文章编号: 1000-6788(2010)02-0339-08 中图分类号: N945.25 文献标志码: A

基于有限感知的决策理性模型

赵 勇, 王 清, 陈 阳

(华中科技大学 控制科学与工程系 系统工程研究所, 武汉 430074)

摘 要 通过分析和比较完全感知和有限感知下决策的理性差别, 将有限感知定义为一种偏好关系具有非一致性特点的有限理性; 讨论了内在偏好、显示偏好、局部偏好和有限感知关系系统等概念, 以及有限感知决策的一些理性条件和模型; 并论证了诸如 Proto 序、偏序、弱序等一类偏好序下相应决策函数或规则的性质、特点及其存在性. 研究结果诠释了具有有限感知偏好关系系统的决策主体的决策行为的内在机理和规律, 可作为不确定性决策研究的一个理论基础.

关键词 有限感知; 理性建模; 偏好关系系统

Rational foundations modeling of decisions with bounded perceptibility

ZHAO Yong, WANG Qing, CHEN Yang

(Institute of Systems Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract The rationality differences of decision behaviors between full perceptibility and bounded perceptibility were analyzed. The decision behavior of bounded perceptibility is a bounded rationality with non-consistence preferences. Concepts of internal preferences, revealed preferences, local preferences, bounded perception relation system and a group of rational qualifications and models of bounded perceptibility decisions are presented. The characteristics and existence of decision functions or rules under Proto orders, partial orders, weak orders and other preference orders are proved. The conclusions interpreted the internal mechanisms of decision behaviors of decision-makers with bounded perceptual preference order system. The mechanisms can be used as the theoretical principle of uncertainty decision.

Keywords bounded perceptibility; modeling rational decision; preference order system

1 引言

对于 Simon 提出的 "有限理性" 和 "满意决策", 学术上的探讨包括两个方面: 一是基于模糊数学、灰色理论、粗糙集等一类理论建立的, 其基础是测度空间, 特点是 "非最优化", Zadeh、Slote、Mesarovic 等人在这方面做了大量的工作, 并取得了丰硕的理论和应用成果; 一是从经济学和决策科学的角度讨论的, 且多从理性和效用这两个决策理论中的基本概念入手进行研究, 例如 Kahneman 的展望理论、Tversky 的排除理论、Shefrin 的行为生命周期模型、Hsee 的能力模型等, 这些模型主要用于 "分析"、"解释" 和 "行为预测". 研究和实践表明: 建立在模糊数学方法基础上的满意决策或选择理论虽然可以较好地解释现实生活中的有限理性现象、并在实际管理和工程设计中得到了广泛应用, 但其核心概念之一的 "隶属度" 由于缺乏一个客观、实际的测度标准, 其结果往往会因人而异而难于评价; 一些理论经济学家对 "满意" 则有着不同于工程实践专家的理解, 他们从传统的 "经济人" 假说出发, 认为 "满意" 概念的提出并不是要推翻 "最优" 标准, 相反

收稿日期: 2008-06-10
基金项目: 国家自然科学基金 (70771041); 湖北省自然科学基金 (2007ABA283); 国家高技术研究发展计划 (863 计划)(2009AA04Z107)
作者简介: 赵勇 (1967–), 湖北天门人, 博士, 教授, 研究方向: 决策理论与方法, E-mail: zhiwei98530@sohu.com; 王清 (1982–), 湖北武汉人, 博士研究生, 研究方向: 决策分析、有限理性、案例决策等; 陈阳 (1977–), 湖北武汉人, 讲师, 研究方向: 系统工程、重复博弈、决策分析等.

它与 "最优" 是一致的, 但在进行抉择时由于信息的不完全和人的理性的局限性, 决策结果对决策者来说可能主观上是最优的, 客观上则不一定.

现实生活中的决策人往往表现出有限理性和满意决策的特征. 近年来, 随着相关科学领域研究取得的进展和突破, 对有限理性进行规范化研究和建模正成为国外主流经济学理论研究领域的一个热点. 经典决策理论的核心是建立在 Von Neumann-Morgenstern 的效用存在性公理体系 (以下简称为 VNM 公理) 上的期望效用理论, Savage 等认为任何合乎理性的人的行为应当满足 VNM 公理, 因此该公理又称理性行为公理, 这是决策理论和博弈论的共同基础. 但是, 现实中许多人不是理想的 "经济人", 即使有决策分析人员协助并有充裕时间对重大而又复杂的问题作决策时, 也不是完全理性的. 二十世纪 50 年代初 Simon[1] 对该 VNM 公理发难, 提出了有限理性学说; 1953 年法国经济学家 Allais[2] 给出了一个例子 (Allais paradox), 说明许多决策人的行为与 VNM 公理不符; Kahneman 和 Tversky[3] 在 1982 和 1986 年的实验也表明相同后果的决策问题在表述方式发生变化时, 决策人的选择存在不一致性.

