第二章　压力容器应力分析

CHAPTER Ⅱ
STRESS ANALYSIS OF PRESSURE VESSELS

第三节　厚壁圆筒应力分析

2.3 厚壁圆筒应力分析

教学重点：

（1）厚壁圆筒中三向应力的公式表达和应力分布图；

（2）厚壁圆筒中的弹塑性区的应力分布；

（3）提高屈服承载能力的措施。

教学难点：

厚壁圆筒中三向应力公式推导。

主要内容

厚壁容器： $D_o / D_i > 1.1 - 1.2$

应力特征：

应考虑径向应力，是三向应力状态；

应力沿壁厚不均匀分布；

若内外壁间的温差大，应考虑器壁中的热应力。

分析方法：

静不定问题，需平衡、几何、物理等方程联立求解

厚壁圆筒分单层式和组合式两种，本书将只分析单层厚壁圆筒的弹性应力、弹塑性应力、屈服应力和爆破压力。

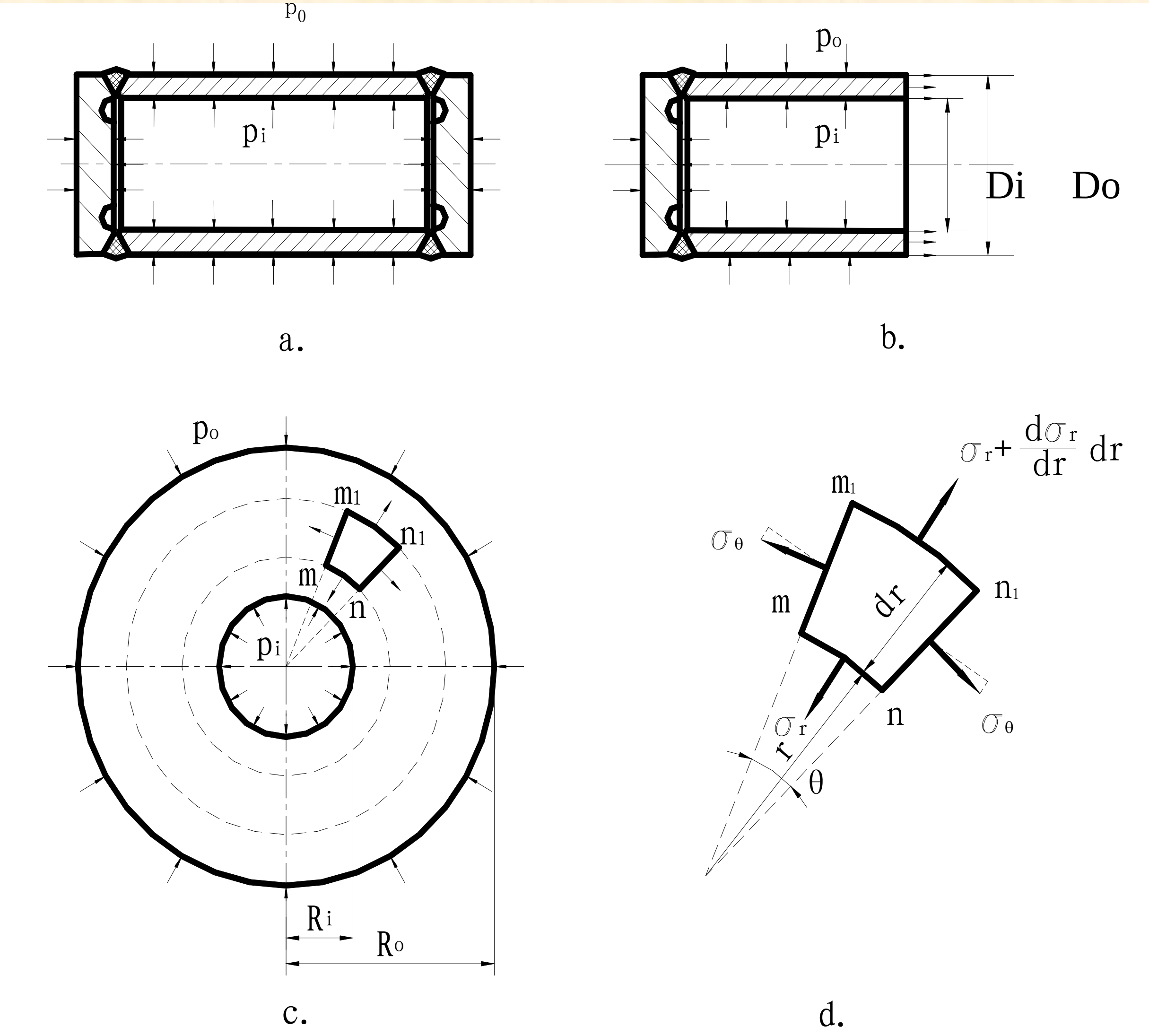
2.3.1 弹性应力（续）

有一两端封闭的厚壁圆筒（图2-15），受到内压p_i和外压p_o的作用，圆筒的内半径和外半径分别为R_i、R_o，任意点的半径为r。以轴线为z轴建立圆柱坐标。求解远离两端处筒壁中的三向应力。

一、压力载荷引起的弹性应力

二、温度变化引起的弹性热应力

2.3.1 弹性应力



轴向应力

平衡方程

图2-15 厚壁圆筒中的应力

2.3.1 弹性应力（续）

一、压力载荷引起的弹性应力

1. 轴向（经向）应力

图2-15

对两端封闭的圆筒，横截面在变形后仍保持平面。所以，假设轴向应力σ_z沿壁厚方向均匀分布，得：

$$\sigma_z = \frac{\pi R_i^2 p_i - \pi R_0^2 p_0}{\pi\left(R_0^2 - R_i^2\right)} = \frac{p_i R_i^2 - p_0 R_0^2}{R_0^2 - R_i^2} = \mathrm{A} \qquad (2\text{-}25)$$

2.3.1 弹性应力（续）

2. 周向应力与径向应力

由于应力分布的不均匀性，进行应力分析时，必须从微元体着手，分析其应力和变形及它们之间的相互关系。

a. 微元体

b. 平衡方程

c. 几何方程：微元体位移与应变之间的关系。（用位移法求解）

d. 物理方程：弹性范围内，微元体的应变与应力的关系

e. 平衡、几何和物理方程综合—求解应力的微分方程（求解微分方程，积分，边界条件定常数）

应 力

2.3.1 弹性应力（续）

a. 微元体

如图2-15(c)、(d)所示，由圆柱面mn、m_1n_1和纵截面mm_1、nn_1组成，微元在轴线方向的长度为1单位。

b. 平衡方程

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r+dr)d\theta - \sigma_r r d\theta - 2\sigma_\theta dr \sin\frac{d\theta}{2} = 0$$

