

小波变换与电磁法勘探中高维地质体的特征刻划^①

宋守根 汤井田 何继善

(中南工业大学地质系, 长沙 410083)

摘 要

利用小波变换, 首次提出了电磁法勘探中能刻划高维地质体特征的解解释参数, 给出了它的计算方法, 并通过理论分析和数值模拟获得一些新的认识, 开辟了电磁法勘探中高维地质体识别的新途径。

关键词: 小波变换 电磁法勘探 异常的奇性

电磁法在金属矿床勘探, 地热调查和工程勘查中备受青睐, 计算机和电子技术的飞速发展又将勘查地球物理电磁法推上了一个新台阶。一维正演与解释及二、三维的正演计算均已取得相当的成功, 但二、三维的解释还处于初级阶段^[1]。加深对高维地质体特征的认识, 提高电磁法勘探中高维地质体的解释水平, 则是目前的一项迫切任务。

在经典的频率域勘查电磁法理论中, 当地下有二、三维异常体存在时, 卡尼亚电阻率曲线就会产生相应的异常, 这种异常是地下异常体固有的反映, 它包含了异常体的大量信息。然而过去由于主要采用 Fourier 分析法处理地球物理数据, 无法深入分析这种异常的特征并利用它, 而 Fourier 分析的基函数 $\{e^{i\omega t}\}$ 本质上是非局部的, 即函数 $e^{i\omega t}$ 永远是非零振荡, 不具有紧支集。因此, 它使人们难以深入地分析、提取卡尼亚电阻率曲线中异常体所产生的异常特征, 从而获得对高维异常体的深入的认识。近年来, 小波分析的兴起为研究各种不同

异常体的异常特征提供了强有力的分析工具, 使人们认识到了过去没有认识的新现象, 直接为电磁法二、三维推断解释服务。

1 电场的积分表示与奇性分析

设均匀大地内有三维地质体 Γ_0 , 围岩和三维体的电导率分别为 σ_0 和 σ , 在源区以外频率域中刻划电磁场的 Maxwell 方程为:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma_0 \mathbf{E} \quad (2)$$

若设 \mathbf{E}_p 、 \mathbf{H}_p 分别为一次电场与磁场, \mathbf{E}_s 、 \mathbf{H}_s 分别为二次电场与磁场, 则

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_s \quad (3)$$

并设

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma \quad (4)$$

这里 $\Delta\sigma$ 表示三维体 Γ_0 的电导率与均匀大地电导率的差异。

从(1)~(4)式可得

^① 本课题属国家自然科学基金和湖南省自然科学基金资助项目; 于1993年7月6日收到初稿

$$\nabla^2 E_s + k^2 E_s = i\omega\mu_0 \Delta\sigma E \tag{5}$$

其中 $k^2 = -i\omega\mu_0\sigma_0$

从非奇次 Helmholtz 方程(5)得下面积分表达式^[1]

$$E_s(\tau) = \int_{V_0} \tilde{G}(\tau, \tau_0) \Delta\sigma E(\tau_0) d\tau_0 \tag{6}$$

其中 $\tau = (x, y, z)$ 是地表观察点; $\tau_0 = (x_0, y_0, z_0) \in V_0$; $d\tau_0 = dx_0 dy_0 dz_0$; 函数 $\tilde{G}(\tau, \tau_0)$ 是张量格林函数, 它满足

$$\nabla^2 \tilde{G}(\tau, \tau_0) + k^2 \tilde{G}(\tau, \tau_0) = i\omega\mu_0 \delta(\tau - \tau_0) I \tag{7}$$

由于, 在均匀大地, 一次场

$$E_p(Z_0) = E_0 e^{-i\alpha Z_0 \hat{i}}$$

$$H_p(Z_0) = H_0 e^{-i\alpha Z_0 \hat{j}}$$

对积分表达式(6)进行一阶 Born 近似, 即积分号下的总场区用一次场 E_p 代替, 则(6)中的二次场可近似地写为

$$E_{sj}(\tau) \approx \int_{V_0} \tilde{G}_j(\tau, \tau_0) E_0 e^{-i\alpha z_0} \Delta\sigma(\tau_0) d\tau_0 \tag{8}$$