"理性" 是指 "当前提可靠时, 能使结论可靠的逻辑思维". 自上世纪 70 年代末以来, 对完全理性的不满以及试图利用另一种决策模型替代理性人基本模型的尝试并不鲜见. 但由于有限理性的复杂性, 大部分研究只是将其作为一种思想, 停留在定性描述 (如行为决策理论) 的层面上, 得到了一些并不太深刻的结果. 近年来, 随着相关科学领域研究取得的进展和突破, 对有限理性进行规范化研究和建模正成为国外主流经济学领域的一个理论研究热点. Stirling[4] 的 "内在理性" 理论被视为目前有限理性问题研究的一个重要成果, 该理论沿用了 VNM 公理中的许多假设而与经典的完全理性理论有较好的一致性, 在此基础上 Stirling 和一些学者[5] 对满意博弈和决策及其应用进行了研究和探讨. Rubinstein[6] 从问题简化、记忆力、认知能力及交互决策 (如群决策、博奕) 等引起的有限理性入手, 进行了基于公理化假设的建模尝试, 并得到了一批有影响力的成果. 而 Castelfranchi 等[7] 结合认知科学, 对理性决策、动机和情感间关系进行了研究, 提出了一个基于信念和价值的决策理论框架. 最近, Tyson[8] 针对决策人对备选方案间偏好的感知能力是有限的, 讨论了偏好片断逻辑间应满足的一些合理关系, 并结合嵌套理论给出了满意行为的一个公理基础. 国内, 郭耀煌教授[9] 从格序特征的角度, 将 VNM 公理体系中的连通性弱化为格连通性, 探讨了一个基于 "有限理性" 决策行为的格序行为模型.

同时, 有限理性也可视为人工智能的一个理论基础. Gilboa 和 Schmeidler[10] 二人引用 David Hume 关于相似性的论述, 从现代决策科学的角度研究了诸如案例推理 (Case-based reasoning, CBR) 的一类人工智能方法中隐含的人在决策中的一些理性或逻辑特点, 如中介性、组合性、非退化性及响应性等概念, 得到了若干有助于从理性角度理解 CBR 基本原理的结论和应用建议. Hullermeier[11] 评价 Gilboa 和 Schmeidler 二人的工作后, 认为 "案例决策是一个关于有限理性的理论, 体现了 Simon 的 '满意决策' 思想", 并对二人的工作进行了扩展, 将智能学习与决策理论结合起来研究了不确定性决策中的推理规则. 因此在 "满意" 原则的基础上深入研究有限理性问题的建模对于人工智能的研究也是一个具有理论价值和实际意义的课题.

本文结合经典决策理论, 借助社会选择和福利经济学理论研究中常用的公理化方法, 对一类特殊的有限理性、即有限感知偏好下的决策理性进行建模和分析, 对于正确认识和理解现实经济现象、有效处理实际决策问题具有十分重要的理论意义和学术价值, 同时对知识工程、人工智能方法的研究也会具有一定参考价值.

2 有限感知和问题的提出

不同于 "完全理性", "有限理性" 迄今尚没有一个学术上统一的界定和规范化定义, 其特点归纳起来包括[6]:

1) 不能完全 "感知" 所有的备选方案;

2) 不能对整个备选方案进行完全排序;

3) 在能够感知和判断的范围内, 仍旧以最优化为原则进行选择.

这里,"有限感知" 的含义是: 当面对较为复杂的决策问题时, 决策人无法完全感知方案集中备选方案间的偏好, 他所感知的偏好关系仅仅是其实际偏好的一个部分. 行为经济学[12] 将这种有限理性归根于人类大脑有限的信息处理能力. 以日常生活中的采购商品为例, 顾客都想花最少的钱买到最合适的商品, 如果只有十种商品, 顾客可以较容易的将其按照物美价廉排序进行选择. 但市场中的商品数量往往成千上万, 超市里仅仅同一类的商品也有几十种品牌, 顾客即使参考了购物手册也很难感知各种商品之间的差异和形成所有的

偏好关系, 因此他做出购买决策的依据只能是部分偏好关系和满意标准.

决策理论中的 Proto 序、弱序和偏序等可以看作是一种非完全感知的偏好序, 基于此的选择或决策也可以解释为一种有限理性决策. 本文拟对此概念作进一步扩展, 研究和分析基于不同备选方案集具有不同感知偏好的理性决策. 例如, 对于 4 个方案 $[wxyz]$ 的选择问题, 表 1 的第 1 行是这 4 个方案组成的不同的备选方案子集, 第 2 行和第 3 行分别是完全感知和有限感知二种情况下的决策或选择结果:

表 1 4 个方案在完全感知和有限感知情况下决策或选择结果的比较 [8]

备选方案集	$[wx]$	$[wy]$	$[wz]$	$[xy]$	$[xz]$	$[yz]$	$[wxy]$	$[wxz]$	$[wyz]$	$[xyz]$	$[wxyz]$
完全感知决策结果	$[w]$	$[wy]$	$[wz]$	$[x]$	$[xz]$	$[y]$	$[w]$	$[wz]$	$[wy]$	$[x]$	$[w]$
有限感知决策结果	$[w]$	$[y]$	$[wz]$	$[x]$	$[z]$	$[y]$	$[x]$	$[wxz]$	$[yz]$	$[y]$	$[xyz]$

在表 1 的第 2 行中, 所有包含方案 w 和 x 的备选方案集的决策结果中 x 均未被选择, 或者说 w 在各备选方案集中均优于 x; 第 3 行中, 方案集 $[wx]$ 的选择结果为 w, 而 $[wxy]$ 的选择结果为 x, 即 w 和 x 在方案集 $[wx]$ 和 $[wxy]$ 中的选择是不一致的. 对于各备选方案在不同方案集中具有一致选择结果的决策, 本文称之为完全感知决策, 否则称非完全感知决策, 而将非完全感知决策中一类决策结果具有向 "上" 一致性 (见第 4 节内容) 的决策称为有限感知决策.