$$\sin(d\theta/2) \approx d\theta/2$$

（2-26）

图2-15

$$\sigma_\theta - \sigma_r = r\frac{d\sigma_r}{dr}$$

$$\frac{\sigma_\varphi}{R_1} + \frac{\sigma_\theta}{R_2} = \frac{p}{t}$$

薄壁微元平衡方程。
拉普拉斯方程

微元体平衡方程

2.3.1 弹性应力（续）

c. 几何方程 (应力－应变）

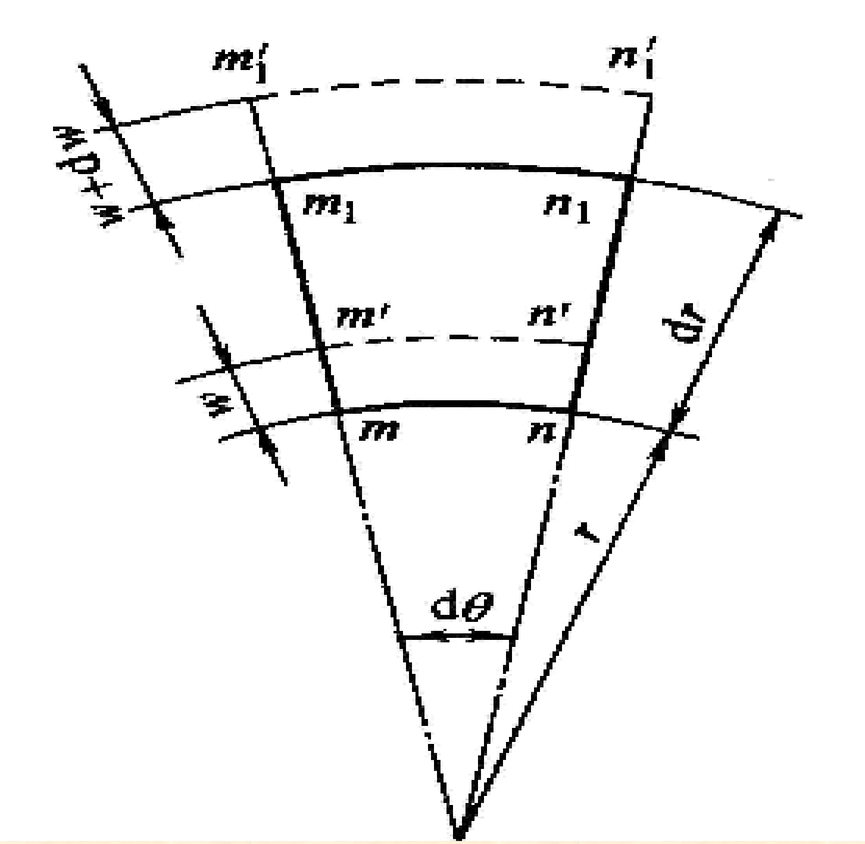


图2-16 厚壁圆筒中微元体的位移

2.3.1 弹性应力（续）

c. 几何方程（续）

径向应变

$$\varepsilon_r = \frac{(\omega + d\omega) - \omega}{dr} = \frac{d\omega}{dr}$$

周向应变

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r+\omega)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{\omega}{r}$$

（2-27）

变形协调方程

$$\boxed{\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{1}{r}(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)}$$

（2-28）

2.3.1 弹性应力（续）

d. 物理方程

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \mu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right]$$

（2-29）

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \mu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right]$$

2.3.1 弹性应力（续）

e. 平衡、几何和物理方程综合 ⟶ 求解应力的微分方程

将式（2-28）中的应变换成应力并整理得到：

$$r\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+3\frac{d\sigma_r}{dr}=0$$

解该微分方程，可得 σ_r 的通解。将 σ_r 再代入式（2-26）得 σ_θ 。

$$\boxed{\sigma_r = A-\frac{B}{r^2}} \qquad \boxed{\sigma_\theta = A+\frac{B}{r^2}} \qquad (2\text{-}33)$$

2.3.1 弹性应力（续）

边界条件为：当 $r=R_i$ 时，$\sigma_r=-p_i$ ；

当 $r=R_0$ 时，$\sigma_r=-p_0$ 。

由此得积分常数**A**和**B**为：

$$A=\frac{p_iR_i^2-p_0R_0^2}{R_0^2-R_i^2}$$

$$B=\frac{(p_i-p_0)R_i^2R_0^2}{R_0^2-R_i^2}$$

2.3.1 弹性应力（续）

周向应力
$$\sigma_\theta = \frac{p_i R_i^2 - p_0 R_0^2}{R_0^2 - R_i^2} + \frac{(p_i - p_0) R_i^2 R_0^2}{R_0^2 - R_i^2}\frac{1}{r^2} = A + \frac{B}{r^2}$$

径向应力
$$\sigma_r = \frac{p_i R_i^2 - p_0 R_0^2}{R_0^2 - R_i^2} - \frac{(p_i - p_0) R_i^2 R_0^2}{R_0^2 - R_i^2}\frac{1}{r^2} = A - \frac{B}{r^2}$$

轴向应力
$$\sigma_z = \frac{p_i R_i^2 - p_0 R_0^2}{R_0^2 - R_i^2} = A$$

称Lamè（拉美）公式　　（2-34）

2.3.1 弹性应力（续）

当仅有内压或外压作用时，拉美公式可以简化，此时，厚壁圆筒应力值和应力分布分别如表2－1和图2－17

表2-1 厚壁圆筒的筒壁应力值

受力情况 / 位置 / 应力分析	仅受内压 $p_o=0$			仅受外压 $p_i=0$		
	任意半径r处	内壁处 $r=R_i$	外壁处 $r=R_o$	任意半径r处	内壁处 $r=R_i$	外壁处 $r=R_o$
σ_r	$\frac{p_i}{K^2-1}\left(1-\frac{R_o^2}{r^2}\right)$	$-p_i$	0	$\frac{-p_o K^2}{K^2-1}\left(1-\frac{R_i^2}{r^2}\right)$	0	$-p_o$
σ_θ	$\frac{p_i}{K^2-1}\left(1+\frac{R_o^2}{r^2}\right)$	$P_i\left(\frac{K^2+1}{K^2-1}\right)$	$p_i\left(\frac{2}{K^2-1}\right)$	$\frac{-p_o K^2}{K^2-1}\left(1+\frac{R_i^2}{r^2}\right)$	$-p_o\left(\frac{2K^2}{K^2-1}\right)$	$-p_o\left(\frac{K^2+1}{K^2-1}\right)$
σ_z	$p_i\left(\frac{1}{K^2-1}\right)$			$-p_o\left(\frac{K^2}{K^2-1}\right)$		