其中 G_j 由式子 $\tilde{G} = (G_x, G_y, G_z)$ 所给出, $j = x, y, z$ 。

在电磁波勘查中最通常的情形, 即传导电流远大于位移电流, 设 $k = \alpha - i\beta$, 则可以由 $k^2 = -i\omega\mu_0\sigma_0$ 算出

$$\alpha = \beta = \sqrt{\omega\mu_0\sigma_0/2}$$

故, (8)式可进一步写为

$$E_{sj}(\tau) \approx \int_{V_0} [E_0 \tilde{G}_j(\tau, \tau_0) e^{-i\alpha z_0 - \beta z_0}] \Delta\sigma(\tau_0) d\tau_0 \tag{9}$$

为了对电场积分表达式(9)及卡尼亚电阻率作深入的分析, 需用奇性分析理论, 为此引入两个基本概念:

定义1 设 $0 \leq \alpha \leq 1$, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处被认为是 Lipschitz α 的, 当且仅当存在一个常数 $K > 0$ 才能使得对 x_0 的某一邻域内的一切 x 有不等式

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|^\alpha \tag{10}$$

成立。

函数 $f(x)$ 称为在区间 (a, b) 上是一致 Lipschitz α 的。当且仅当对一切 $x, x_0 \in (a, b)$, 不等式(10)均成立。

从数学理论知道, 若 $f(x)$ 是可微的, 则 Lipschitz 指数 $\alpha = 1$, 若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续但有界, 则 Lipschitz 指数 $\alpha = 0$ 。可见, Lipschitz 指数刻划了一个函数(或信号)的奇性。

为了研究地球物理异常的奇性, 定义1的要求太苛刻, 必须将 Lipschitz 指数 α 的非负性要求取消, 为此引入定义2:

定义2 设 $f(x)$ 是一广义函数, $f(x)$ 被称为是在区间 (a, b) 上是一致 Lipschitz α 的, 当且仅当 $f(x)$ 的原函数在区间 (a, b) 上是一致 Lipschitz $\alpha + 1$ 的。

从定义1、2可以看出, Lipschitz 指数 α 是对信号(或函数)奇性的一种度量。所谓信号的奇性, 直观地说就是信号变化剧烈与平缓的一种反映, 变化越剧烈的地方奇性越强, 体现为 Lipschitz 指数 α 越小, 反之亦然。在地球物理勘探中, 有异常的地方, 总在其背景值上产生一畸变, 从而奇性增强, 所以利用 Lipschitz 指数 α 就能刻划这种奇性。特别是结合小波变换, 利用小波母函数具有紧支集的局部性特点, 就能深入分析异常奇性的强弱, 并给出具体的计算。在本文, 约定异常奇性的 Lipschitz 指数 α 称为异常的奇性指标。

下面对电场积分表达式(9)作一些分析。从(9)可以看出, 二次电场是对三维体电导率(从而对电阻率)分布的一种加权平均, 平均的权函数为 $E_0 \tilde{G}_j(\tau, \tau_0) e^{-i\alpha z_0 - \beta z_0}$, 平均区域为 V_0 , 也即三维体的大小。

从 x 轴横向来看, 当三维体 V_0 的埋深一定时, 若 V_0 的分布较宽, 则相应的异常范围也较大, 从而异常的畸变相对平缓, 所以异常的奇性也相对变弱。

从 z 轴纵向来看, 若三维体 V_0 的横向分布不变, 当埋深增大时, 这时由于积分式(9)中有因子 $e^{-\beta z}$ 的作用, 二次电场异常的幅度变小, 从而异常的奇性也相对变弱。

另外, 在 MT 法、AMT 法、CSAMT 法等频率域电磁测深方法中, 其振幅测量的结果均表示为卡尼亚电阻率, 分子中包含电场水平分量, 所以电场的奇性特征在一定程度上要传递

给卡尼亚电阻率。

2 小波变换与奇性指标的计算

设信号(或函数) $f(x) \in L^2(R)$ ，则其小波变换定义为

$$W_s^b f(x) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{s}\right)} dx \quad (10)$$

其中 $\psi(x)$ 为小波母函数，即 $\psi(x) \in L^2(R)$ ，且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 / |\omega| d\omega < \infty$$