需要解释的是,"感知" 是一个主观概念. 完全感知并不意味着决策者对每个方案对都能够区分优劣、并具有偏好传递性, 仅指决策者对方案间偏好的感知不受备选方案集及其所有子集的影响, 做出的选择具有一致性. 例如, 对表 1 第 2 行中的方案对 wx 和 xy, 决策者在所有备选方集中均感知到了 w 优于 x 和 x 优于 y, 并做出了一致的选择, 但他在所有备选集上并不能区分方案 w 和 y 间的优劣, 即这里感知的偏好并不要求具有传递性. 有限感知则意味着决策者对偏好的感知能力会随着备选方案集的不同而不同, 且其感知的偏好仅对方案子集保持一致. 例如, 第 3 行中备选集 $[wxyz]$ 上的偏好 "y 优于 w" 与所有包含方案对 wy 的子集 $[wxy]$、$[wyz]$ 和 $[wy]$ 是一致的. 因此有限感知下, 父集上的偏好仅是所有子集上偏好的一部分, 即有限感知的决策偏好具有向 "上" 一致性.

3 概念和决策的理性描述

下面先对本文涉及的相关概念和符号作简单介绍.

3.1 决策函数

通常, 一个决策问题可表示为一对集合 $\langle X, H\rangle$, 其中任意非空集合 X 表示所有备选方案的集合, H 表示 X 的所有子集的集合, 而集合 $A \in H$ 是 X 的一个所含方案互相独立的子集. 那么, 建立在 H 上的决策函数 [6] 可以定义为 $C: H \rightarrow 2^X$, 其中每个 $A \in H$ 的决策结果 $C(A)$ 表示备选方案集 A 中不能够被剔除的方案的集合. 而且, 一个合理的决策函数 C 应该满足以下公理:

有效性公理 $C(A) \subset A$

决定性公理 $A \neq \emptyset \Rightarrow |C(A)| \geq 1$

普遍性公理 $H = 2^X$

3.2 二元关系和偏好关系系统

备选方案间的二元关系和偏好序是决策理论的基础. 一般地, 集合 X 上的二元关系 F 可视为 $X \times X$ 的一个集合. 通常, 我们用 $< x, y > \in R$ 表示 "二元关系 R 上 x 不劣于 $y(\succeq)$", 简写为 xRy; $< x, y > \in P$ 表示 "二元关系 P 上 x 优于 $y(\succ)$", 简写为 xPy; 而用符号 I 表示二个方案 (或元素) 间的等价或无差异关系 $(\sim)$, 即 $I = \{< x, y > | x \sim y, x \in X, y \in X\}$.

进一步地, 对于二元关系 R, 可以定义它的逆: $R' = \{< x, y > | yRx, x \in X, y \in X\}$; 补: $\overline{R} = \{< x, y > | \neg(xRy), x \in X, y \in X\}$; 以及对称余数: $R^0 = \overline{R} \cap \overline{R'}$. 如果给定另一个关系 Q, 那么 Q 与 R 的合成关系可定义为 $QR = \{< x, z > | (\exists y)\, xQy \,\&\, yRz,\, x \in X,\, y \in X,\, z \in X\}$, 而 R 的n次方定义为 $R^n = RR^{n-1}$(其中 $R^1 = R$), 联合祖传关系则为 $R^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$[12].

表 2 列举了 10 个经典的二元关系及其特征 [8], 而表 3[8,12] 给出了 4 类常用偏好关系系统和它们各自满足的二元关系特征. 这里, 偏好关系系统是指所有元素 (或方案) 间具有某种特殊二元关系的集合.

3.3 显示偏好和理性条件

对于备选方案集 A, 定义集合 $F\uparrow(A)=\left\{x\in A\,\middle|\,(\forall y\in A)\,y\overline{F}x\right\}$, 这里 F 为一般二元关系. 特殊地, 如果 F 表示 "严格优于 ($\succ$) 关系 P", 则 $P\uparrow(A)$ 表示的是 A 中非劣方案的集合, 而 $C(A)\subset \mathrm{P}\uparrow(A)$ 反映了决策函数 C 是追求偏好最大化的.

