

第二章 压力容器应力分析

CHAPTER II STRESS ANALYSIS OF PRESSURE VESSELS

2.2 回转薄壳应力分析

本章重点

教学重点:

- (1) 回转薄壳的无力矩理论;
- (2) 微元平衡方程、区域平衡方程;
- (3) 回转薄壳的不连续分析。

教学难点:

- (1) 储存液体的圆球壳;
- (2) 圆柱壳受边缘力和边缘力矩作用的弯曲解。

2.2 回转薄壳应力分析

2.2.1 薄壁圆筒的应力

2.2.2 回转薄壳的无力矩理论

2.2.3 无力矩理论的基本方程

2.2.4 无力矩理论的应用

2.2.5 回转薄壳的不连续分析

2.2 回转薄壳应力分析

概念

壳体

以两个曲面为界，且曲面之间的距离远比其它方向尺寸小得多的构件。

壳体中面

与壳体两个曲面等距离的点所组成的曲面。

薄壳

壳体厚度 t 与其中面曲率半径 R 的比值 $(t/R)_{\max} \leq 1/10$ 。

薄壁圆柱壳或薄壁圆筒

外直径与内直径的比值

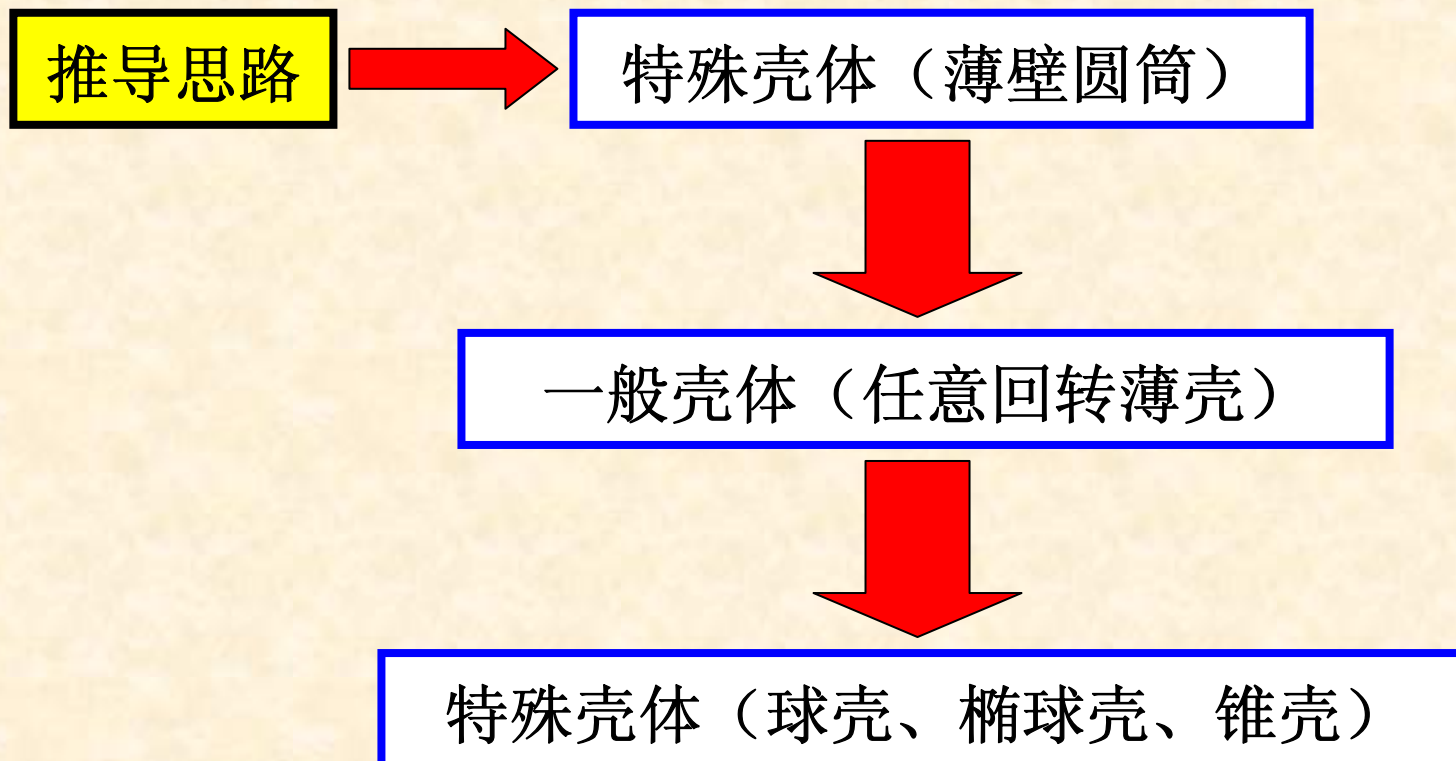
$$(D_o/D_i)_{\max} \leq 1.1-1.2$$

厚壁圆柱壳或厚壁圆筒

外直径与内直径的比值

$$(D_o/D_i)_{\max} > 1.1-1.2$$

2.2 回转薄壳应力分析



2.2.1 薄壁圆筒的应力

基本假设

壳体材料连续、均匀、各向同性；
 受载后的变形是弹性小变形；
 壳壁各层纤维在变形后互不挤压。

典型的
薄壁圆筒

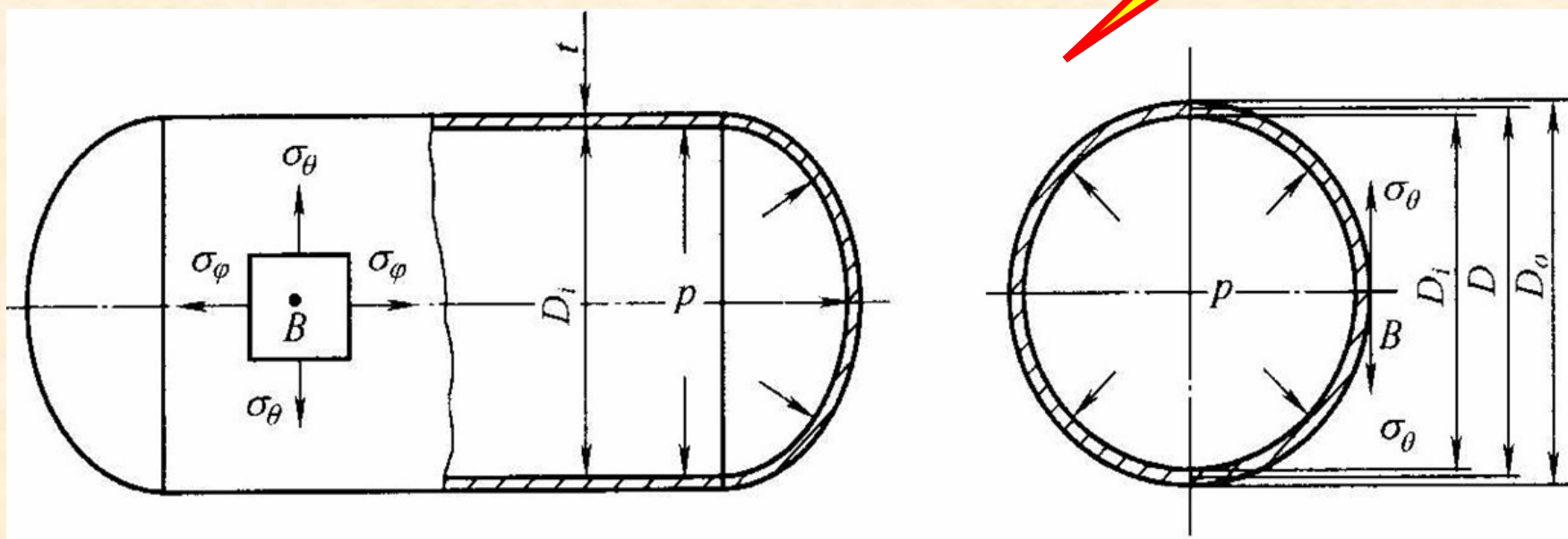
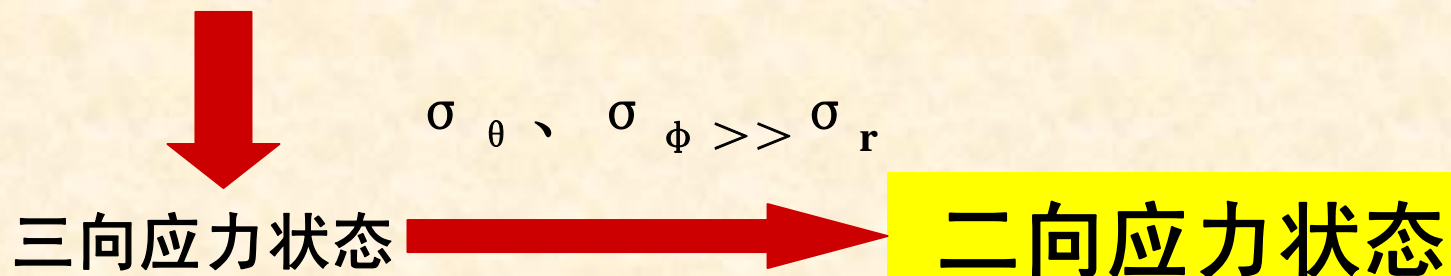
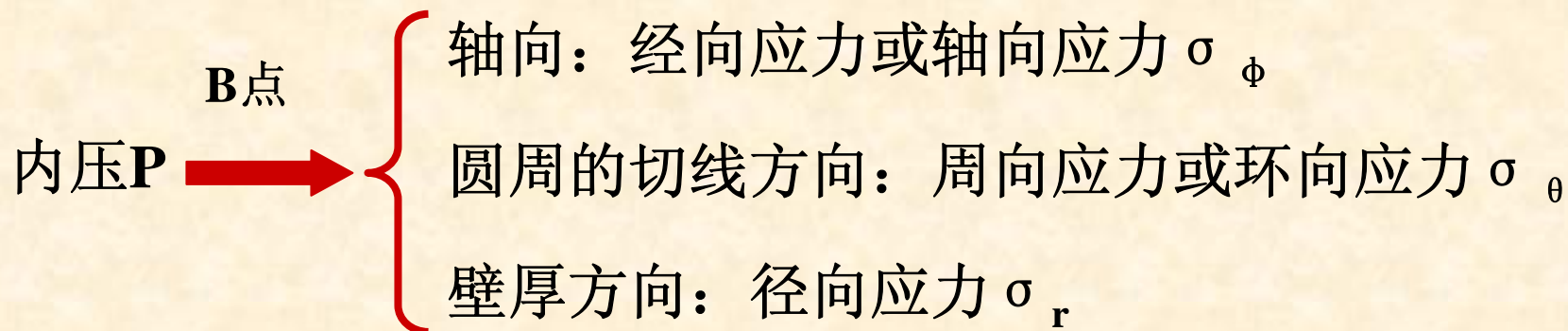