2.3.1 弹性应力（续）

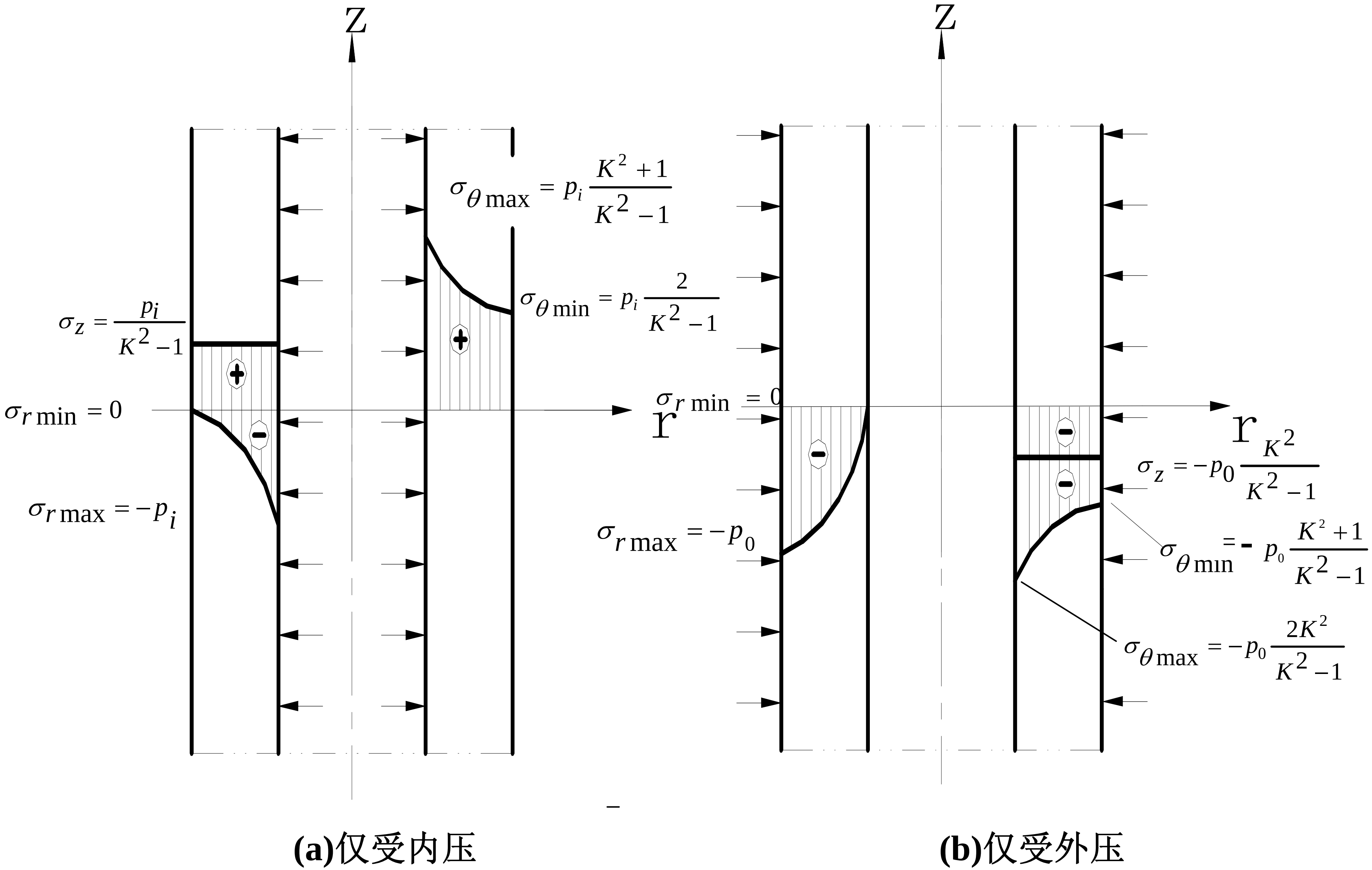


图2-17 厚壁圆筒中各应力分量分布

2.3.1 弹性应力（续）

从图2-17中可见，

仅在内压作用下，筒壁中的应力分布规律：

①周向应力 σ_θ 及轴向应力 σ_z 均为拉应力（正值），

径向应力 σ_r 为压应力（负值）。

2.3.1 弹性应力（续）

②在数值上有如下规律：

内壁周向应力 σ_θ 有最大值，其值为：$\sigma_{\theta\max} = p_i \dfrac{K^2+1}{K^2-1}$

外壁处减至最小，其值为：$\sigma_{\theta\min} = p_i \dfrac{2}{K^2-1}$

内外壁 σ_θ 之差为 p_i；

径向应力内壁处为 $-p_i$，随着 r 增加，径向应力绝对值逐渐减小，在外壁处 σ_r =0；

轴向应力为一常量，沿壁厚均匀分布，且为周向应力与径向应力和的一半，即

$$\sigma_z = \frac{1}{2}\left(\sigma_\theta + \sigma_r\right)$$

2.3.1 弹性应力（续）

③除 σ_z 外，其它应力沿壁厚的不均匀程度与径比**K**值有关。

以 σ_θ 为例，外壁与内壁处的

周向应力 σ_θ 之比为：

$$\frac{(\sigma_\theta)_{r=R_0}}{(\sigma_\theta)_{r=R_i}} = \frac{2}{K^2+1}$$

***K*值愈大不均匀程度愈严重，**

当内壁材料开始出现屈服时， 外壁材料则没有达到屈服，

因此筒体材料强度不能得到充分的利用。

2.3.1 弹性应力（续）

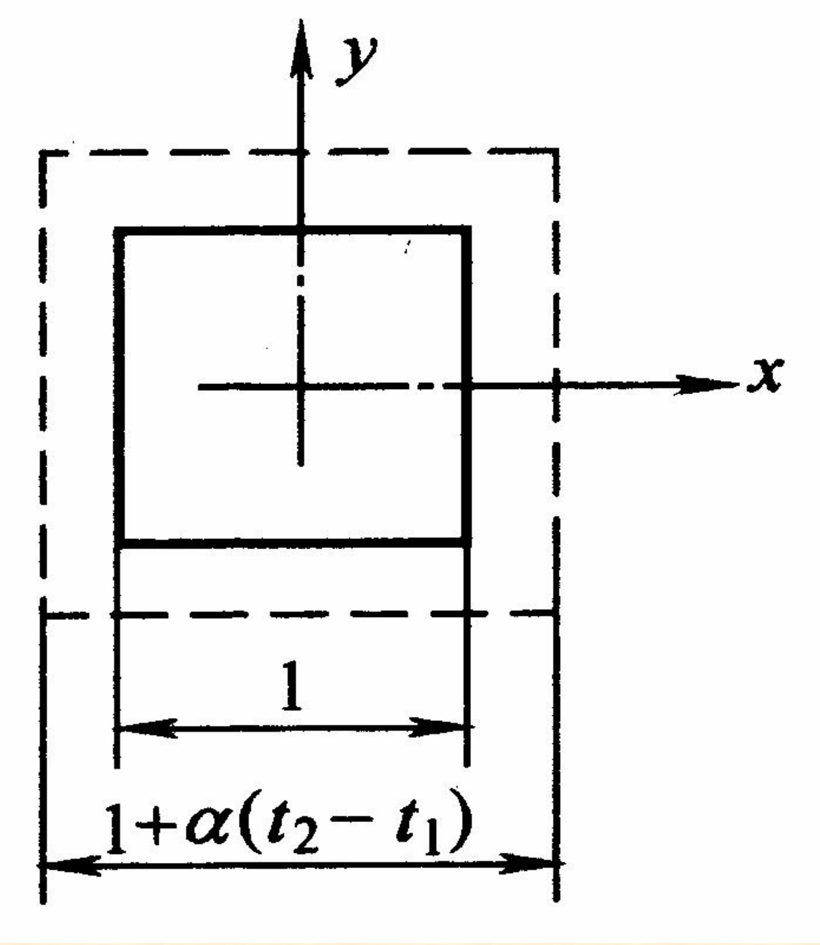
二、温度变化引起的弹性热应力

1. 热应力
2. 厚壁圆筒的热应力
3. 内压与温差同时作用引起的弹性应力
4. 热应力的特点

2.3.1 弹性应力（续）

1. 热应力

因温度变化引起的自由膨胀或收缩受到约束，在弹性体内所引起的应力，称为热应力。



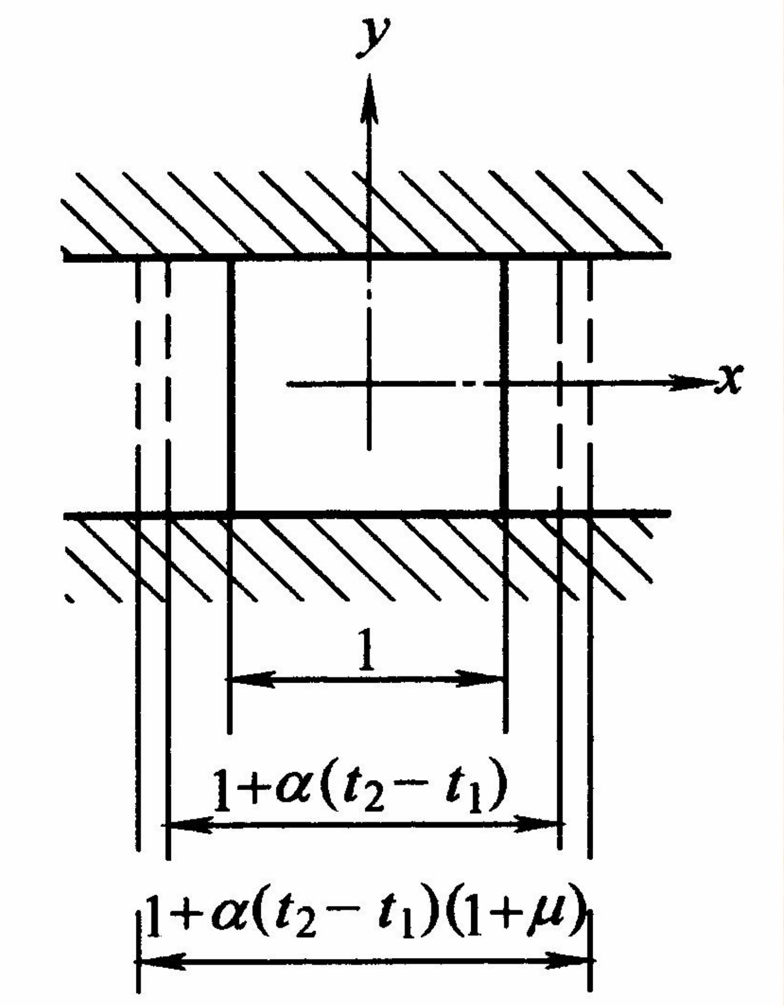