表 2 二元关系的特征

特征	表达式	特征	表达式
自反性	$I\subset R$	传递性	$R^2\subset R$
非自反性	$R\subset\overline{I}$	剩余传递	$(R^0)^2\subset R^0$
对称性	$R\subset R'$	交叉传递性	$RR^0\cup R^0R\subset R$
非对称性	$R^2\subset\overline{I}$	负传递性	$\overline{R^2}\subset\overline{R}$
非循环性	$R^*\subset\overline{I}$	弱连通性 (完备性)	$R^0\subset I$

表 3 常用偏好关系系统及其特征

偏好关系系统	满足的二元关系
proto 序	非循环性
偏序	非自反性, 传递性
弱序	非对称性, 负传递性
线性序	非循环性, 弱连通

一般地, 如果 $C(A)\subset F\uparrow(A)$ 对每一个 $A\in H$ 都成立, 则称关系 F 决定了决策函数 C 的上限, 记作上限包含关系 $C\subset F\uparrow$. 类似地, 可定义下限包含关系 $F\uparrow\subset C$, 和等于关系 $C=F\uparrow$. 如果满足等于关系, 则称 C 是关系 F 上的一致决策函数, 简称F 的决策函数. 通常, 决策者的真实偏好隐含在决策者的头脑中的、并不被非决策者所知, 称为内在偏好. 同时由于人的理性限制, 这部分内在偏好可能全部、也可能部分被决策者感知到, 成为可以作为有意识的决策行为依据的一种偏好, 称之为感知的内在偏好. 这样, 当 F 是一种感知的内在偏好关系时, 借助决策函数 C 就可以描述一个决策者的内在偏好 $F(A)$ 和他做出的选择结果 $C(A)$ 之间的联系或理性约束, 并将由选择结果 $C(A)$ 反映出的偏好称为决策者的显示偏好.

图 1 说明了感知的内在偏好、显示偏好和决策行为三者间关系.

通常, 一个偏好关系系统违反非自反性是无意义的, 违反非对称性是矛盾的, 违反非循环性是病态的. 如果偏好关系系统不能同时具有这三种特性, 则做出的选择结果或反映的显示偏好一般不满足如下理性条件:

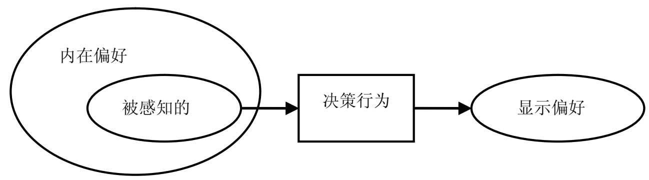

图 1 显示偏好与内在偏好的关系示意图

条件 1 弱扩张 (Weak expansion): $\bigcap_k C(A_k)\subset C\left(\bigcup_k A_k\right)$[12]

条件 2 附属扩张 (Adjunct expansion): $C(B)\subset A\subset B\Rightarrow C(A)\subset C(B)$[12]

条件 3 强扩张 (Strong expansion): $A\subset B\&C(B)\cap A\neq\emptyset\Rightarrow C(A)\subset C(B)$[12]

以上条件也可看作是衡量一个决策函数或决策规则的合理性准则. 其中, 条件 1 意味着如果方案 x 在一系列备选方案集 (例如 A_k) 的决策结果 ($C(A_k)$) 中, 那么它一定也在 "扩张" 后备选方案集 ($\bigcup_k A_k$) 的决策结果中; 条件 2 表明当备选方案集 (A) 扩张包含新方案时, 只要新方案不会被选择, 原备选方案集的决策结果中的方案在扩张后的备选方案集 (B) 中仍会被选择; 条件 3 要求当备选方案集 (A) 扩张时, 只要扩张后的备选方案集 (B) 不完全排除原备选方案, 则原决策结果 ($C(A)$) 中的方案在扩张后的备选方案集中必被选择.

4 有限感知下的决策理性建模

在有限感知下, 决策者对一些复杂的备选方案可能只能给出部分感知到的偏好, 这种偏好关系是向 "上" 一致的, 即如果对备选方案集 $A\subset B$, 决策者能感知到方案 x 优于 y, 那么对 B 他才可能判断出这个偏好关系, 这是因为有限感知下增加新的方案不会使问题更加简单. 有限感知下的这种偏好关系和决策特征可以用下面的相关概念来描述.

4.1 有限感知关系系统

定义 1 完全感知关系系统 如果对任意 $x,y\in A\subset B$, 当且仅当 xR_Ay 时才有 xR_By, 那么就称 R 是一个完全感知关系系统.

定义 2 有限感知关系系统 如果对任意 $x,y\in A\subset B$, 仅当 xR_Ay 时才有 xR_By, 那么就称 R 是一个有限感知关系系统.

可以看出, 定义 1 和定义 2 的区别在于: 前者中 xR_Ay 是 xR_By 的充要条件, 后者中 xR_Ay 是 xR_By 的

必要条件. 这对应着, 完全感知中偏好 xR_By 是双向一致的, 即 A 和 B 上的偏好是一致的; 而有限感知中是单向或向 "上" 一致的, 即只有 A 上感知到的偏好在 B 上才能被感知到. 进一步的解释是, 具有有限感知关系系统的决策依据的是子集 $A \subset B$ 上的偏好关系, 即 A 上的偏好关系应是事先感知的或给定的; 完全感知决策依据的则是全集 B 上的偏好, 无需考虑 A 上的偏好.

4.2 局部关系系统

决策函数 C 给出的显示偏好可描述为一个由 C 定义的局部关系, 下面给出了相关定义及其特征.