图2-1 薄壁圆筒在内压作用下的应力

2.2.1 薄壳圆筒的应力（续）

B点受力分析



2.2.1 薄壳圆筒的应力（续）

截面法

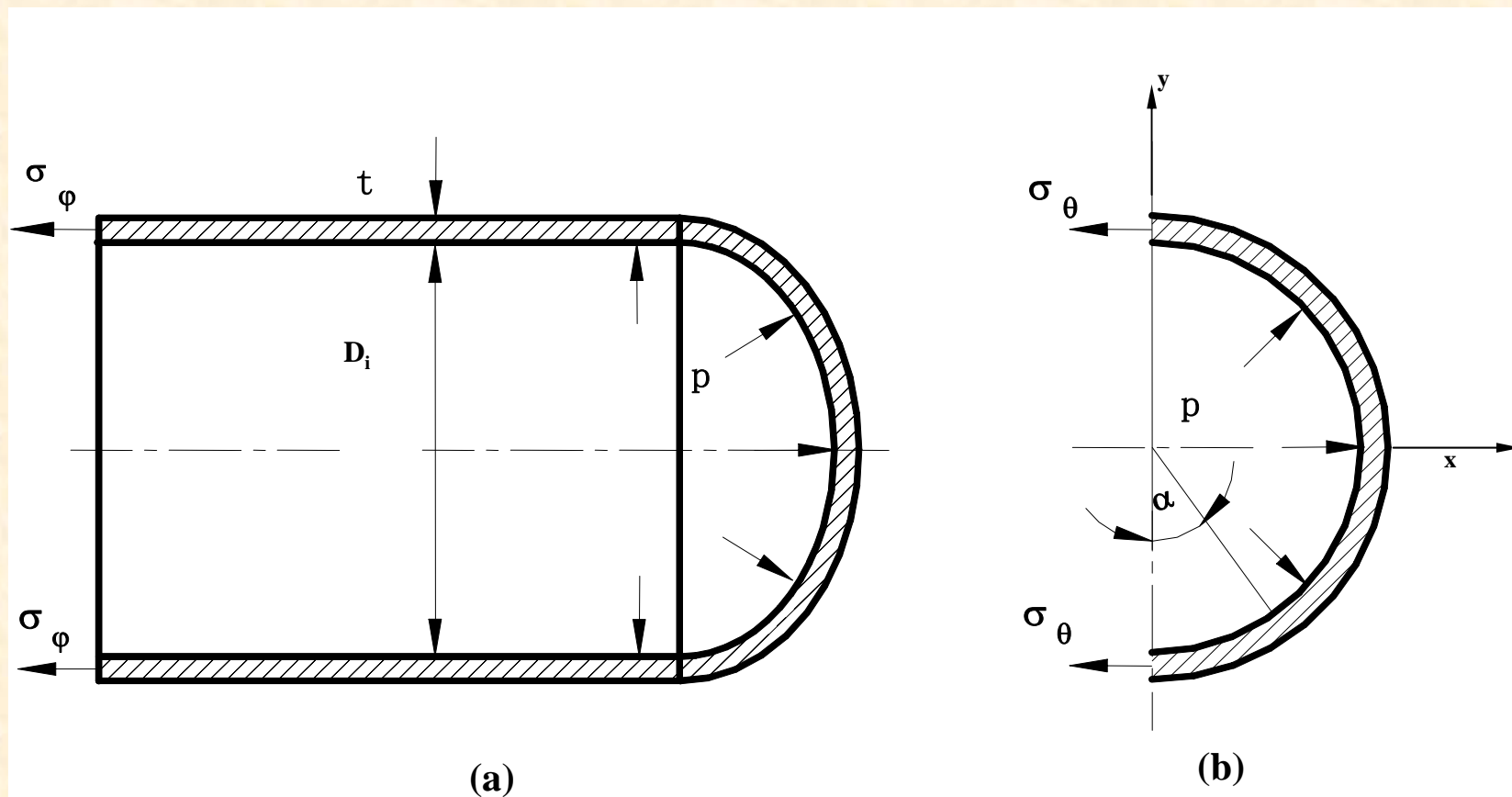


图2-2 薄壁圆筒在压力作用下的力平衡

2.2.1 薄壳圆筒的应力（续）

应力
求解

静定

图2-2

轴向平衡

$$\frac{\pi}{4} D^2 p = \pi D t \sigma_{\varphi}$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{pD}{4t}$$

周向平衡

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p R_i \sin \alpha d\alpha = 2t \sigma_{\theta}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{pD}{2t}$$

$$\sigma_{\theta} = 2\sigma_{\varphi}$$

2.2 回转薄壳应力分析

2.2.1 薄壁圆筒的应力

2.2.2 回转薄壳的无力矩理论

2.2.3 无力矩理论的基本方程

2.2.4 无力矩理论的应用

2.2.5 回转薄壳的不连续分析

2.2.2 回转薄壳的无力矩理论

一、回转薄壳的几何要素

回转薄壳： 中面是由一条平面曲线或直线绕同平面内的轴线回转360°而成。

母线： 绕轴线（回转轴）回转形成中面的平面曲线或直线。

极点： 中面与回转轴的交点。

经线平面： 通过回转轴的平面。

经线： 经线平面与中面的交线。

平行圆： 垂直于回转轴的平面与中面的交线称为平行圆。

2.2.2 回转薄壳的无力矩理论（续）

法线：

过中面上的点且垂直于中面的直线称为中面在该点的法线。法线必与回转轴相交。

第一主曲率
半径 R_1 ：

经线上点的曲率半径。

第二主曲率
半径 R_2 ：

垂直于经线的平面与中面交线上点的曲率半径。

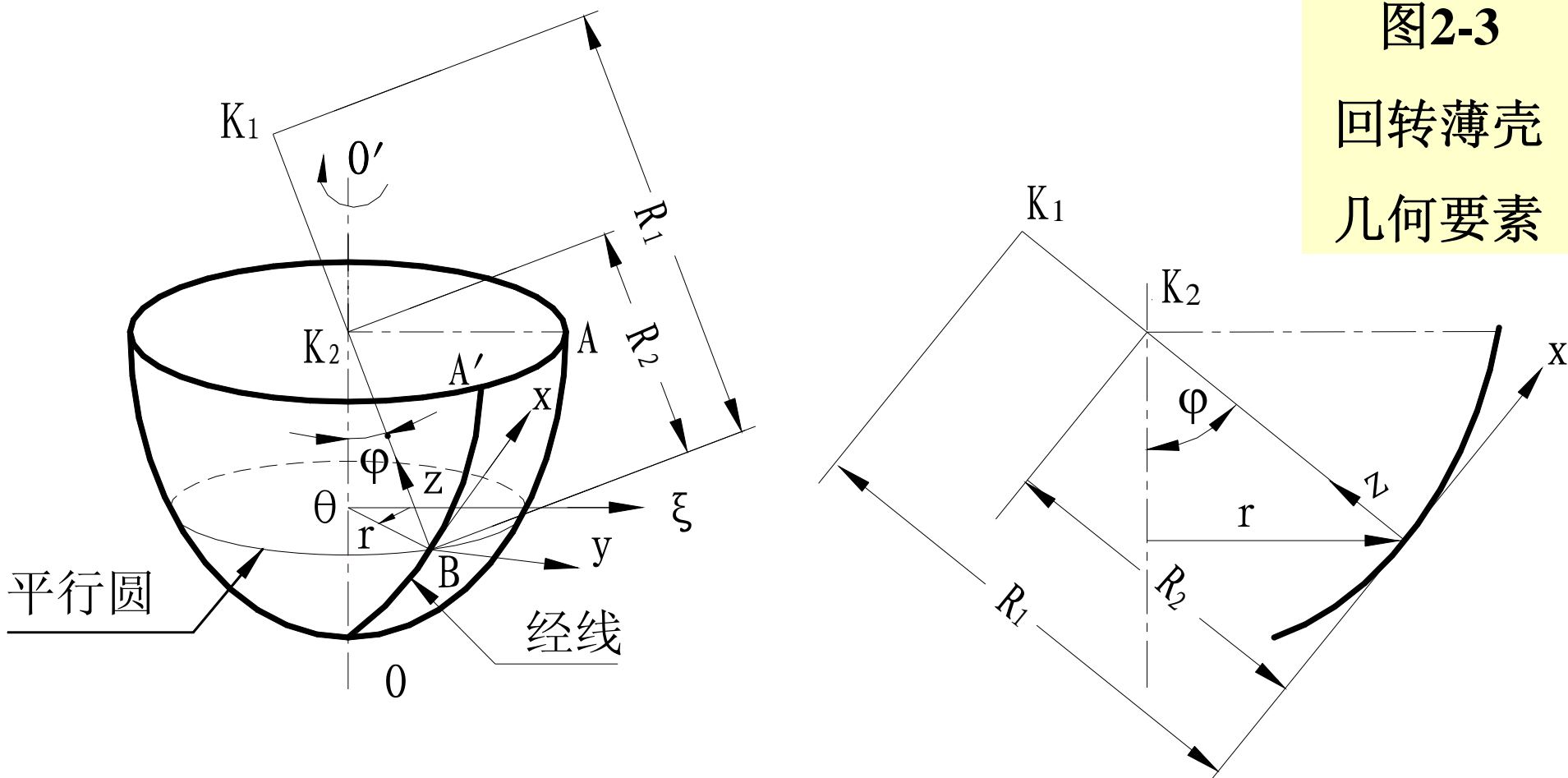
等于考察点**B**到该点法线与回转轴交点 K_2 之间长度（ K_2B ）

平行圆半径 r ：

平行圆半径。

2.2.2 回转薄壳的无力矩理论 (续)

图2-3

回转薄壳
几何要素

同一点的第一与第二主曲率半径都在该点的法线上。

曲率半径的符号判别：曲率半径指向回转轴时，其值为正，反之为负。

r 与 R_1 、 R_2 的关系： $r = R_2 \sin \varphi$

2.2.2 回转薄壳的无力矩理论 (续)