（a）自由膨胀

图2-18热应变

2.3.1 弹性应力（续）

1. 热应力

单向约束： $$\sigma_y^t = -\alpha E \Delta t \qquad (2-35)$$



（b）单向约束

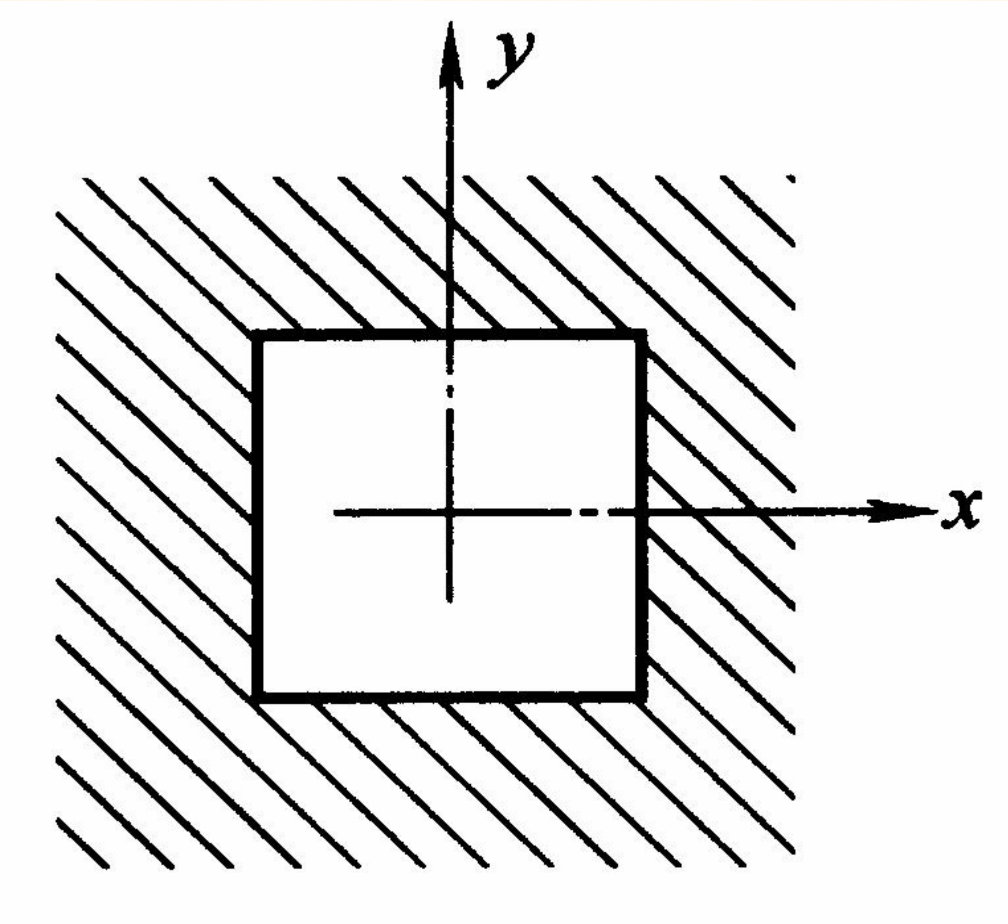
图2-18热应变

2.3.1 弹性应力（续）

1. 热应力

双向约束：

$$\sigma_x^t = \sigma_y^t = -\frac{\alpha E \Delta t}{1-\mu} \qquad （2—36）$$



（c）双向约束

图2-18热应变

2.3.1 弹性应力（续）

1. 热应力

同理，可求得三向约束时的热应力：

三向约束：

$$\sigma_x^t = \sigma_y^t = \sigma_z^t = -\frac{\alpha E \Delta t}{1-2\mu} \qquad （2－37）$$

在一维、二维、三维约束时，根据式（2－35）—式（2-37），图2-19给出了碳素钢在不同初始温度下，温度增加1^0C时的热应力值：

刚性约束下，热应力比值（μ＝0.3）：

三维 / 二维 / 一维= 2.50 / 1.43 / 1.00

2.3.1 弹性应力（续）

1. 热应力

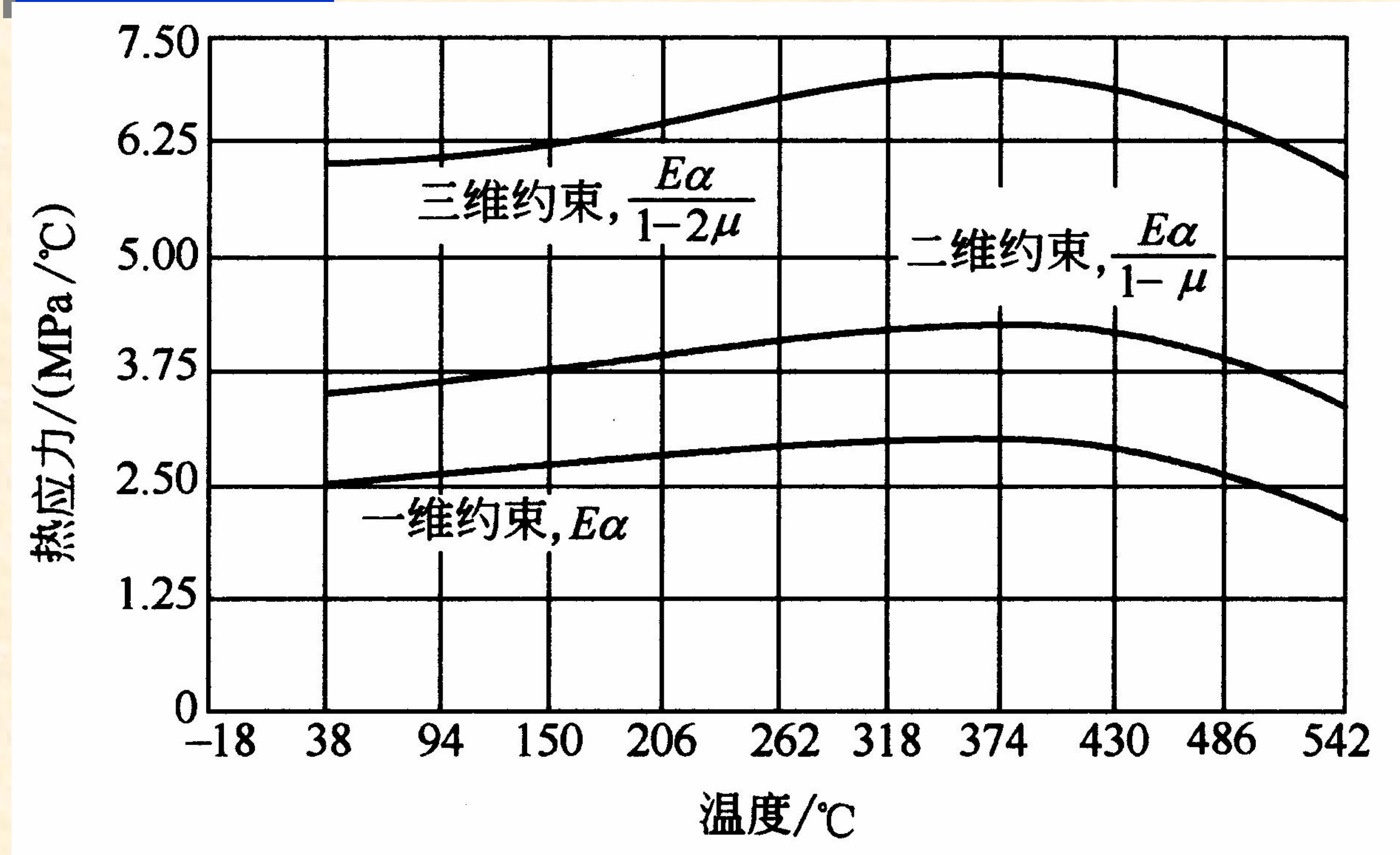


图2-19 碳素钢的热应力值

2.3.1 弹性应力（续）

2. 厚壁圆筒的热应力

求厚壁圆筒中的热应力，首先确定筒壁的温度分布，再由平衡方程、几何方程和物理方程，结合边界条件求解。

当厚壁圆筒处于对称于中心轴且沿轴向不变的温度场时，稳态传热状态下，三向热应力的表达式为：

（详细推导见文献[11]附录）

2.3.1 弹性应力（续）

2. 厚壁圆筒的热应力（续）

周向热应力 $$\sigma_\theta^t = \frac{E\alpha\Delta t}{2(1-\mu)}\left(\frac{1-\ln K_r}{\ln K} - \frac{K_r^2+1}{K^2-1}\right)$$