定义 3 局部关系 P^l 指 xP^l_By 当且仅当 $x, y \in B$, 对于每个集合 $A \subset B$, $x \in A$, 有 $y \notin C(A)$. 另外, 基本关系 P^b 指 xP^b_By 当且仅当 $x, y \in B$, 且 $y \notin C([xy])$; 分离关系 P^s 指 xP^s_By 当且仅当存在某个备选方案集 $A \subset B$ 同时满足 $x \in C(A)$ 和 $y \in A/C(A)$.

定义 3 表明: 当备选方案 x 在关系 P^l_B 上优于方案 y 时, 无论何时 B 及其子集中包含了 x 的决策问题都要排除 y. 而当 x 基本关系优于 y 时, 在两个备选方案的决策问题中 y 会被排除; 当 x 分离关系优于 y 时, 存在一些决策问题 (不一定是两个方案的决策问题) 可以排除 y 而不排除 x. 根据该定义可得:

命题 1 $\cup_{B\subset X}P^l_B = P^b_X$, 且 P^l 是非循环的.

证明 1) 根据基本关系定义, 有 $P^b_X = \cup_{[xy]\subset X}P^b_{[xy]} \subset \cup_{B\subset X}P^l_B$. 又由 P^l 定义可知, 仅当 $[xy] \subset B$ 和 $xP^l_{[xy]}y$ 时才有 xP^l_By, 即仅当 $xP^b_{[xy]}y$ 时才有 xP^l_By, 所以 $\cup_{B\subset X}P^l_B \subset \cup_{[xy]\subset X}P^b_{[xy]} = P^b_X$. 因此 $\cup_{B\subset X}P^l_B = P^b_X$.

2) 假设 P^l 是循环的, 即 $\exists x, y, z \in B$ 有 xP^l_By、yP^l_Bz 及 zP^l_Bx. 根据 P^l 的定义和 xP^l_By、yP^l_Bz 可得到, 对于 $x, y, z \in A \subset B$ 有 $y, z \notin C(A)$, 这与 zP^l_Bx 相矛盾. 因此 P^l 是非循环的.

命题 1 给出了由 C 定义的局部关系与基本关系之间的联系, 即合并了所有子方案集上的局部关系之后, 其结果与全方案集 X 上的基本关系等价.

定义 4 设 P^l 是由决策函数 C 定义的局部关系, 如果 $C \subset P^l\uparrow$, 则称 $P^l\uparrow$ 为 C 的局部上限 (Local upper bound); 如果 $P^l\uparrow \subset C$, 则称 $P^l\uparrow$ 为 C 的局部下限 (Local lower bound).

根据 $P^l\uparrow$ 的定义可得:

命题 2 局部关系定义中的决策函数 C 都具有局部上限.

$P^l\uparrow$ 是一个非劣方案集, 因此命题 2 表明: P^l 中的 C 所体现的决策规则是一种优化准则.

命题 3 如果 R 是一个有限感知关系系统, 且 $C \subset R\uparrow$, 那么对于每个方案集 A 有 $R_A \subset P^l_A$.

证明 给定 $x, y \in A$, 如果 $x\overline{P}^l_Ay$, 则一定存在一个子集 $A' \subset A$, 其中 $x \in A'$ 且 $y \in C(A') \subset R\uparrow(A')$, 这意味着 $x\overline{R}_{A'}y$. 而 R 是一个有限感知关系系统, 则有 $x\overline{R}_Ay$. 因此 $R_A \subset P^l_A$ 成立.

命题 3 说明如果由函数 C 体现的决策准则与有限感知关系系统 R 中的非劣关系具有一致性, 那么 R 中的二元关系也可用 C 定义的局部关系显示出来.

命题 4 当且仅当决策函数 C 是其定义的局部关系 P^l 的决策函数时, C 也是一个有限感知关系系统 R 的决策函数.

证明 1) 必要性. 如果函数 C 是 R 的一致决策函数, 那么 $C(B) = R\uparrow(B) = \left\{x \left| \forall y \in B, y\overline{R}_Bx \right.\right\} \supset \left\{x \left| \forall y \in B, \exists A \subset B, x, y \in A, y\overline{R}_Ax \right.\right\} \supset \{x\,|\forall y \in B, \exists A \subset B, x, y \in A, x \in R\uparrow(A) = C(A)\} = P^l\uparrow(B)$, 又由命题 2 有 $C(B) \subset P^l\uparrow(B)$, 因此 $C(B) = P^l\uparrow(B)$. 而 B 是任意的, 于是 C 是 P^l 的决策函数.

2) 充分性. 设 C 是其定义的局部关系 P^l 的一致决策函数, 则有 $C(B) = P^l\uparrow(B) = \{x \left| \forall y \in B, y\overline{P}^l_Bx \right.\}$ $= \{x\,|\forall y \in B, \exists A \subset B, x, y \in A, x \in C(A)\}$. 定义一个关系 $y\overline{R}_Ax \Leftrightarrow x, y \in A, x \in C(A)$, 则由 P^l 的定义可证明由此构成的关系 R 是一个有限感知关系系统, 于是 $C(B) = P^l\uparrow(B) = \{x|\forall y \in B, \exists A \subset B, x, y \in A, y\overline{R}_Ax\} = \left\{x \left| \forall y \in B, y\overline{R}_Bx \right.\right\} = R\uparrow(B)$, 即 C 也是 R 的决策函数.