二、无力矩理论与有力矩理论

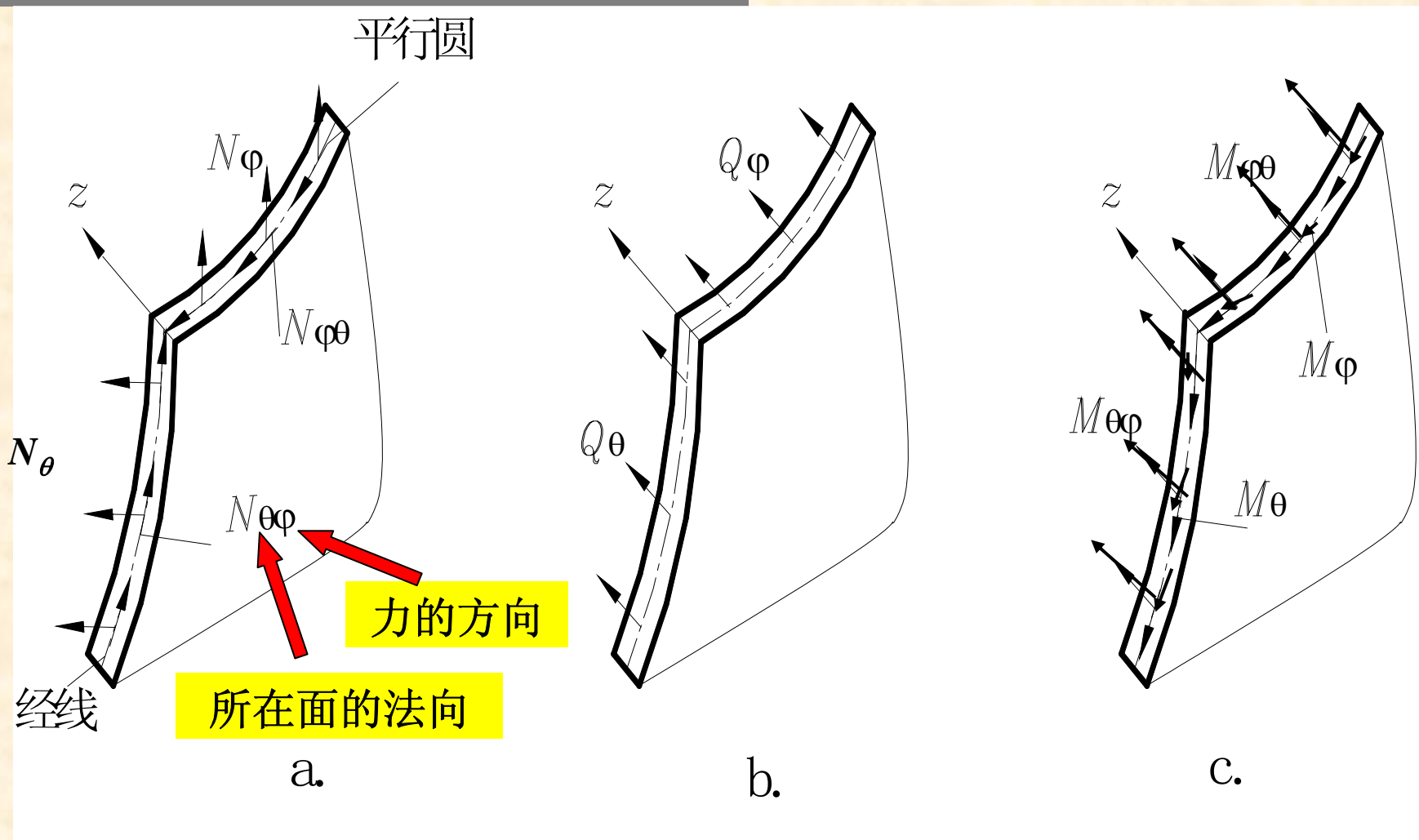
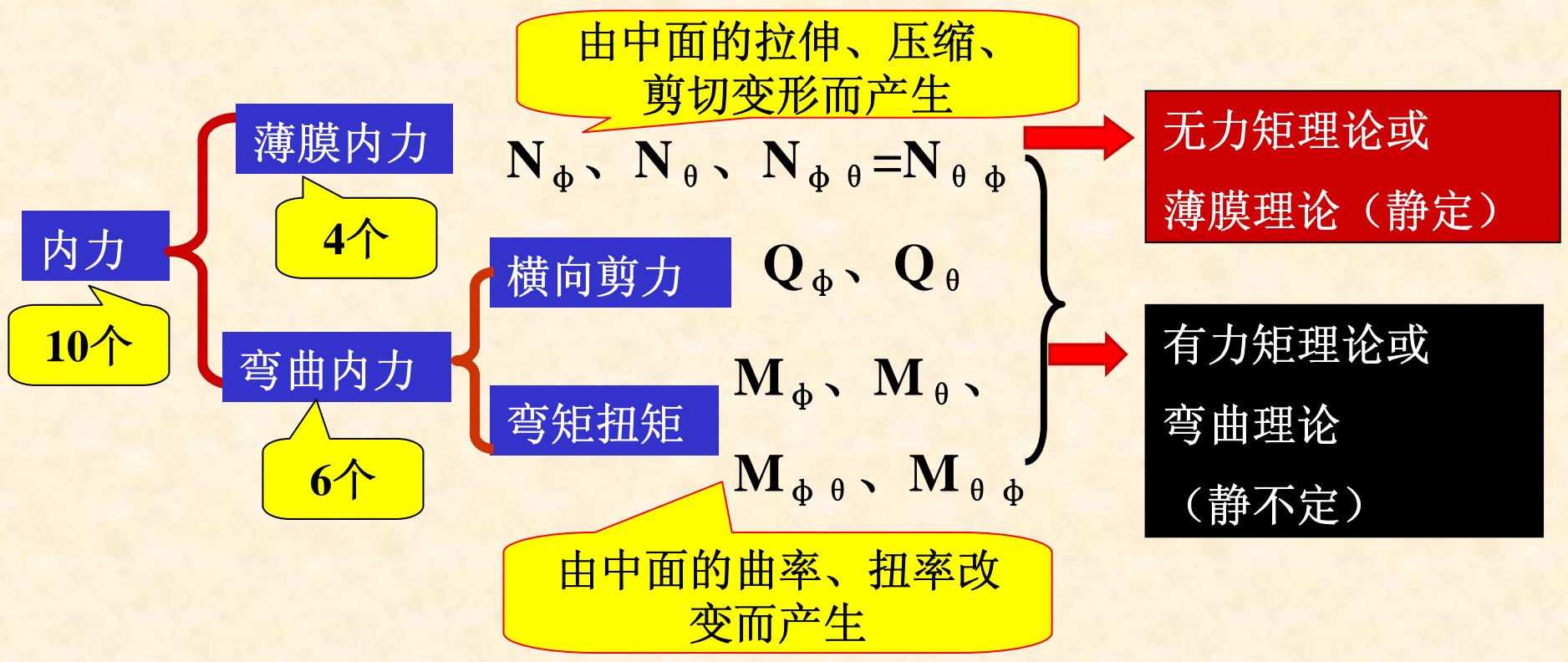


图2-4 壳中的内力分量



无力矩理论所讨论的问题都是围绕着中面进行的。因壁很薄，沿壁厚方向的应力与其它应力相比很小，其它应力不随厚度而变，因此中面上的应力和变形可以代表薄壳的应力和变形。

2.2 回转薄壳应力分析

2.2.1 薄壁圆筒的应力

2.2.2 回转薄壳的无力矩理论

2.2.3 无力矩理论的基本方程

2.2.4 无力矩理论的应用

2.2.5 回转薄壳的不连续分析

2.2.3 无力矩理论的基本方程

求解思路

1. 取微元 \rightarrow 力分析 \rightarrow 法线方向: 内力=外力 \rightarrow 微元平衡方程
2. 取区域 \rightarrow 力分析 \rightarrow 轴线方向: 内力=外力 \rightarrow 区域平衡方程

σ	ϕ
σ	θ

2.2.3 无力矩理论的基本方程

一、壳体微元及其内力分量

微元体

a b c d

经线ab弧长

$$dl_1 = R_1 d\varphi$$

截线bd长

$$dl_2 = r d\theta$$

微元体abcd的面积

$$dA = R_1 r d\varphi d\theta$$

压力载荷

$$p = p(\varphi)$$

微元截面上内力

$$N_\varphi (= \sigma_\varphi t) \quad , \quad N_\theta (= \sigma_\theta t)$$

2.2.3 无力矩理论的基本方程 (续)

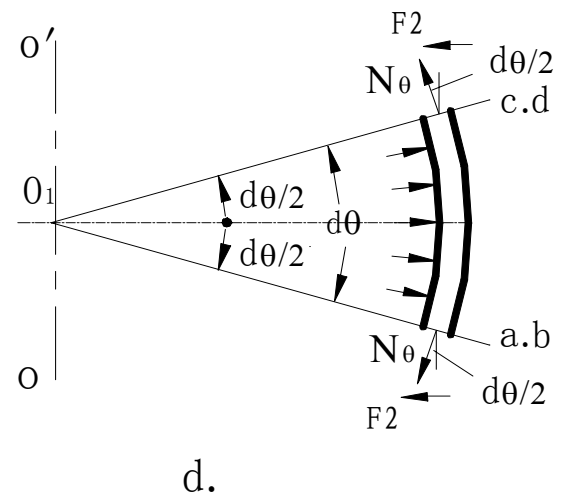
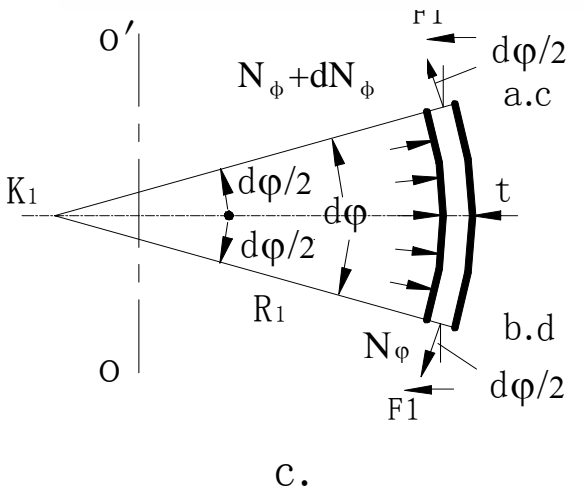
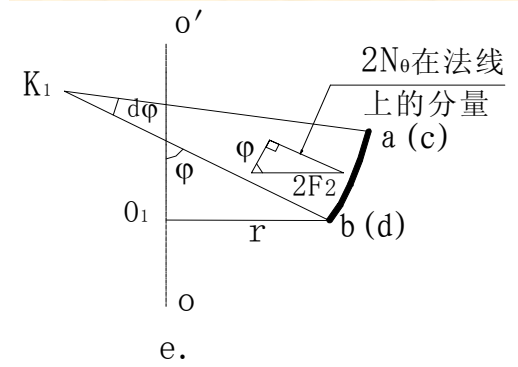
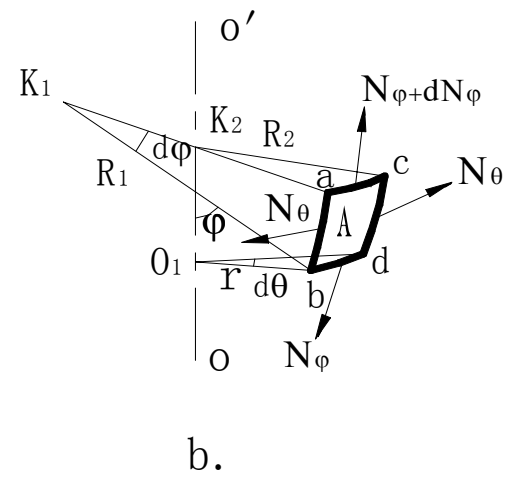
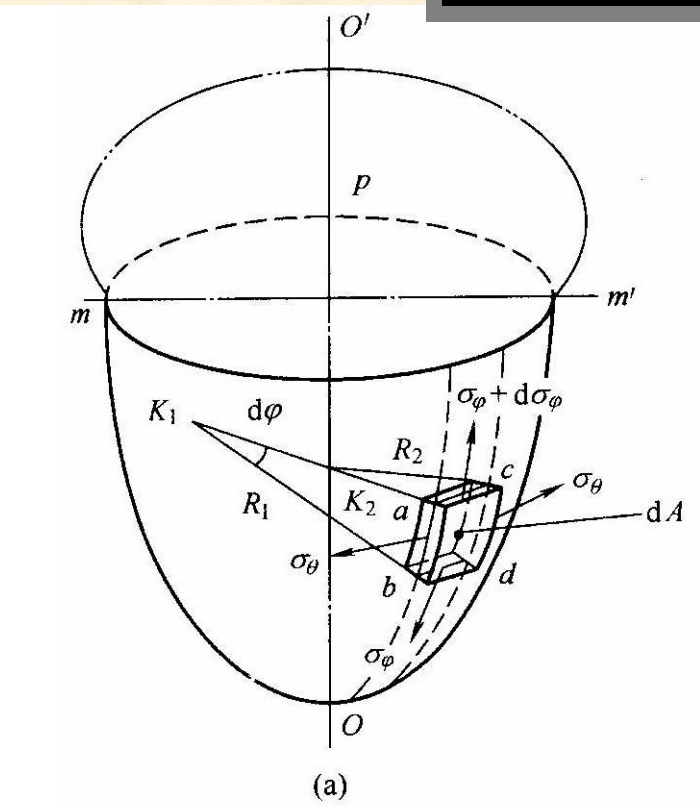


