London: Peter Peregrinus Ltd., 1983.

(上接第 203 页)

- 6 Gosselin C, Nonaka T, Shiono Y, et al. Identification of the machine settings of real hypoid gear tooth surfaces[J]. ASME, Journal of Mechanical Design, 1998, 120(3): 429 ~ 440.
- 7 Litvin F L, Kuan C. Minimization of deviations of gear real tooth surface determined by coordinate measurements[J]. ASME, Journal of Mechanical Design, 1993, 115(4): 995 ~ 1001.
- 8 李敬财, 王太勇, 范胜波, 等. 基于数字化制造的螺旋锥齿轮齿面误差修正[J]. 农业机械学报, 2008, 39(5): 174 ~ 177, 185.  
Li Jingcai, Wang Taiyong, Fan Shenbo, et al. Error corrections of spiral bevel gear tooth surface based on digitized manufacturing[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(5): 174 ~ 177, 185. (in Chinese)