命题 4 说明了一个有限感知关系系统 R 的决策函数的存在性, 即它对应于一个局部关系的决策函数, 其意义在于 R 的决策函数存在性和理性特征可借助于局部关系的决策函数来研究和分析. 另外, 将命题 2 和 4 组合起来可以得出局部下限对于有限感知关系系统的决策函数是必需的、也是充分的.

推论 1 当且仅当决策函数满足局部下限时, 该函数是其定义的局部关系的决策函数, 也是一个有限感知关系系统的决策函数.

5 有限理性分析与讨论

对于完全感知决策, 文献 [13–15] 证明了必定存在满足各种扩张理性和分离理性的决策规则或函数. 对于有限感知决策, 是否也存在满足一定理性条件的决策规则或函数呢? 或者说, 相应的决策有什么样的理性规律呢? 下面对一些基于特殊偏好序的有限感知关系系统进行了分析.

定理 1 Proto 序的有限感知关系系统的决策函数满足弱扩张条件; 反之, 满足弱扩张性的决策函数是 Proto 序的有限感知关系系统的决策函数.

证明 1) 设 C 是 Proto 序的有限感知关系系统的决策函数, 由命题 4 知它也是其定义的局部关系的决策函数, 则 $\forall A_k \subset B$ 有 $C(A_k) \subset P^l \uparrow (A_k)$, 且 $P^l \uparrow (\bigcup_k A_k) \subset C(\bigcup_k A_k)$. 再根据 P^l 的定义, $\bigcap_k P^l \uparrow (A_k) \subset P^l \uparrow (\bigcup_k A_k)$. 于是有, $\bigcap_k C(A_k) \subset \bigcap_k P^l \uparrow (A_k) \subset P^l \uparrow (\bigcup_k A_k) \subset C(\bigcup_k A_k)$, 即 C 满足弱扩张性.

2) 设决策函数 C 满足弱扩张性, 则 $\forall x, y \in B$ 且 $x \in P^l \uparrow (B)$, 存在子集 $A_y \subset B$ 满足 $y \in A_y$ 且 $x \in C(A_y)$(否则, $x \notin P^l \uparrow (B)$), 于是 $x \in \bigcap_{y\in B} C(A_y) \subset C\left(\bigcup_{y\in B} A_y\right) = C(B)$. 因此 $P^l \uparrow (B) \subset C(B)$, 即 C 满足局部下限, 所以根据推论 1, C 是一个有限感知关系系统的决策函数.

再假设 C 是一个非 Proto 序的有限感知关系系统 R 的决策函数, 且 $C \subset R\uparrow$, 那么存在一个集合 $B = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 满足 $x_1 R_B x_2 R_B \cdots R_B x_n R_B x_1$. 于是 $C(B) \subset R\uparrow(B) = \emptyset$, 与决策函数的 “决定” 性公理 $|C(B)| \geq 1$ 相矛盾. 因此 C 是 Proto 序的有限感知关系系统的决策函数.

与 Proto 序相比, 下面定理 2 和 3 中偏序、弱序的有限感知关系系统的决策函数分别满足弱扩张和附属扩张条件以及强扩张条件, 但反过来, 满足这些条件的函数并不一定对应偏序、弱序的关系系统.

定理 2 偏序的有限感知关系系统的决策函数必满足弱扩张和附属扩张条件.

证明 令 C 是偏序的有限感知关系系统 R 的一致决策函数, 且 C 不满足附属扩张条件, 即存在集合 $C(B) \subset A \subset B$, 方案 $x \in A$ 和 $x \in C(A)$, 但 $x \notin C(B)$. 又 $C = R\uparrow$, 因此 $x \in R\uparrow(A)$ 且 $x \notin R\uparrow(B)$, 即存在 $y_1 \in B$ 满足 $y_1 R_B x$.

如果 $y_1 \in A$, 那么 $y_1 R_A x$, 这与 $x \in R\uparrow(A)$ 矛盾. 因此 $y_1 \notin A$, 则 $y_1 \notin C(B) = R\uparrow(B)(C(B) \subset A)$. 于是, 必存在 $y_2 \in B$ 满足 $y_2 R_B y_1 R_B x$, 又由偏序的传递性可得 $y_2 R_B x$. 按照此方法可以一直推理下去, 并构造一个集合 $D = \{y_1, y_2, \cdots\} \subset B$ 满足 $y_{k+1} R_B y_k$ (其中 $k = 1, 2, \cdots$) 和 $y_{k+1} R_D y_k$. 如果 B 是一个有限集, 则此推理过程到第 i 步时必结束, 此时应有 $y_i \in C(B)$ 和 $y_i \notin A$, 这与 $C(B) \subset A$ 矛盾; 如果 B 是一个无限集, 则 $C(D) \subset R\uparrow(D) = \emptyset$ 与决策函数的 “决定性” 公理矛盾, 所以决策函数 C 必满足附属扩张条件.

另外, 根据定理 1 和偏序的定义, C 也满足弱扩张条件.