图2-5
微元体的力平衡

2.2.3 无力矩理论的基本方程（续）

二、微元平衡方程（图2-5）

目标

经向方向上的力在法线上的投影

+

周向方向上的力在法线上的投影

=

微元上
承受的
压力

2.2.3 无力矩理论的基本方程（续）

二、微元平衡方程（图2-5）

1. 经向力 N_ϕ 在法线上的投影

由图2-5（c）知，经向内力 N_ϕ 和 $N_\phi + dN_\phi$ 在法线上分量：

$$\begin{aligned} & N_\phi \sin \frac{d\phi}{2} + (N_\phi + dN_\phi) \sin \frac{d\phi}{2} \\ &= \sigma_\phi t r d\theta \sin \frac{d\phi}{2} + (\sigma_\phi + d\sigma_\phi) t (r + dr) d\theta \sin \frac{d\phi}{2} \end{aligned}$$

将 $\sin \frac{d\phi}{2} \approx \frac{d\phi}{2}$ ， $r = R_2 \sin \phi$ 代入上式，并略去高阶微量

$$\sigma_\phi t R_2 \sin \phi d\phi d\theta \quad (\text{a})$$

2.2.3 无力矩理论的基本方程（续）

二、微元平衡方程（图2-5）

2. 周向力 N_{θ} 在法线上的投影

(1) 投影在平行圆方向

由图2-5（d）中ac截面知，周向内力在平行圆方向的分量为

$$2N_{\theta} \sin \frac{d\theta}{2} = 2\sigma_{\theta} t R_1 d\varphi \sin \frac{d\theta}{2}$$

(2) 将上面分量投影在法线方向得：

$$\begin{aligned} 2N_{\theta} \sin \frac{d\theta}{2} \times \sin \varphi &= 2\sigma_{\theta} t R_1 d\varphi \sin \frac{d\theta}{2} \sin \varphi \\ &= \sigma_{\theta} t R_1 d\varphi \sin d\theta \sin \varphi \end{aligned}$$

(b)

2.2.3 无力矩理论的基本方程（续）

二、微元平衡方程（图2-5）

$$\text{令 } \sin \frac{d\varphi}{2} = d\varphi \quad \sin d\theta = d\theta$$

微体法线方向的力平衡

$$\sigma_{\varphi} t R_2 \sin \varphi d\varphi d\theta + \sigma_{\theta} t R_1 d\varphi d\theta \sin \varphi = p R_1 R_2 \sin \varphi d\varphi d\theta$$

(2-3)

$$\frac{\sigma_{\varphi}}{R_1} + \frac{\sigma_{\theta}}{R_2} = \frac{p}{t}$$

■ 微元平衡方程。又称拉普拉斯方程。

2.2.3 无力矩理论的基本方程（续）

三、区域平衡方程（图2-6）

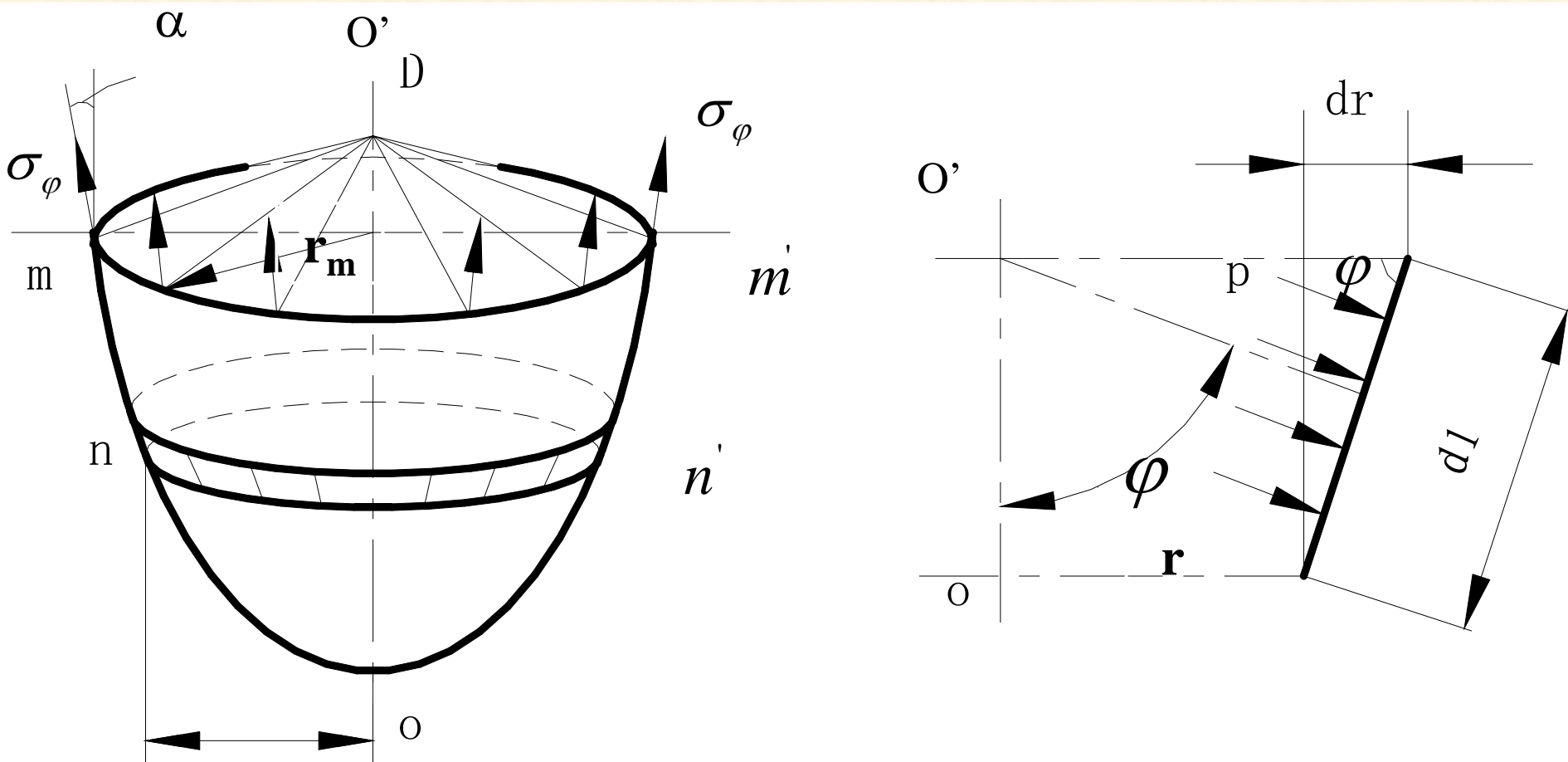


图2-6 部分容器静力平衡

2.2.3 无力矩理论的基本方程（续）

三、区域平衡方程（图2-6）（续）

压力在O-O' 轴方向产生的合力

$$V = 2\pi \int_0^{r_m} p r dr$$

作用在截面m-m' 上内力的轴向分量

$$V' = 2\pi r_m \sigma_\varphi t \cos \alpha$$

区域平衡方程式

$$V = V' = 2\pi r_m \sigma_\varphi t \cos \alpha$$

(2-4)

通过式 (2-4) 可求得 σ_φ ，代入式 (2-3) 可解出 σ_θ

微元平衡方程与区域平衡方程是无力矩理论的两个基本方程

2.2 回转薄壳应力分析

2.2.1 薄壁圆筒的应力

2.2.2 回转薄壳的无力矩理论

2.2.3 无力矩理论的基本方程

2.2.4 无力矩理论的应用

2.2.5 回转薄壳的不连续分析

2.2.4 无力矩理论的应用

◇分析几种工程中典型回转薄壳的薄膜应力:

承受气体内压的回转薄壳

球形壳体

薄壁圆筒

锥形壳体

椭球形壳体

储存液体的回转薄壳

圆筒形壳体

球形壳体

2.2.4 无力矩理论的应用（续）

一、承受气体内压的回转薄壳

回转薄壳仅受气体内压作用时，各处的压力相等，压力产生的轴向力V为：

$$V = 2\pi \int_0^{r_m} pr dr$$

$$= \pi r_m^2 p$$



由式（2-4）得：

$$\sigma_{\varphi} = \frac{V}{2\pi r_m t \cos \alpha} = \frac{pr_m}{2t \cos \alpha} = \frac{pR_2}{2t} \quad (2-5)$$

将式（2-5）代入
式（2-3）得：

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\varphi} \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (2-6)$$