根据文献[2]，有如下结论：函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是一致 Lipschitz α 的充要条件。为存在常数 $K > 0$ 使得对所有的 $x \in (a, b)$ ， $f(x)$ 的小波变换 $W_s^b f(x)$ 满足不等式

$$|W_s^b f(x)| \leq K S^\alpha \quad (11)$$

由于在电磁法勘探中，采集的数据均是离散的，所以设原始卡尼亚电阻率为 $\{\rho(n)\}$ ，在实际研究中要用(11)式的离散形式：

$$|W_{2^n}^b \rho(n)| \leq K \cdot 2^{n\alpha} \quad (12)$$

其中 n 为观测点点号； 2^n 为小波尺度离散值

通过计算 CSAMT 法的理论模型和实际资料的原始卡尼亚电阻率 $\{\rho(n)\}$ 的小波变换，并选出小波变换绝对值的最大值和对应的点号，我们发现：小波变换 $|W_{2^n}^b \rho(n)|$ 的最大值与二、三维异常体的大小和埋深有密切关系，对浅部可能引起静态效应的局部异常体，随着小波尺度 2^n 的增大，小波变换 $|W_{2^n}^b \rho(n)|$ 的最大值快速下降；对于深部有一定规模的异常体，随着小波尺度 2^n 的增大，其小波变换 $|W_{2^n}^b \rho(n)|$ 的最大值增加或基本上保持常值。根据这一现象，结合不等式(12)可以得到下面的结论：

在浅部的局部异常范围内，其异常的奇性指标应为负值，在深部有一定规模的异常范围内，其异常的奇性指标应为正值。因此，奇性指标 α 刻划着不同异常的特征。

利用带约束条件的最优化方法，可以计算出异常的奇性指标 α 。将(12)式两边取对数

$$\log_2 |W_{2^n}^b \rho(n)| \leq \log_2 K + \alpha \cdot j \quad (13)$$

其中 $j = 1, 2, \dots, J$ ； J 为分解层数

从而构作目标函数

$$\sum_{j=1}^J [\log_2 K + \alpha \cdot j - \log_2 |W_{2^n}^b \rho(n)|]^2 \quad (14)$$

求在约束条件(13)之下，使(14)式取最小值的最优化解，这样就可确定(13)式的系数 K 及奇性指标 α 。

下面具体计算几组理论模型来说明本方法的效果。

理论模型1如图1所示。

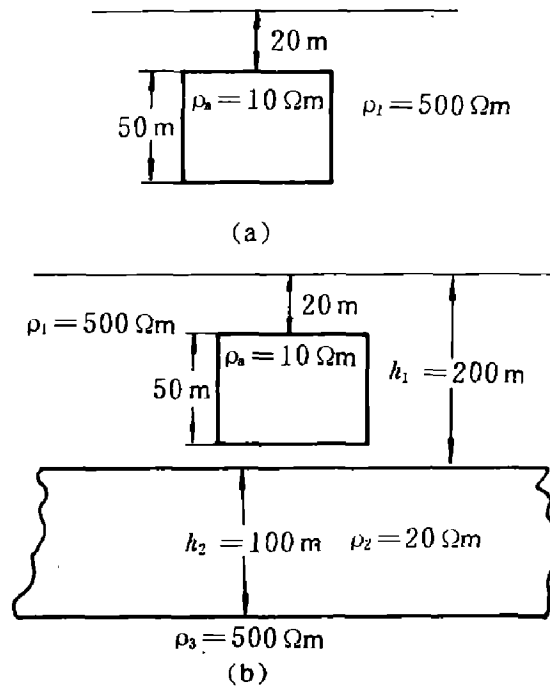


图1 理论模型1示意图

在图1中，埋深 D 取20 m。图1(a)、(b)分别为均匀半空间和三层介质中存在一个 $x \times y \times z$ 方向为60 m \times 60 m \times 50 m、电阻率为10 Ω m 的三维体。取点距为20 m，计算卡尼亚电阻率 $\{\rho(n)\}$ ，设图1(a)、(b)中三维体相应的异常的奇性指标分别为 α_a, α_b ，计算结果为：当埋深 $D = 20$ m 时， $\alpha_a = -1.279, \alpha_b = -1.282$ ；当埋深 $D = 30$ m 时， $\alpha_a = -1.203, \alpha_b = -1.217$

理论模型2如图2所示。

图2(a)、(b)与图1(a)、(b)的不同是三维体变大并且埋深也相应变大。同图1一样，取点距为20 m 计算卡尼亚电阻率 $\{\rho(n)\}$ ，并设

图2(a)、(b)三维体所产生的异常相应的奇性指标为 α_a 、 α_b ，计算结果为： $\alpha_a = 0.6972$ ， $\alpha_b = 0.707$ 。