定理 3 弱序的有限感知关系系统的决策函数必满足强扩张条件.

证明 令 C 是一弱序的有限感知关系系统 R 的一致决策函数, 且 C 不满足强扩张条件, 即存在集合 $A \subset B$ 满足方案 $x \in C(B) \cap A$ 和 $y \in C(A)$ 但 $y \notin C(B)$. 因为 $C = R\uparrow$, 因此有 $x \in R\uparrow(B)$、$y \notin R\uparrow(B)$ 和 $y \in R\uparrow(A)$, 即 $y\overline{R}_B x$ 和 $x\overline{R}_A y$, 于是 $x\overline{R}_B y$, 则有 $y(R_B)^0 x$. 此外, 还必存在一个方案 $z \in B$ 满足 $z R_B y (R_B)^0 x$. 由于 R 是弱序, 即满足负传递性, 它也必满足交叉传递性, 因此 $z R_B x$, 于是 $x \notin C(B)$, 这与 $x \in C(B)$ 矛盾. 所以 C 必满足强扩张条件.

上面定理 1 至 3 表明了三种常见偏好序的有限感知关系系统的决策函数的存在性及其理性特征. 其中, 定理 1 是充要条件, 而定理 2 和 3 是必要条件, 这是因为有限感知关系系统中 $A \subset B$ 和 $x\overline{R}_A y \Rightarrow x\overline{R}_B y$, 但反向推理是不成立的.

定理 4 上述定理 1 至 3 中的有限感知关系系统的决策函数一般不满足收缩、基本非循环、分离非循环和单一性等条件, 即

1) 收缩 (Contraction): $A \subset B \Rightarrow C(B) \cap A \subset C(A)$[13];

2) 单一性 (Univalence): $A \neq \emptyset \Rightarrow |C(A)| = 1$[14];

3) 基础非循环 (Base acyclicity): $\left(P^b\right)^* \subset \overline{I}$[8];

4) 分离非循环 (Separation acyclicity): $(P^s)^* \subset \overline{I}$[8].

证明 检验下面表 4 中例子的相关条件可以证明该定理, 这里从略.

上述强扩张和单一性条件实际上隐含地要求决策函数满足 “收缩” 条件, 因此满足强扩张和单一性条件的决策函数必是一种完全感知关系系统的一致决策函数, 具体讲就是线性序的决策函数[5]. 表 4 给出了分别满足定理 1–3 的决策函数和偏好关系系统的案例, 所有案例都以 4 个方案的选择问题 $X = [wxyz]$ 为对象,

分别根据定理 1–3 对含有 2–4 个备选方案的每个子问题都给出了决策结果, 并在每个案例的下方标明了相应选择函数满足和违反的条件.

从表 4 中可以发现, 第 1 行案例 (对应于定理 1) 中的子决策问题 $[xy]$ 与其扩展问题 $[xyz]$, 决策者的显示偏好分别是 $xR_{[xy]}y$ 与 $yR_{[xyz]}x$, $yR_{[xyz]}z$, 显然决策者对 x 和 y 在决策问题 $[xy]$ 与 $[xyz]$ 中的显示偏好是不一致的, 可解释为对于该决策者而言 x 和 y 在决策问题 $[xyz]$ 中是不可比的. 相类似的情况还有子问题 $[yz]$ 与其扩展问题 $[wyz]$. 在表 4 的第 2 行案例 (对应于定理 2) 中, 决策者对子决策问题 $[wx]$ 及其扩展问题 $[wxy]$ 的显示偏好也是不一致的, 读者可以自验. 这些偏好不一致的原因在于 "有限感知下增加一个新方案不会使决策更简单", 也可解释为 "增加一个新方案可以为决策者提供一个新参考系, 使其对之前的备选方案进行重新评估". 因此从完全感知决策的角度思考, 将上面子决策问题中的偏好关系直接推广到扩展问题中, 就有可能造成关系系统违反非循环性或者出现不一致显示偏好; 但从有限感知决策考虑, 子决策问题中的偏好关系不能推广到扩展问题中, 这是二种感知决策的区别.

表 4　4 个方案的有限感知决策例子

	wx	wy	wz	xy	xz	yz	wxy	wxz	wyz	xyz	$wxyz$
Proto 序	$[w]$	$[y]$	$[wz]$	$[x]$	$[z]$	$[y]$	$[x]$	$[wxz]$	$[yz]$	$[y]$	$[xyz]$
	满足弱扩张条件; 违反收缩、附属扩张、强扩张、单一性、基础非循环、分离非循环条件										
偏序	$[w]$	$[y]$	$[w]$	$[x]$	$[x]$	$[yz]$	$[xy]$	$[w]$	$[yz]$	$[x]$	$[xy]$
	满足弱扩张、附属扩张条件; 违反收缩、强扩张、单一性、基础非循环、分离非循环条件										
弱序	$[x]$	$[y]$	$[z]$	$[x]$	$[z]$	$[yz]$	$[xy]$	$[xz]$	$[yz]$	$[xyz]$	$[xyz]$
	满足弱扩张、附属扩张、强扩张条件; 违反收缩、单一性、基础非循环、分离非循环条件										

表 4 中的案例描述了一些现实决策问题, 即当决策者只具有有限感知时, 他对某些方案对的偏好会存在不一致性, 或者说他对某些方案对的偏好会因为新方案的加入而发生改变. 因此定理 1–3 在一定程度上可用来解释一些有限理性的决策行为. 进一步地, 表 4 中的案例也可以看作是一种人工智能中的 "推理规则", 如第 1 行的案例可以解释为 "If w and x, then w", "If w, x and y, then x", 等等. 因此, 本文的研究也可以用来分析和评价一些具体的人工智能推理函数和规则的合理性, 如完备性、一致性和存在性等.