2.2.4 无力矩理论的应用（续）

a. 球形壳体

球形壳体上各点的第一曲率半径与第二曲率半径相等，

$$\text{即 } \mathbf{R_1=R_2=R}$$

将曲率半径代入式（2-5）和式（2-6）得：

$$\sigma_{\varphi} = \sigma_{\theta} = \sigma = \frac{pR}{2t} \quad (2-7)$$

2.2.4 无力矩理论的应用（续）

b. 薄壁圆筒

薄壁圆筒中各点的第一曲率半径和第二曲率半径分别为

$$R_1 = \infty; R_2 = R$$

将 R_1 、 R_2 代入（2-5）和式（2-6）得：

$$\sigma_{\theta} = \frac{pR}{t}, \quad \sigma_{\varphi} = \frac{pR}{2t} \quad (2-8)$$

$$\sigma_{\theta} = 2\sigma_{\varphi}$$

薄壁圆筒中，周向应力是轴向应力的2倍

2.2.4 无力矩理论的应用 (续)

c. 锥形壳体

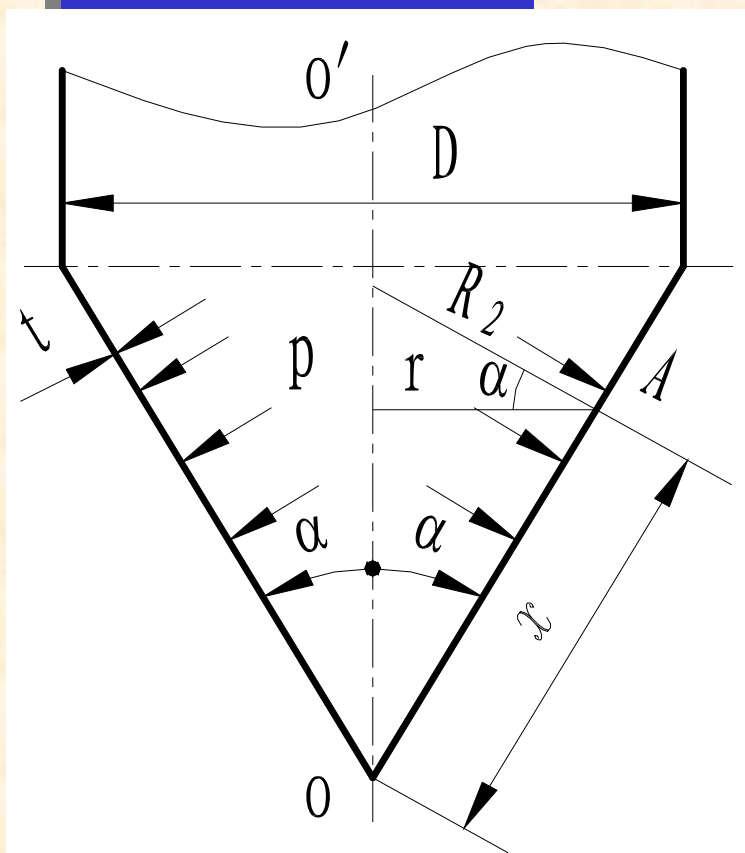


图2-7

锥形壳体的应力

$$R_1 = \infty \quad R_2 = x \tan \alpha$$



式 (2-5)、(2-6)

$$\sigma_{\theta} = \frac{pR_2}{t} = \frac{px \tan \alpha}{t} = \frac{pr}{t \cos \alpha}$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{px \tan \alpha}{2t} = \frac{pr}{2t \cos \alpha}$$

(2-9)

$$\sigma_{\theta} = 2\sigma_{\varphi}$$

2.2.4 无力矩理论的应用（续）

由式（2-9）可知：

①周向应力和经向应力与 x 呈线性关系，锥顶处应力为零，离锥顶越远应力越大，且周向应力是经向应力的两倍；

②锥壳的半锥角 α 是确定壳体应力的一个重要参量。

当 $\alpha \rightarrow 0^\circ$ 时，锥壳的应力 \rightarrow 圆筒的壳体应力。

当 $\alpha \rightarrow 90^\circ$ 时，锥体变成平板，应力 \rightarrow 无限大。

2.2.4 无力矩理论的应用（续）

d. 椭球形壳体

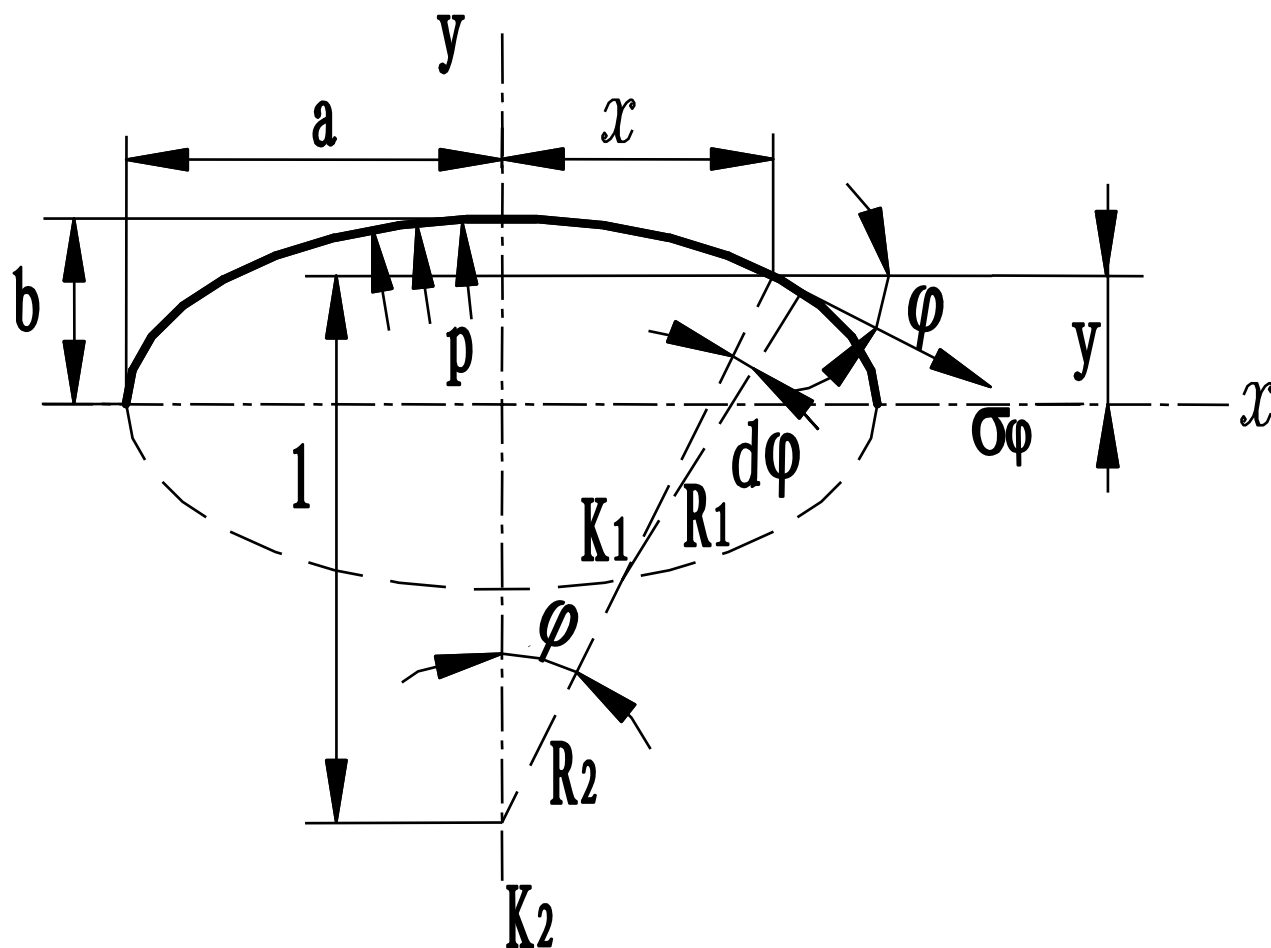


图2-8 椭球壳体的尺寸

2.2.4 无力矩理论的应用 (续)

推导思路:

式 (2-5) (2-6)

椭圆曲线方程

 R_1 和 R_2 $\sigma_\theta, \sigma_\varphi$

$$\sigma_\varphi = \frac{pR_2}{2t} = \frac{p}{2t} \frac{[a^4 - x^2(a^2 - b^2)]^{1/2}}{b}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p}{2t} \frac{[a^4 - x^2(a^2 - b^2)]^{1/2}}{b} \left[2 - \frac{a^4}{a^4 - x^2(a^2 - b^2)} \right]$$

(2-10)

又称胡金伯格方程

2.2.4 无力矩理论的应用 (续)

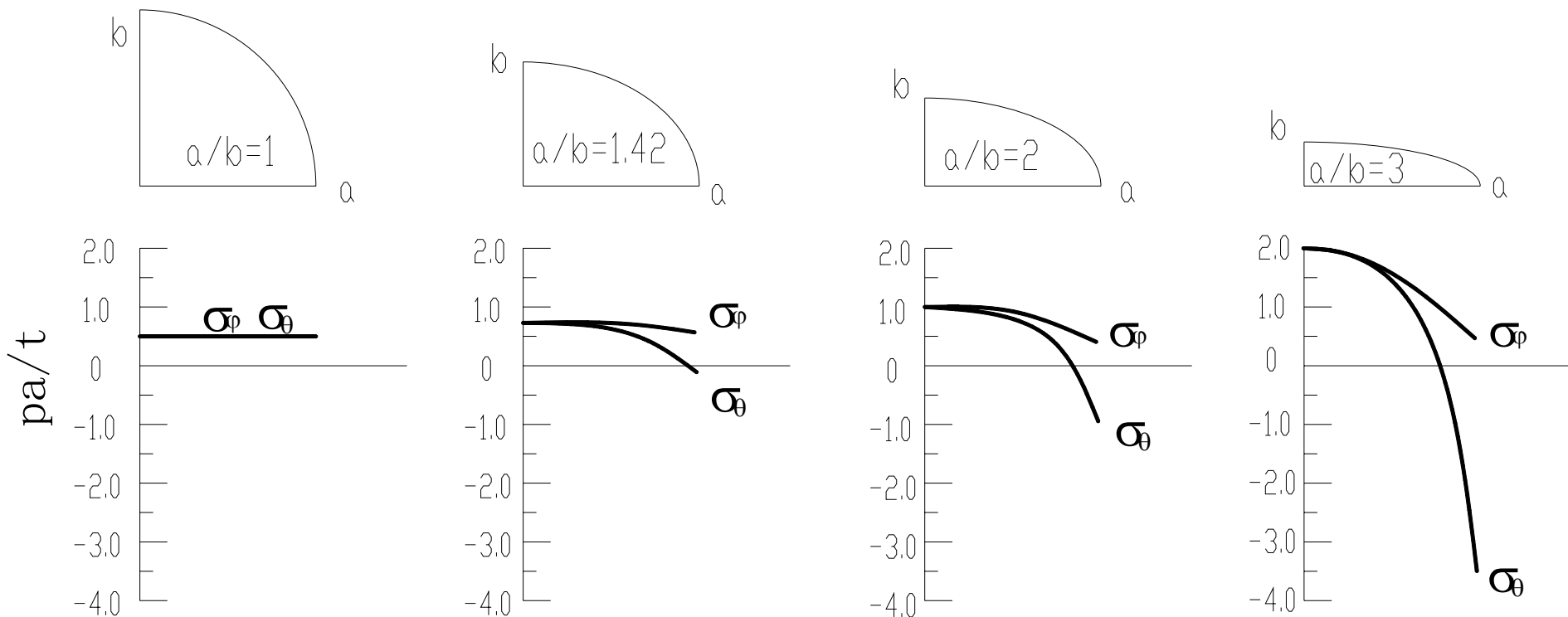


图2-9 椭球壳中的应力随长轴与短轴之比的变化规律

2.2.4 无力矩理论的应用（续）

从式（2-10）可以看出：

① 椭球壳上各点的应力是不等的，它与各点的坐标有关。

在壳体顶点处（ $x=0$ ， $y=b$ ）

$$R_1=R_2=\frac{a^2}{b}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta = \frac{pa^2}{2bt}$$