径向热应力 $$\sigma_r^t = \frac{E\alpha\Delta t}{2(1-\mu)}\left(-\frac{\ln K_r}{\ln K} + \frac{K_r^2-1}{K^2-1}\right)$$

轴向热应力 $$\sigma_z^t = \frac{E\alpha\Delta t}{2(1-\mu)}\left(\frac{1-2\ln K_r}{\ln K} - \frac{2}{K^2-1}\right)$$

(2-38)

2.3.1 弹性应力（续）

2. 厚壁圆筒的热应力（续）

上式中：

Δt —— 筒体内外壁的温差， $\Delta t = t_i - t_0$

K ——筒体的外半径与内半径之比， $K = \frac{R_0}{R_i}$

Kr ——筒体的外半径与任意半径之比， $K_r = \frac{R_0}{r}$

t_i ——内壁面温度

t_o ——外壁面温度

厚壁圆筒各处的热应力见表2-2，

表中 $P_t = \frac{E\alpha\Delta t}{2(1-\mu)}$

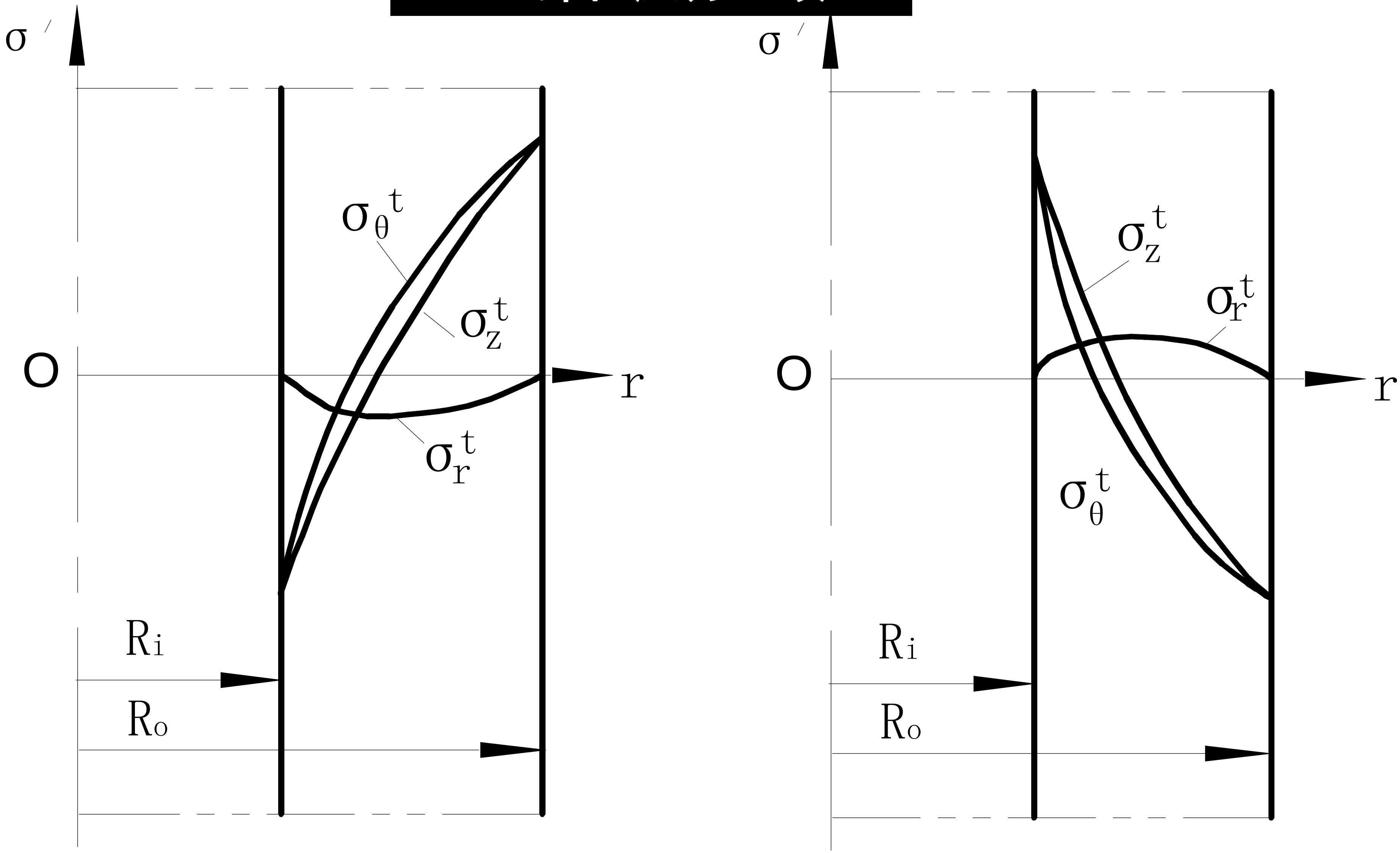
厚壁圆筒中热应力分布如图2-20所示。

2.3.1 弹性应力（续）

表2-2 厚壁圆筒中的热应力

热应力	任意半径r处	圆筒内壁$K_r=K$处	圆筒外壁$K_r=1$处
σ_r^t	$p_t\left(-\frac{\ln K_r}{\ln K}+\frac{K_r^2-1}{K^2-1}\right)$	0	0
σ_θ^t	$P_t\left(\frac{1-\ln K_r}{\ln K}-\frac{K_r^2+1}{K^2-1}\right)$	$P_t\left(\frac{1}{\ln K}-\frac{2K^2}{K^2-1}\right)$	$P_t\left(\frac{1}{\ln K}-\frac{2}{K^2-1}\right)$
σ_z^t	$P_t\left(\frac{1-2\ln K_r}{\ln K}-\frac{2}{K^2-1}\right)$	$P_t\left(\frac{1}{\ln K}-\frac{2K^2}{K^2-1}\right)$	$P_t\left(\frac{1}{\ln K}-\frac{2}{K^2-1}\right)$

2.3.1 弹性应力（续）



（a）内部加热；　　　（b）外部加热

图2-20 厚壁圆筒中的热应力分布

2.3.1 弹性应力（续）

2. 厚壁圆筒的热应力（续）

厚壁圆筒中热应力及其分布的规律为：

① 热应力大小与内外壁温差成正比

Δt 取决于壁厚，径比***K***值愈大 Δt 值也愈大，表**2-2**中的 P_t 值也愈大。

②热应力沿壁厚方向是变化的

2.3.1 弹性应力（续）

3. 内压与温差同时作用引起的弹性应力

$$
\left.
\begin{aligned}
\sum \sigma_r &= \sigma_r + \sigma_r^t, \\
\sum \sigma_\theta &= \sigma_\theta + \sigma_\theta^t, \\
\sum \sigma_z &= \sigma_z + \sigma_z^t
\end{aligned}
\right\}
\qquad （2\text{-}39）
$$