6　结论

从探究经济表象背后的 "理性不及" 的认知因素入手, 对有限感知决策行为进行公理化建模和分析, 并从诠释和理解人类行为内在意义的角度来研究基于有限感知偏好的决策主体如何进行理性决策, 这种对决策主体行为的分析和公理性诠释正是不确定性决策的理论基础之一. 本文借助传统的建模方法, 分析和比较了一类基于感知的有限理性和完全理性决策中隐含的规律和特点, 主要结论有:

1) 完全理性下的决策是建立在 "全集合" 上的 "全局关系系统", 具有 "双向" 一致性; 而有限理性则对应于 "子集合" 上的 "局部关系系统", 即内在偏好的一部分, 仅满足向 "上" 一致性, 这是造成其显示偏好不一致的原因.

2) 如果将子决策问题中的偏好按照常规逻辑推广到扩展问题中, 则可能造成关系系统违反非循环性或者出现不一致, 这在完全理性看来是一种矛盾或悖论; 但从有限理性考虑, 这种推广是不成立的, 因为通常情形下增加一个新方案不会使选择更简单, 或者说新方案的增加会使问题变得复杂而导致决策者感知不到原 (子) 问题上的某些偏好.

3) 两种理性决策均以 "最大化" 为准则, 所不同的是, 有限理性下的决策具有 "主观最优, 客观满意" 的特点, 且 "一个方案比另一个方案更好" 的偏好不能够得出 "当存在第一个方案时, 第二个方案绝对不可以被选择" 的结论, 是有限感知决策区别于完全感知决策的一个特点.

在一类自然灾害、事故灾难、公共卫生和社会安全等领域的公共突发事件中的决策符合本文讨论的 "有限理性" 决策特点, 即 "在危机情景下决策者并不具有有关危机的全面信息; 可利用的时间和资源有限, 难以在短时间内识别危机的根源; 信息处理能力有限, 危机状态下的特殊环境会使决策团体的内在群体压力升高, 以致出现群体盲思, 影响决策者的正确判断". 进一步与认知心理学常用的问卷测试方法相结合, 从理性分析出发, 本文的研究可应用于突发事件下决策者应急决策能力的评价, 以及应急管理人才的培养、选拔与训练.

这方面的研究将是下一步的工作.

参考文献

[1] Simon H A. Behavioral model of rational choice[J]. Quarterly Journal of Economics, 1955, 69: 99–120.
[2] Allais M, Hagen J. Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox[M]. Dordrecht, Netherlands: Reidel, 1979.
[3] Kahneman D, Tversky A. The psychology of preferences[J]. Scientific American, 1982, 246(1): 160–170.
[4] Stirling W C. Satisfying Games and Decision Making: With Applications to Engineering and Computer Science[M]. United Kingdom: Cambridge University Press, 2003.
[5] Johnson F R, Hill J C, Archibald J K, et al. A satisfying approach to free flight[J]. Networking, Sensing and Control, 2005, 19–22: 123–128.
[6] 阿里尔 · 鲁宾斯坦. 有限理性建模 [M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2005.
Rubinstein A. Bounded Rationality Modeling[M]. Beijing: China Renmin University Press, 2005.
[7] Castelfranchi C, Giardini F, Marzo F. Symposium on "cognition and rationality: Part I" relationships between rational decisions[J]. Human Motives, and Emotions, Mind & Society, 2006, 5: 173–197.
[8] Tyson C J. Cognitive constraints, contraction consistency, and the satisfying criterion[J]. Journal of Economic Theory, 2008, 138(1): 51–70.
[9] 郭耀煌, 郭强, 刘家诚, 等. 格序决策 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2003.
Guo Y H, Guo Q, Liu J C, et al. Lattice Order Decision Making[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 2003.
[10] Gilboa I, Schmeidler D. Case-based knowledge and induction[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. 2000, 3(4): 203–215.
[11] Hullermeier E. Experience-based decision making: A satisfying decision tree approach[J]. Systems, Man and Cybernetics, 2005, 35(5): 641–653.
[12] 罗云峰, 肖人彬. 社会选择的理论与进展 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
Luo Y F, Xiao R B. Theory and Progress of Social Selection[M]. Beijing: Science Press, 2003.
[13] Herzberger H G. Ordinal preference and rational choice[J]. Econometrica, 1973, 41(2): 197–237.
[14] Sen A K. Quasi-transitivity, rational choice, and collective decisions[J]. Review of Economic Studies, 1969, 36(3): 381–393.
[15] Sen A K. Choice functions and revealed preference[J]. Review of Economic Studies, 1971, 38(3): 307–317.