② 椭球壳应力与内压 p 、壁厚 t 有关，与长轴与短轴之比 a/b 有关

$a=b$ 时，椭球壳 \rightarrow 球壳，最大应力为圆筒壳中 σ_θ 的一半，

$a/b \nearrow$ ，椭球壳中应力 \nearrow ，如图2-9所示。

2.2.4 无力矩理论的应用（续）

③ 椭球壳承受均匀内压时，在任何 a / b 值下，

σ_{φ} 恒为正值，即拉伸应力，且由顶点处最大值向赤道逐渐递减至最小值。

当 $a/b > \sqrt{2}$ 时，应力 σ_{θ} 将变号。从拉应力变为压应力。

随周向压应力增大，大直径薄壁椭圆形封头出现局部屈曲。

措施：整体或局部增加厚度，局部采用环状加强构件。

2.2.4 无力矩理论的应用（续）

④工程上常用标准椭圆形封头，其 $a/b=2$ 。

σ_{θ} 的数值在顶点处和赤道处大小相等但符号相反，
即顶点处为 pa/t ，赤道上为 $-pa/t$ ，

σ_{φ} 恒是拉伸应力，在顶点处达最大值为 pa/t 。

2.2.4 无力矩理论的应用（续）

二、储存液体的回转薄壳
与壳体受内压不同，壳壁上液柱静压力随液层深度变化。

a. 圆筒形壳体

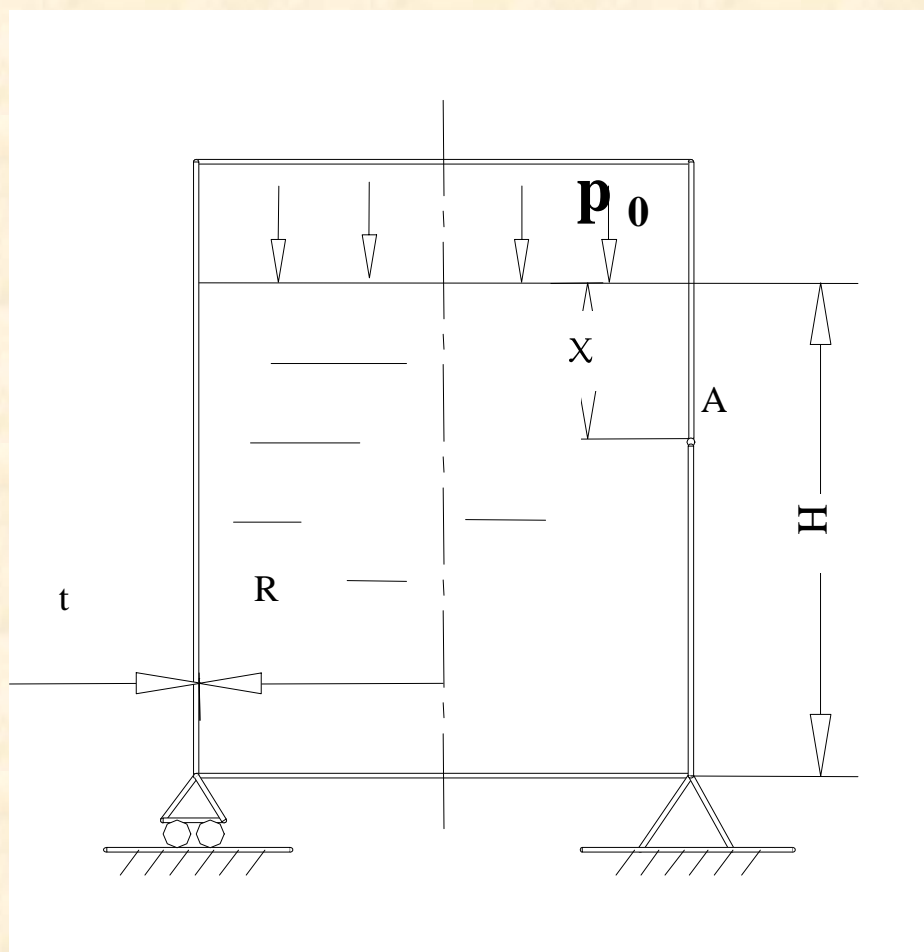


图2-10

储存液体的圆筒形壳体

2.2.4 无力矩理论的应用（续）

筒壁上任一点A承受的压力:

$$p = p_0 + \rho g x$$

由式 (2-8) 得

$$\sigma_{\theta} = \frac{(p_0 + \rho g x)R}{t} \quad (2-11a)$$

作垂直于回转轴的任一横截面，由上部壳体轴向力平衡得：

$$2\pi R t \sigma_{\varphi} = \pi R^2 p_0 \quad \longrightarrow \quad \sigma_{\varphi} = \frac{p_0 R}{2t} \quad (2-11b)$$

思考：若支座位置不在底部，应分别计算支座上下的轴向应力，如何求？

2.2.4 无力矩理论的应用（续）

b. 球形壳体

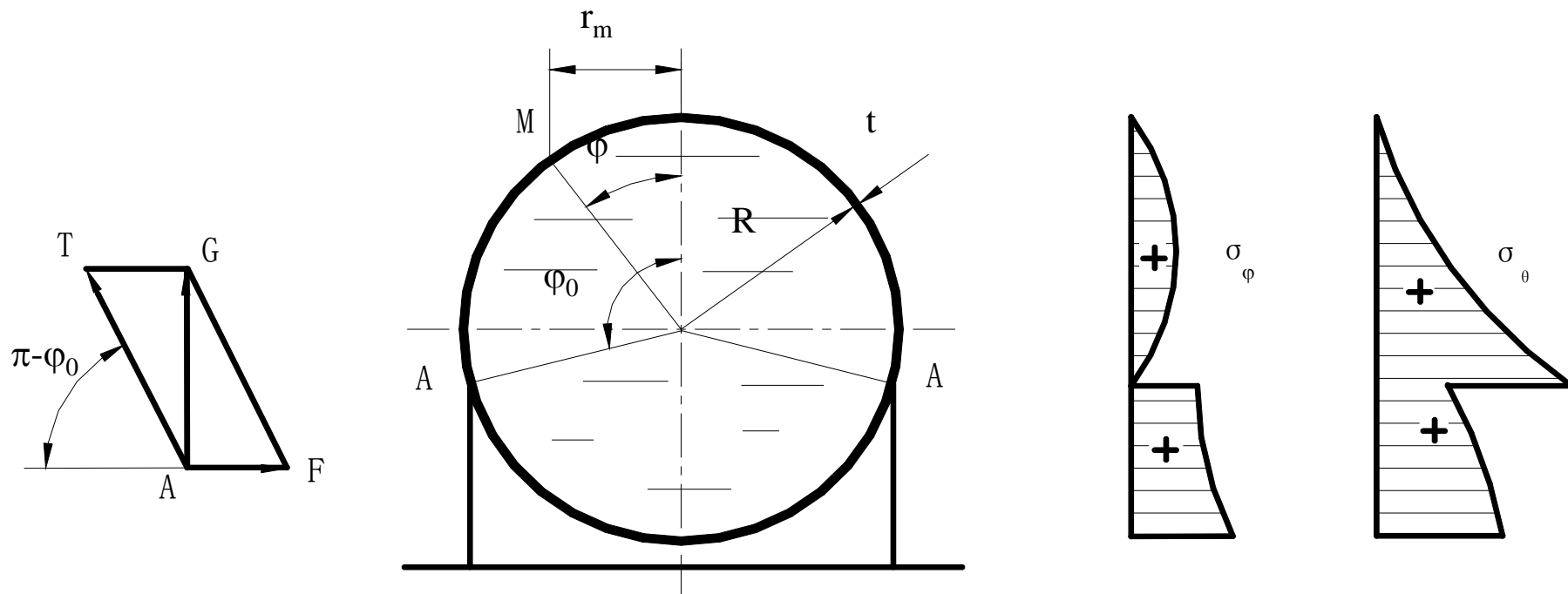


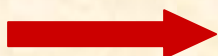
图2-11 储存液体的圆球壳

2.2.4 无力矩理论的应用（续）

当 $\varphi < \varphi_0$:

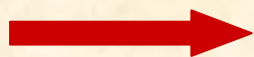
$$V = 2\pi \int_0^{r_m} pr dr$$

式(2-4)



$$\sigma_{\varphi} = \frac{\rho g R^2}{6t} \left(1 - \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} \right) \quad (2-12a)$$

式(2-3)



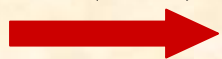
$$\sigma_{\theta} = \frac{\rho g R^2}{6t} \left(5 - 6 \cos \varphi + \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} \right) \quad (2-12b)$$

2.2.4 无力矩理论的应用 (续)

当 $\varphi > \varphi_0$:

$$V = 2\pi \int_0^{r_m} pr dr + \frac{4\pi}{3} R^3 \rho g$$

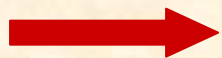
式(2-4)



$$\sigma_{\varphi} = \frac{\rho g R^2}{6t} \left(5 + \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 - \cos \varphi} \right)$$

(2-13a)

式(2-3)



$$\sigma_{\theta} = \frac{\rho g R^2}{6t} \left(1 - 6 \cos \varphi - \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 - \cos \varphi} \right)$$

(2-13b)

2.2.4 无力矩理论的应用（续）

比较式（2-12）和式（2-13），

支座处($\varphi=\varphi_0$): σ_φ 和 σ_θ 不连续，

突变量为：
$$\pm \frac{2\rho g R^2}{3t \sin^2 \varphi_0}$$

这个突变量，是由支座反力G引起的

支座附近的球壳发生局部弯曲，以保持球壳应力与位移的连续性。因此，支座处应力的计算，必须用**有力矩理论**进行分析，而上述用无力矩理论计算得到的壳体薄膜应力，只有远离支座处才与实际相符。

2.2.4 无力矩理论的应用（续）

三、无力矩理论应用条件

- ① 壳体的厚度、中面曲率和载荷连续，没有突变，且构成壳体的材料的物理性能相同。
- ② 壳体的边界处不受横向剪力、弯矩和转矩作用。
- ③ 壳体的边界处的约束可沿经线的切线方向，不得限制边界处的转角与挠度。

对很多实际问题：无力矩理论求解 + 有力矩理论修正

2.2 回转薄壳应力分析

2.2.1 薄壁圆筒的应力

2.2.2 回转薄壳的无力矩理论

2.2.3 无力矩理论的基本方程

2.2.4 无力矩理论的应用

2.2.5 回转薄壳的不连续分析

2.2.5 回转薄壳的不连续分析

- 一、不连续效应与不连续分析的基本方法
- 二、圆柱壳受边缘力和边缘力矩作用的弯曲解
- 三、组合壳不连续应力的计算举例
- 四、不连续应力的特性
- 五、不连续应力的工程处理