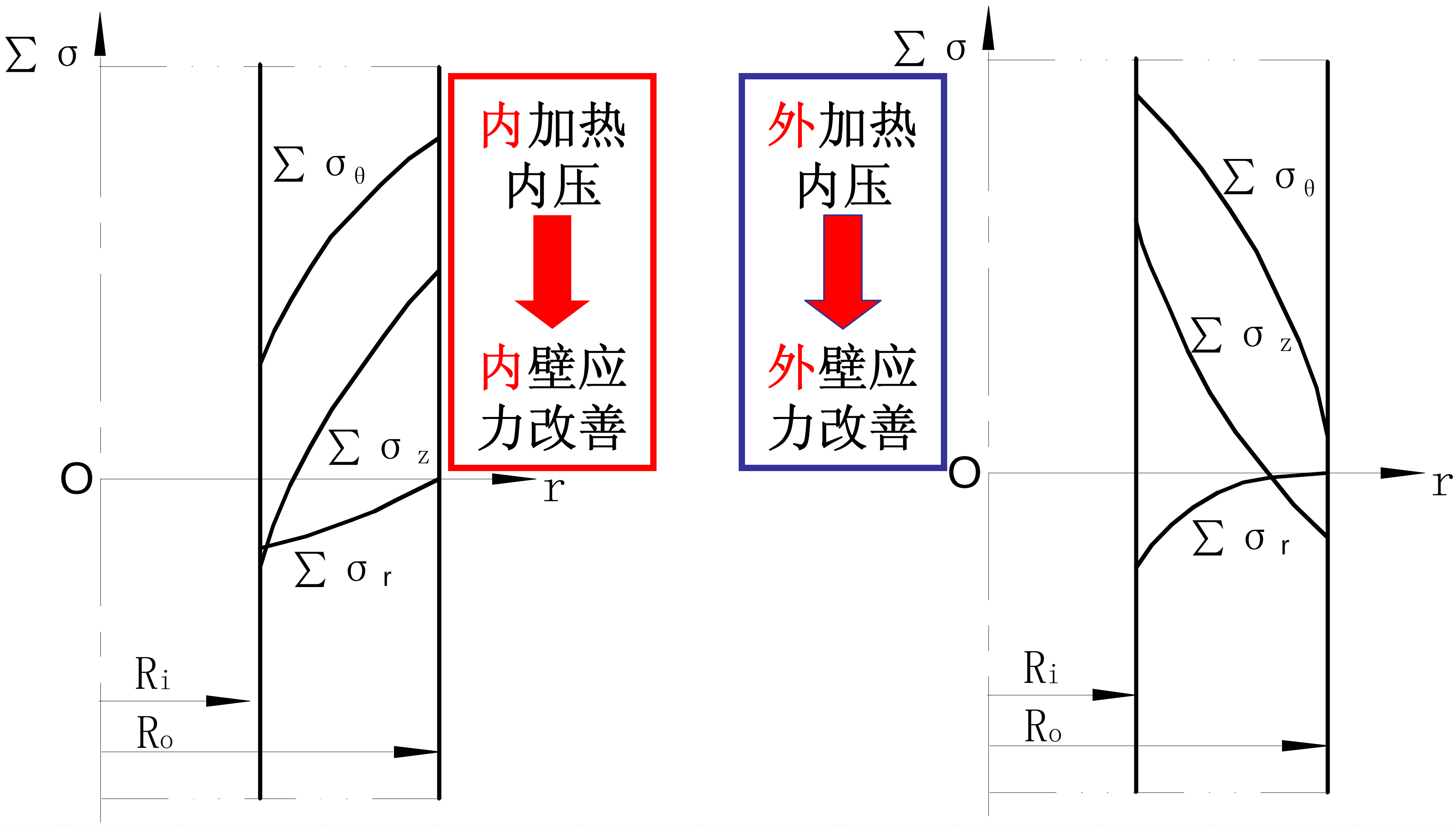
具体计算公式见表2-3，分布情况见图2-21。

2.3.1 弹性应力（续）

表2-3 厚壁圆筒在内压与温差作用下的总应力

总应力	筒体内壁处 $r=R_i$	筒体外壁处 $r=R_o$
$\sum\sigma_r$	$-p$	0
$\sum\sigma_\theta$	$(p-P_t)\dfrac{K^2+1}{K^2-1}+P_t\dfrac{1-\ln K}{\ln K}$	$(p-P_t)\dfrac{2}{K^2-1}+P_t\dfrac{1}{\ln K}$
$\sum\sigma_z$	$(p-2P_t)\dfrac{1}{K^2-1}+P_t\dfrac{1-2\ln K}{\ln K}$	$(p-P_t)\dfrac{1}{K^2-1}+P_t\dfrac{1}{\ln K}$