理论模型3如图3所示。

为了考查电法数据异常奇性指标的实际有效性，需要研究二维、三维组合模型的情况。由于电磁法实际计算的困难，在此以直流中梯装置作代替。计算电阻率 $\{\rho(n)\}$ 时，中梯极距6000 m，点距为25 m。奇性指标计算的结果为： $\alpha_a = -0.7129$ ， $\alpha_b = 0.6876$ 。

根据以上的理论分析与计算，我们得到了在勘查电磁法中对二、三维地质体异常特征的

新认识：

(1)浅部横向分布较小的二、三维异常体产生的异常的奇性强，表现为奇性指标取负值；

(2)横向分布有一定规模的二、三维异常体(埋深可深可浅)产生的异常的奇性弱，表现为奇性指标取正值；

(3)同一个二、三维异常体随着埋深的加大，相应的异常的奇性减弱，表现为奇性指标逐步变大。

利用这几条结论，根据异常奇性指标的正或负，容易区分频率域电磁法中静态效应与有用异常，这对于识别、分离与压制静态效应是十分有用的。

采样密度与异常的奇性之间的关系一般有如下规律：当测量极距小于地质体水平尺寸的五分之一时，奇性指标为正，反之为负。因此，当讨论某一地区异常的奇性指标时，应在同一观测极距下进行，否则会导致错误的理解和结论。

3 实例与讨论

由于二、三维异常体异常的奇性指标与二、三维异常体的横向分布范围和埋深相关，利用异常的奇性指标作为新的解释参数可以圈定异常体的存在范围。作为应用，我们对云南老厂地区的CSAMT数据进行处理，初步说明本文方法的效果。

图4(a)为老厂3线的原始卡尼亚电阻率曲线，作卡尼亚电阻率的离散小波变换，并选出其极大模和对应的点号，作成图4(b)~(d)。最后计算在78号点附近及132号点附近的异常的奇性指标，计算结果为：

在78号点附近异常的奇性指标为0.143，而132号点附近异常的奇性指标为-0.6091。另外，还计算了170号点附近异常的奇性指标，其值也为负值。根据上一节的分析结果可知，在78号点下方应存在有一定规模的异常体，而在132号点处的异常为浅部局部不均匀体引起