2.2.5 回转薄壳的不连续分析（续）

一、不连续效应与不连续分析的基本方法

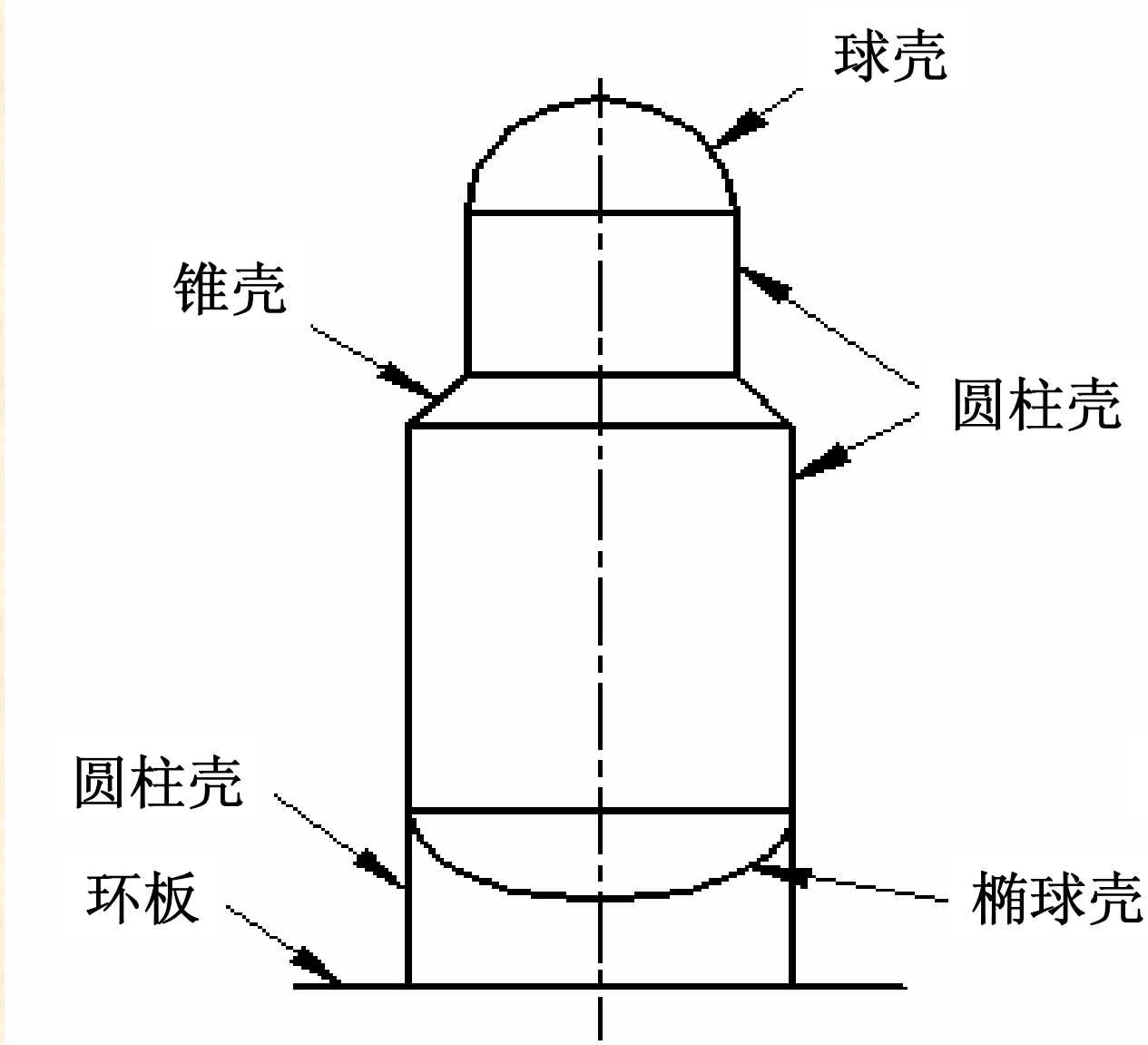


图2-12 组合壳

2.2.5 回转薄壳的不连续分析（续）

1. 不连续效应

实际壳体结构（图2-12）



壳体组合



结构不连续

2.2.5 回转薄壳的不连续分析（续）

1. 不连续效应

不连续效应： 由于总体结构不连续，组合壳在连接处附近的局部区域出现衰减很快的应力增大现象，称为“**不连续效应**”或“**边缘效应**”。

不连续应力： 由此引起的局部应力称为“**不连续应力**”或“**边缘应力**”。分析组合壳不连续应力的方法，在工程上称为“**不连续分析**”。

2.2.5 回转薄壳的不连续分析 (续)

2. 不连续分析的基本方法

边缘问题求解
(边缘应力)

=

薄膜解
(一次薄膜应力)

+

弯曲解
(二次应力)

变形协调方程

$$w_1 = w_2 \quad w_1^P + w_1^{Q_0} + w_1^{M_0} = w_2^P + w_2^{Q_0} + w_2^{M_0}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \varphi_1^P + \varphi_1^{Q_0} + \varphi_1^{M_0} = \varphi_2^P + \varphi_2^{Q_0} + \varphi_2^{M_0}$$

有力矩理论
(静不定)

边缘力 Q_0 和
边缘力矩 M_0

边缘内力
($N_\varphi, N_\theta, M_\varphi, M_\theta, Q_\varphi$)

应力
 $\sigma_\varphi^{Q_0, M_0}, \sigma_\theta^{Q_0, M_0}$

以图2-13 (c) 和(d)所示左半部分圆筒为对象，
径向位移 w 以向外为负，转角以逆时针为正。

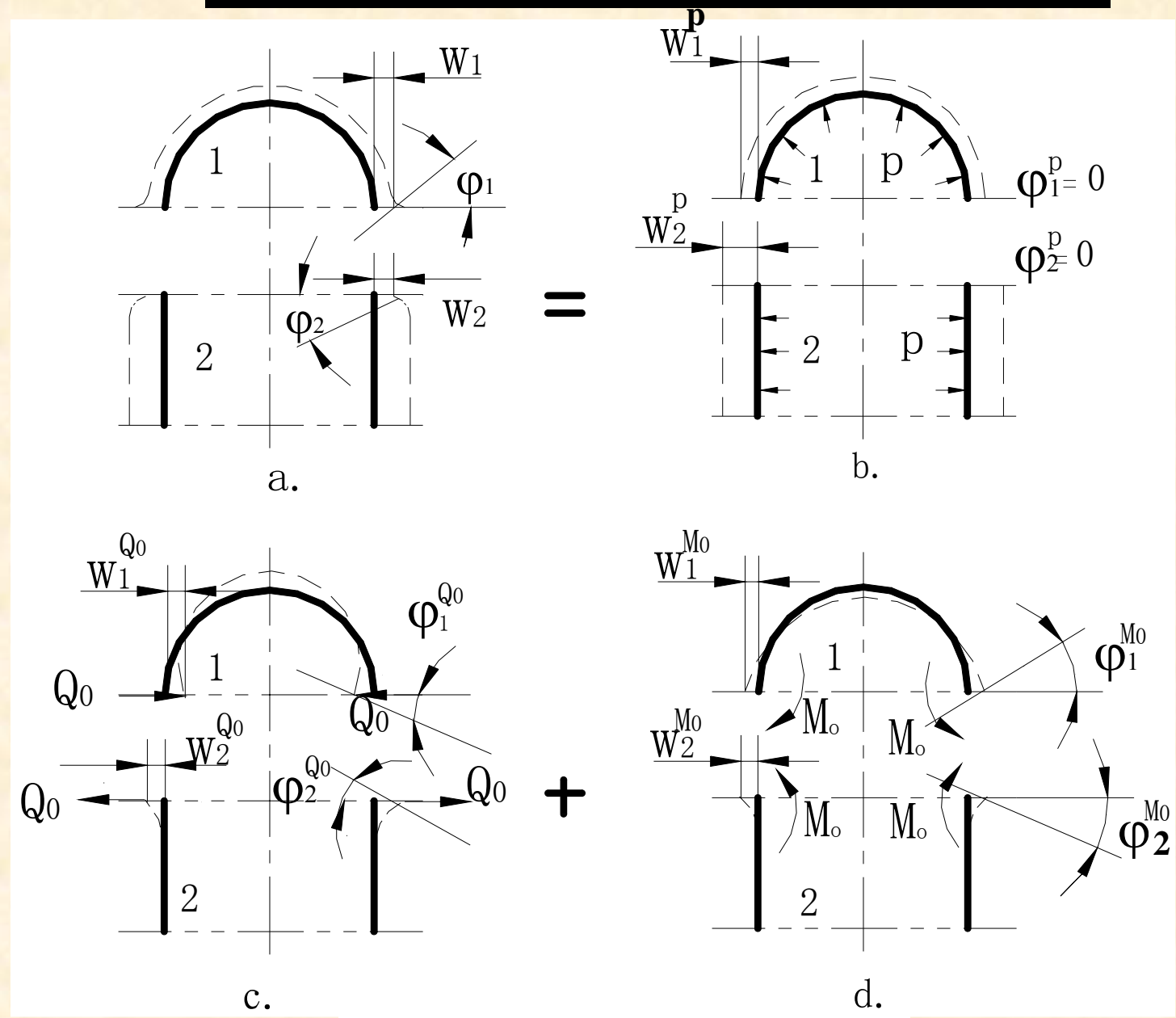


图2-13 连接边缘的变形

二、圆柱壳受边缘力和边缘力矩作用的弯曲解

分析思路：

推导基本微分方程
(载荷作用下变形微分方程)

微分方程通解

由边界条件确定积分常数

边缘内力

边缘应力

1. 求解基本微分方程

轴对称加载的圆柱壳有力矩理论基本微分方程为：

$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 4\beta^4 \omega = \frac{p}{D'} + \frac{\mu}{RD'} N_x \quad (2-16)$$

式中 D' — 壳体的抗弯刚度, $D' = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$

ω — 径向位移;

N_x — 单位圆周长度上的轴向薄膜内力,

可直接由圆柱壳轴向力平衡关系求得;

x — 所考虑点离圆柱壳边缘的距离;

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 t^2}}$$

2.2.5 回转薄壳的不连续分析（续）

由圆柱壳有力矩理论，解出 W 后可得内力为：

$$N_{\theta} = -Et \frac{\omega}{R} + \mu N_x$$

$$M_x = -D' \frac{d^2 \omega}{dx^2}$$

$$M_{\theta} = -\mu D' \frac{d^2 \omega}{dx^2}$$

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = -D' \frac{d^3 \omega}{dx^3}$$

(2-17)

2.2.5 回转薄壳的不连续分析（续）

式中 N_{θ} —单位圆周长度上的周向薄膜内力；

Q_x —单位圆周长度上横向剪力；

M_x —单位圆周长度上的轴向弯矩；

M_{θ} —单位长度上的周向弯矩。

2.2.5 回转薄壳的不连续分析（续）

上述各内力求解后，按材料力学方法计算各应力分量。

圆柱壳弯曲
问题中的应力

薄膜内力引起的薄膜应力——

相当于矩形截面的梁（高为 t ，宽为单位长度）承受轴向载荷所引起的正应力，这一应力沿厚度均匀分布

弯曲应力——包括弯曲内力在同一矩形截面上引起的沿厚度呈线性分布的正应力和抛物线分布的横向切应力

2.2.5 回转薄壳的不连续分析（续）

圆柱壳轴对称弯曲应力计算公式为

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t} \pm \frac{12M_x}{t^3} z$$

$$\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{t} \pm \frac{12M_\theta}{t^3} z$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_x = \frac{6Q_x}{t^3} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right)$$

z —离壳体中面的距离

显然，正应力的最大值在壳体的表面上($z = \mp \frac{t}{2}$)，
 横向切应力的最大值发生在中面上($z = 0$)，即 2

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x)_{\max} &= \frac{N_x}{t} \mp \frac{6M_x}{t^2} \\
 (\sigma_\theta)_{\max} &= \frac{N_\theta}{t} \mp \frac{6M_\theta}{t^2} \\
 (\tau_x)_{\max} &= \frac{3Q_x}{2t}
 \end{aligned}
 \tag{2-18}$$