2.3.1 弹性应力（续）



（a）内加热情况；　　（b）外加热情况

图2-21 厚壁筒内的综合应力

2.3.1 弹性应力（续）

4. 热应力的特点

a. 热应力随约束程度的增大而增大

b. 热应力与零外载相平衡，是自平衡应力（Self- balancing stress）

c. 热应力具有自限性，屈服流动或高温蠕变可使热应力降低

d. 热应力在构件内是变化的

主要内容

2.3.1 弹性应力

2.3.2 弹塑性应力

2.3.3 屈服压力和爆破压力

2.3.4 提高屈服承载能力的措施

2.3.2 弹塑性应力

一、弹塑性应力

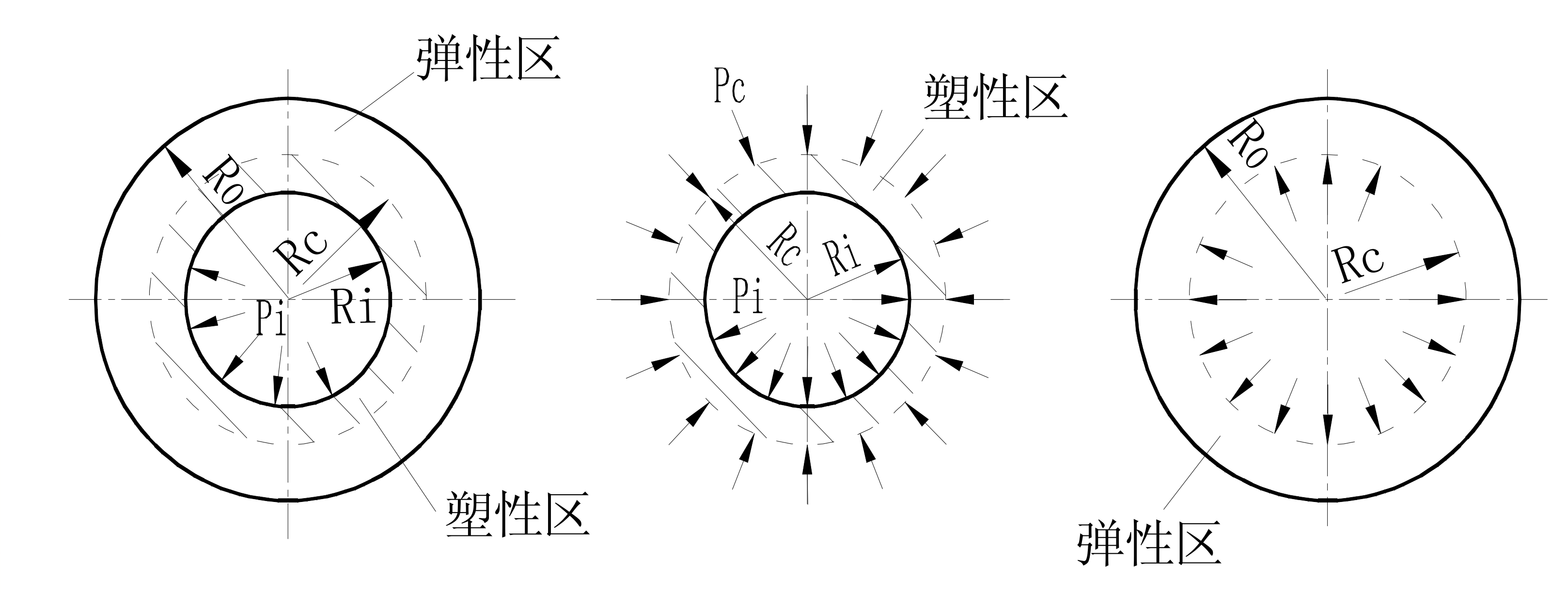


图2-22 处于弹塑性状态的厚壁圆筒

内压↑ ⇢ 塑性区↑ 弹性区↓

2.3.2 弹塑性应力（续）

描述弹塑性厚壁圆筒的几何与载荷参数：

$$R_i, P_i; R_c, P_c; R_o, P_o$$

本小节的目的：求弹性区和塑性区里的应力

假设材料是的**理想弹塑性**，其应力－应变关系如图2－23所示

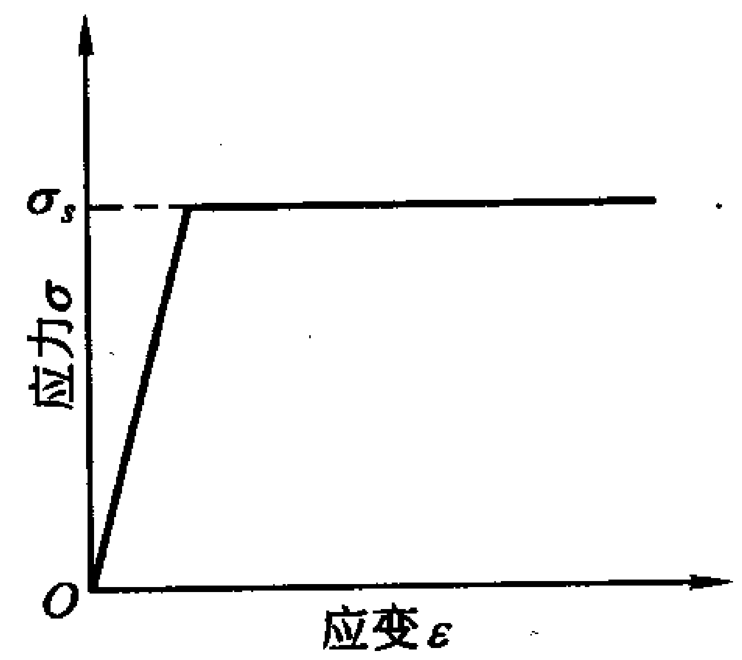


图2-23 理想弹-塑性材料的应力-应变关系

2.3.2 弹塑性应力（续）

1. 塑性区应力

平衡方程： $\sigma_\theta - \sigma_r = r\dfrac{d\sigma_r}{dr}$ （2-26）

Mises屈服失效判据： $\sigma_\theta - \sigma_r = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$ （2-40）

联立积分 →

$\sigma_r = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln r + A$ （2-41）

$r = R_i : \sigma_r = -p_i$

内壁边界条件，

求出A后带回上式

$\sigma_r = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln\dfrac{r}{R_i} - p_i$ （2-42）

带入（2-40）

（2-43） $\sigma_\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\left(1 + \ln\dfrac{r}{R_i}\right) - p_i$

（2-44） $\sigma_z = \dfrac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} = \dfrac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left(1 + 2\ln\dfrac{r}{R_i}\right) - p_i$

$r = R_c : \sigma_r = -p_c$

$p_c = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln\dfrac{R_c}{R_i} + p_i$

（2-45）

2.3.2 弹塑性应力（续）

2. 弹性区应力

弹性区内壁处于屈服状态:

$$\left(\sigma_\theta\right)_{r=R_c}-\left(\sigma_r\right)_{r=R_c}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$$

$K_c=R_o/R_c$

表2-1拉美公式

$$p_c=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\frac{R_0^2-R_c^2}{R_0^2} \quad （2\text{-}46）$$

与2-45联立

导出弹性区与塑性区交界面的p_i与R_c的关系

$$p_i=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{R_c^2}{R_0^2}+2\ln\frac{R_c}{R_i}\right) \quad （2\text{-}47）$$

（2-34）

$$\sigma_r=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\frac{R_c^2}{R_0^2}\left(1-\frac{R_0^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_\theta=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\frac{R_c^2}{R_0^2}\left(1+\frac{R_0^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_z=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\frac{R_c^2}{R_0^2}$$

若按屈雷斯卡（H. Tresca）屈服失效判据，也可导出类似的上述各表达式。各种应力表达式列于表 2-4 中

2.3.2 弹塑性应力（续）

2. 弹性区应力

表2-4 厚壁圆筒塑弹性区的应力（p_0=0时）

屈服失效判据	应力	塑性区（$R_i \le r \le R_c$）	弹性区（$R_c \le r \le R_o$）
Mises	径向应力σ_r	$\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln\frac{r}{R_i} - p_i$	$\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\frac{R_c^2}{R_o^2}(1-\frac{R_o^2}{r^2})$
	周向应力σ_θ	$\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s(1+\ln\frac{r}{R_i}) - p_i$	$\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\frac{R_c^2}{R_o^2}(1+\frac{R_o^2}{r^2})$
	轴向应力σ_z	$\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}(1+2\ln\frac{r}{R_i}) - p_i$	$\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\frac{R_c^2}{R_o^2}$
	p_i与R_c的关系	$p_i = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}(1-\frac{R_c^2}{R_o^2}+2\ln\frac{R_c}{R_i})$	
Tresca	径向应力σ_r	$\sigma_s \ln\frac{r}{R_i} - p_i$	$\frac{\sigma_s}{2}\frac{R_c^2}{R_o^2}(1-\frac{R_o^2}{r^2})$
	周向应力σ_θ	$\sigma_s(1+\ln\frac{r}{R_i}) - p_i$	$\frac{\sigma_s}{2}\frac{R_c^2}{R_o^2}(1+\frac{R_o^2}{r^2})$
	轴向应力σ_z	$\sigma_s(0.5+\ln\frac{r}{R_i}) - p_i$	$\frac{\sigma_s}{2}\frac{R_c^2}{R_o^2}$
	p_i与R_c的关系	$p_i = \sigma_s(0.5-\frac{R_c^2}{2R_o^2}+\ln\frac{R_c}{R_i})$	

2.3.2 弹塑性应力（续）

二、残余应力

当厚壁圆筒进入弹塑性状态后，卸除内压力p_i ➡ 残余应力

思考：残余应力是如何产生的？

卸载定理 卸载时应力改变量 $\Delta\sigma=\sigma-\sigma'$和应变的改变量$\Delta\varepsilon=\varepsilon-\varepsilon'$