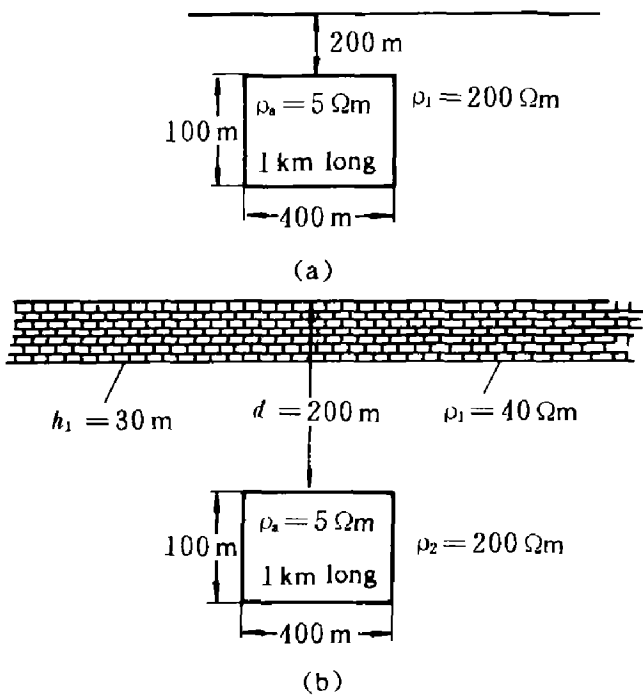


图2 理论模型2示意图

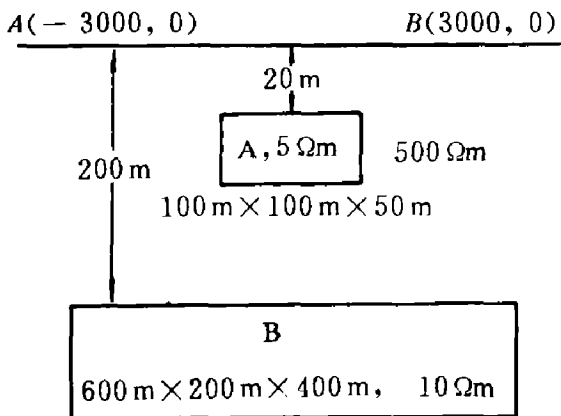


图3 理论模型3示意图

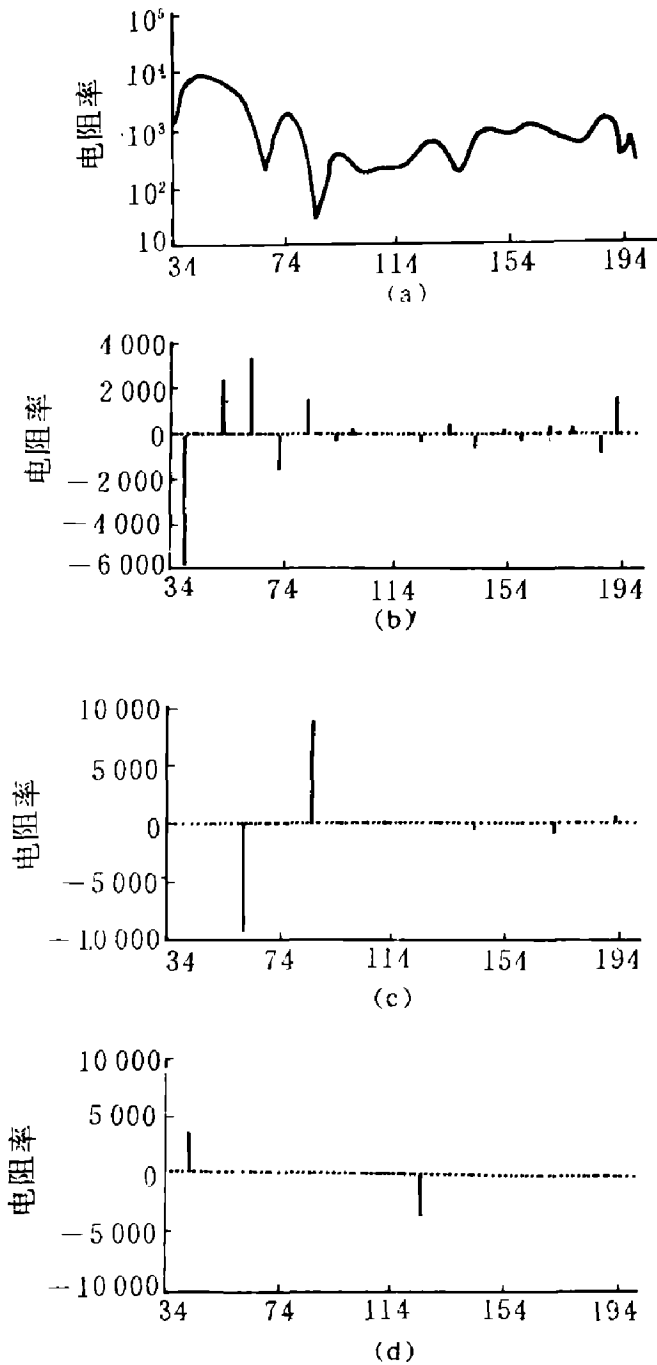


图4 老厂3线卡尼亚电阻率
曲线分析图

(图4(a)~(d)中的横坐标数据均为点号)

的静态效应。这与已知的地质情况完全相吻合。

另外，我们的推断解释结果是难以从老厂三线原始卡尼亚电阻率拟断面图直接分析出来的，除非作一些恰当的静态效应压制。因为原始卡尼亚电阻率拟断面图上到处存在的直立带状，静态效应严重地掩盖了在78号点下方存在异常体的信息。

本文从异常的奇性指标，直接判定是否存在异常体并确定其相应位置，其方法不同于过去任何的传统解释方法，而且计算方便，速度快，特别易于在微机上实现。再注意到异常的奇性指标对二、三维异常体的埋深敏感，可以得到勘查电磁法中二、三维异常体的深度反演公式，这方面尚需作大量的模型计算，我们将另文论述。

参考文献

- 1 Nabighian M N(著)，赵经祥、王艳君(译)：勘查地球物理电磁法，第一卷，北京：地质出版社，1992.
- 2 Mallat S, Hwang W L. IEEE Trans on Information Theory, 1992, 38, 617-643.