横向切应力与正应力相比数值较小，故一般不予计算。

2.2.5 回转薄壳的不连续分析（续）

对于只受边缘力 Q_0 和 M_0 作用的圆柱壳，

$p=0$ ， $N_x=0$ ，于是式(2-16)可写为：

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = 0 \quad (2-19)$$

2. 求微分方程的解

齐次方程(2-19)通解为:

$$\omega = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad (2-20)$$

式中 C_1 、 C_2 、 C_3 和 C_4 为积分常数, 由圆柱壳两端边界条件确定。

当圆柱壳足够长时, 随着 x 的增加, 弯曲变形逐渐衰减以至消失, 因此式(2-20)中含有 $e^{\beta x}$ 项为零, 亦即要求 $C_1 = C_2 = 0$, 于是式(2-20)可写成:

$$\omega = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad (2-21)$$

圆柱壳的边界条件为:

$$(M_x)_{x=0} = -D' \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right)_{x=0} = M_0, \quad (Q_x)_{x=0} = -D' \left(\frac{d^3 \omega}{dx^3} \right)_{x=0} = Q_0$$

利用边界条件, 可得 ω 表达式为:

$$\omega = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D'} [\beta M_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) - Q_0 \cos \beta x] \quad (2-22)$$

最大挠度和转角发生在 $x = 0$ 的边缘上

$$\begin{aligned} (\omega)_{x=0} &= -\frac{1}{2\beta^2 D'} M_0 - \frac{1}{2\beta^3 D'} Q_0 \\ (\varphi)_{x=0} &= \left(\frac{d\omega}{dx} \right)_{x=0} = \frac{1}{\beta D'} M_0 + \frac{1}{2\beta^2 D'} Q_0 \end{aligned} \quad (2-23)$$

2.2.5 回转薄壳的不连续分析（续）

其中

$$\omega^{M_0} = -\frac{1}{2\beta^2 D'} M_0 \quad \omega^{Q_0} = -\frac{1}{2\beta^3 D'} Q_0$$

$$\varphi^{M_0} = \frac{1}{\beta D'} M_0 \quad \varphi^{Q_0} = \frac{1}{2\beta^2 D'} Q_0$$

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = -D' \frac{d^3 \omega}{dx^3}$$

3. 求内力

$$N_x = 0$$

$$N_\theta = -Et \frac{\omega}{R} + \mu N_x = 2\beta R e^{-\beta x} [\beta M_0 (\cos \beta x - \sin \beta x) + Q_0 \cos \beta x]$$

$$M_x = -D \frac{d^2 \omega}{dx^2} = \frac{e^{-\beta x}}{\beta} [\beta M_0 (\cos \beta x + \sin \beta x) + Q_0 \sin \beta x]$$

$$M_\theta = \mu M_x$$

$$Q_x = -D \frac{d^3 \omega}{dx^3} = -e^{-\beta x} [2\beta M_0 \sin \beta x - Q_0 (\cos \beta x - \sin \beta x)]$$

(2-24)

4. 求应力

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t} \pm \frac{12M_x}{t^3} z$$

$$\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{t} \pm \frac{12M_\theta}{t^3} z$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_x = \frac{6Q_x}{t^3} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right)$$

2.2.5 回转薄壳的不连续分析（续）

注意

一般回转壳受边缘力和边缘力矩的弯曲解

一般回转壳受边缘力和边缘力矩作用，引起的内力和变形的求解，需要应用一般回转壳理论。

有兴趣的读者可参阅文献[10]第373页至407页。

刘鸿文
《板壳理论》

三、组合壳不连续应力的计算举例

以圆平板与圆柱壳连接时的边缘应力计算为例，说明边缘应力计算方法。

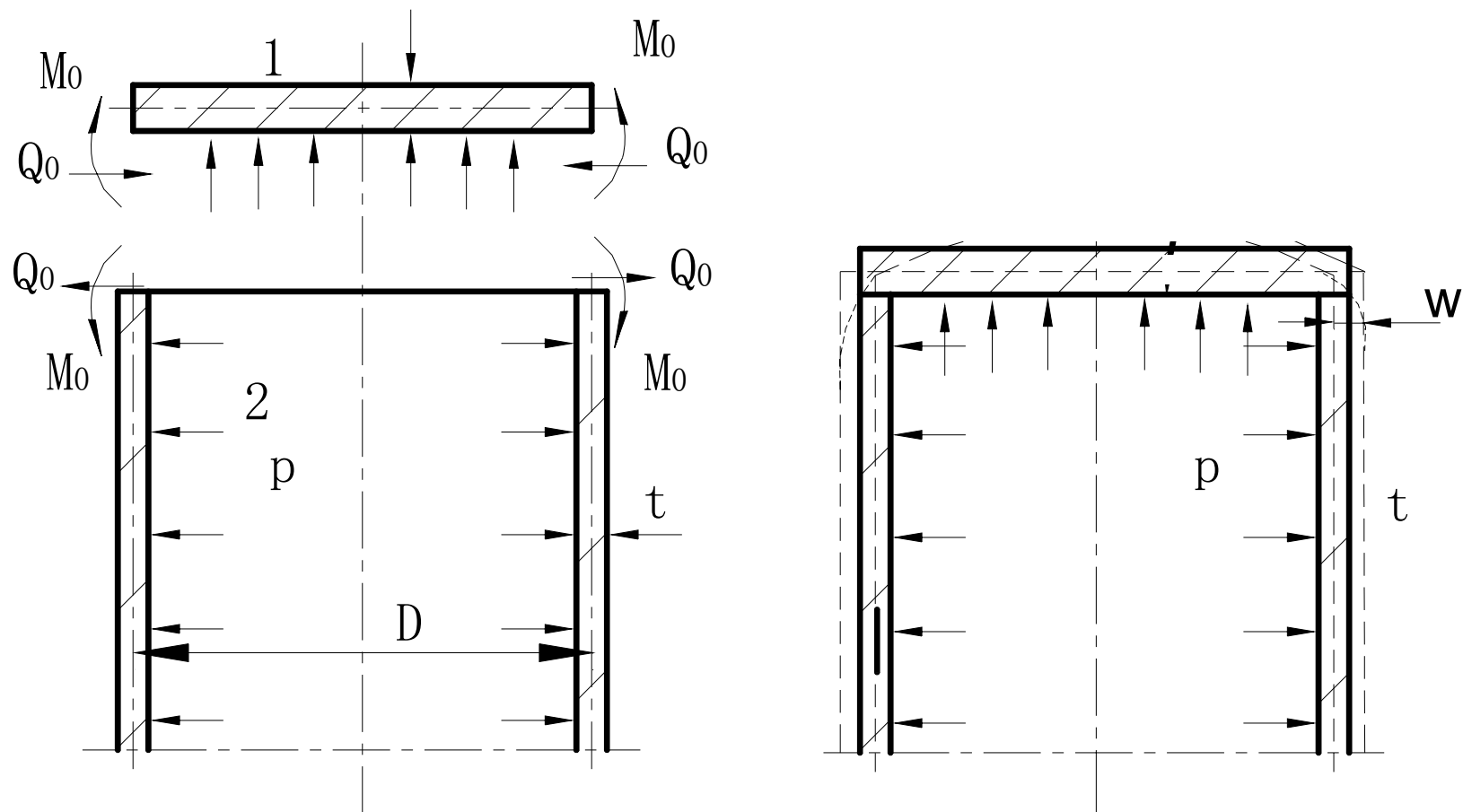


图2-14 圆平板与圆柱壳的连接

圆平板：若板很厚，可假设连接处没有位移和转角，即

$$w_1^p = w_1^{Q_0} = w_1^{M_0} = 0$$

$$\varphi_1^p = \varphi_1^{Q_0} = \varphi_1^{M_0} = 0$$

圆柱壳：边缘力和边缘力矩引起的变形可按式 (2-23) 计算。

内压 p 引起的变形为

$$w_2^p = -\frac{pR^2}{2Et}(2-\mu)$$

$$\varphi_2^p = 0$$

根据变形协调条件，即式 (2-15) 得：

$$w_2^p + w_2^{Q_0} + w_2^{M_0} = 0$$

$$\varphi_2^p + \varphi_2^{Q_0} + \varphi_2^{M_0} = 0$$

将位移和转角代入上式，得：

$$-\frac{pR^2}{2Et}(2-\mu) - \frac{1}{2\beta^2 D'} M_o - \frac{1}{2\beta^3 D'} Q_o = 0$$

$$\frac{1}{\beta D'} M_o + \frac{1}{2\beta^2 D'} Q_o = 0$$

解得:

$$\begin{cases} M_0 = \beta^2 D' \frac{pR^2}{Et} (2 - \mu) \\ Q_0 = -2\beta^3 D' \frac{pR^2}{Et} (2 - \mu) \end{cases}$$

负号表示与图示方向相反

利用式(2-8)、式(2-18)和式(2-24), 可求出圆柱壳中最大经向应力和周向应力为

$$\begin{cases} (\sum \sigma_x)_{\max} = 2.05 \frac{pR}{t} \text{ (在 } \beta x = 0 \text{ 处, 内表面)} \approx 4 \frac{PR}{2t} = 4\sigma_x \\ (\sum \sigma_\theta)_{\max} = 0.62 \frac{pR}{t} \text{ (在 } \beta x = 0 \text{ 处, 内表面)} \approx 0.62\sigma_\theta \end{cases}$$

可见, 与厚平板连接的圆柱壳边缘处的最大应力为壳体内表面的经向应力, 远大于远离结构不连续处圆柱壳中的薄膜应力。

四、不连续应力的特性

局部性

自限性

1. 局部性:

$$e^{-\beta x}$$

随着离边缘距离 x 的增加，各内力呈指数函数迅速衰减以至消失，这种性质称为不连续应力的局部性。

1. 局部性:

例如,

$$x = \frac{\pi}{\beta}$$

$$\left| (M_x)_{x=\frac{\pi}{\beta}} \right| = e^{-\pi} M_0 = 0.043M_0$$

$$\mu = 0.3$$

$$x = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi\sqrt{Rt}}{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}} = 2.5\sqrt{Rt}$$

多数情况下： $2.5\sqrt{Rt}$ 与壳体半径 R 相比是一个很小的数字，这说明边缘应力具有很大的局部性。

四、不连续应力的特性（续）

2. 自限性：

不连续应力是由弹性变形受到约束所致，因此对于用塑性材料制造的壳体，当连接边缘的局部区产生塑性变形，这种弹性约束就开始缓解，变形不会连续发展，不连续应力也自动限制，这种性质称不连续应力的**自限性**。

五、不连续应力的工程处理

塑性材料、受静载荷

设计中一般不作具体计算，仅采取结构上作局部处理，以限制其应力水平。

脆性材料、受疲劳载荷
或低温载荷

对过高的不连续应力十分敏感，可能导致疲劳失效或脆性破坏。
设计中按有关规定计算并限制不连续应力。