之间存在着弹性关系 $\Delta\varepsilon=\Delta\sigma/E$ 。

思考：

残余应力该如何计算？

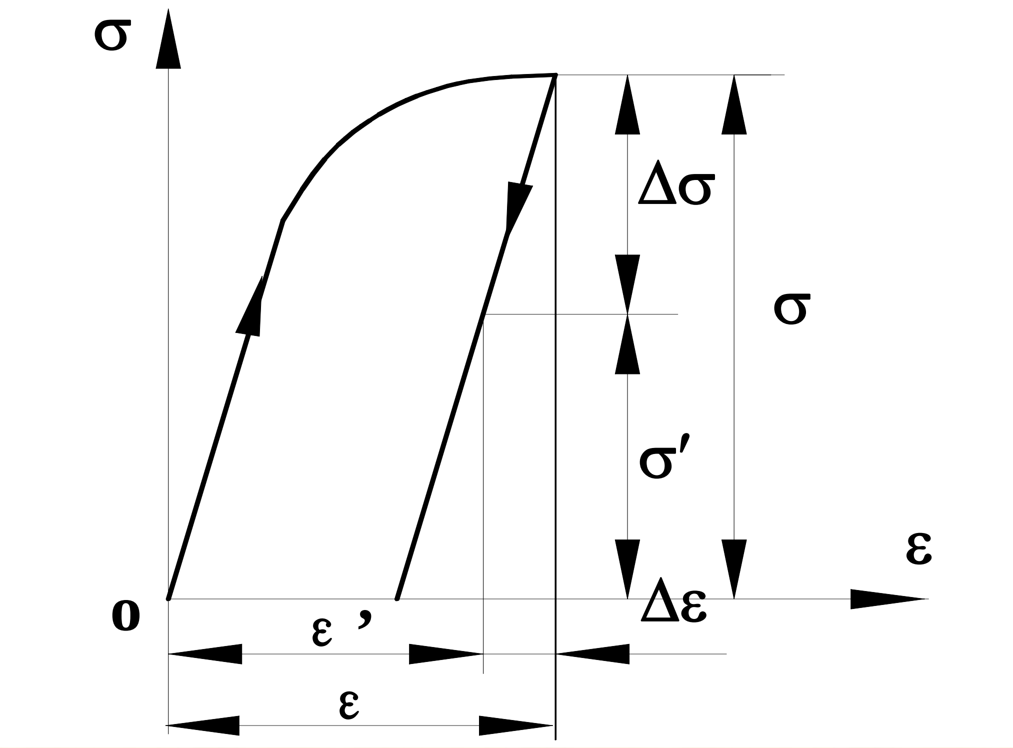


图2-24 卸载过程的应力和应变

2.3.2 弹塑性应力（续）

将表2-4中基于**Mises**屈服失效判据的塑性区中的应力减去内压引起的弹性应力，得$\boxed{\text{塑性区}}$（**Ri≤r≤Rc**）中残余应力为

$$\sigma'_\theta = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left\{1+\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2 + 2\ln\frac{r}{R_c} - \frac{R_i^2}{R_0^2 - R_i^2}\left[1+\left(\frac{R_0}{r}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2 + 2\ln\frac{R_c}{R_i}\right]\right\}$$

$$\sigma'_r = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2 - 1 + 2\ln\frac{r}{R_c} - \frac{R_i^2}{R_0^2 - R_i^2}\left[1-\left(\frac{R_0}{r}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2 + 2\ln\frac{R_c}{R_i}\right]\right\}$$

$$\sigma'_z = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2 + 2\ln\frac{r}{R_c} - \frac{R_i^2}{R_0^2 - R_i^2}\left[1-\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2 + 2\ln\frac{R_c}{R_i}\right]\right\}$$

（2-49）

2.3.2 弹塑性应力（续）

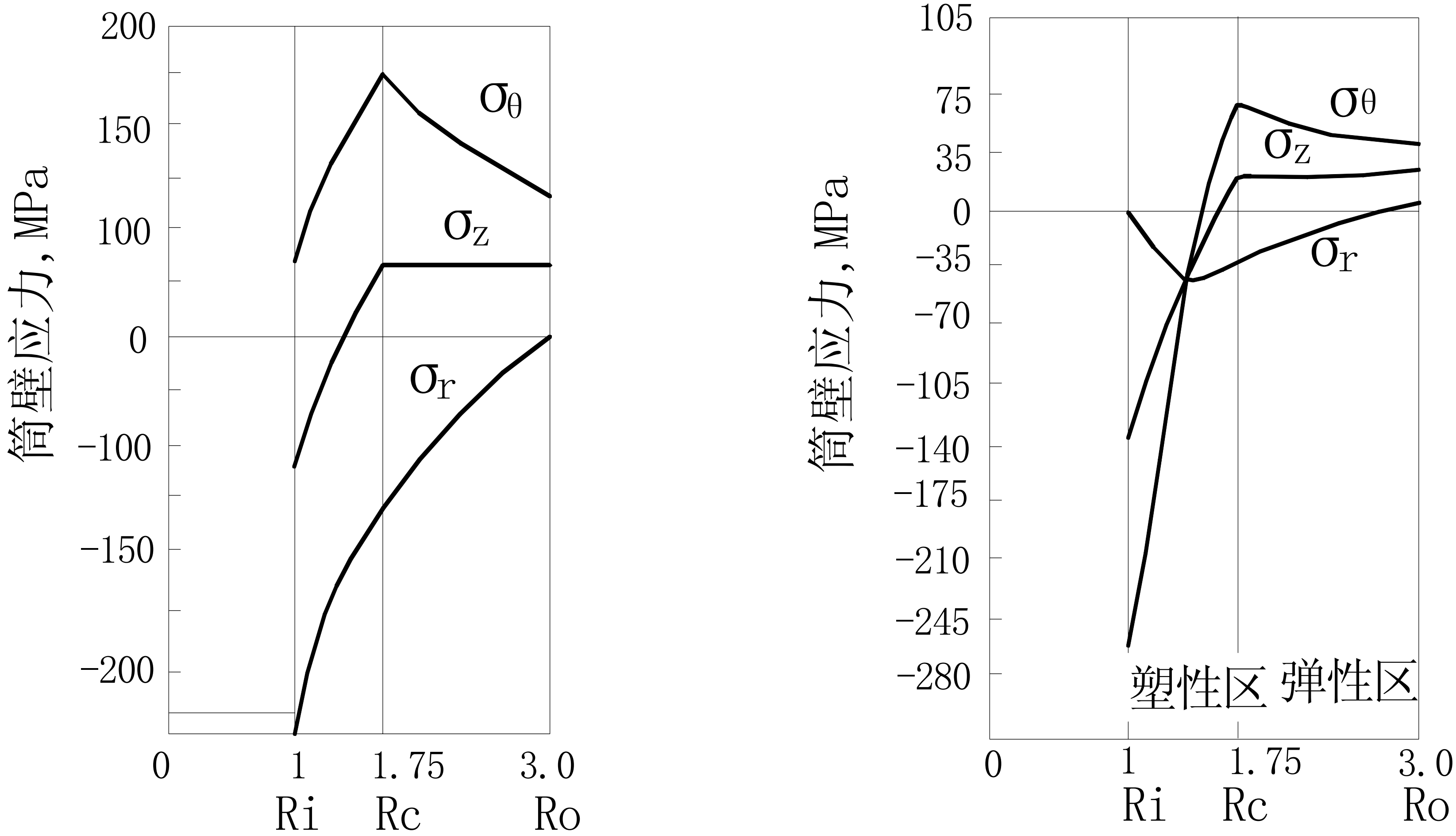
将表2-4中基于**Mises**屈服失效判据的弹性区中的应力减去内压引起的弹性应力，得弹性区（ **Rc** ≤r≤**Ro**）中残余应力为

$$\sigma'_\theta = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left[1+\left(\frac{R_0}{r}\right)^2\right]\left\{\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2 - \frac{R_i^2}{R_0^2-R_i^2}\left[1-\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2+2\ln\frac{R_c}{R_i}\right]\right\}$$

$$\sigma'_r = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left[1-\left(\frac{R_0}{r}\right)^2\right]\left\{\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2 - \frac{R_i^2}{R_0^2-R_i^2}\left[1-\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2+2\ln\frac{R_c}{R_i}\right]\right\} \quad (2\text{-}50)$$

$$\sigma'_z = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2 - \frac{R_i^2}{R_0^2-R_i^2}\left[1-\left(\frac{R_c}{R_o}\right)^2+2\ln\frac{R_c}{R_i}\right]\right\}$$

2.3.2 弹塑性应力（续）



a. 加载时的应力分布　　b. 卸载后的残余应力

图2-25 弹-塑性区的应力分布

2.3.2 弹塑性应力（续）

从图2－25中可以看出，在内压作用下，弹塑性区的应力和卸除内压后所产生的残余应力在分布上有明显的不同。不难发现，残余应力与以下因素有关：

a.应力应变关系简化模型

b.屈服失效判据

c.弹塑性交界面的半径

2.3.3 屈服压力和爆破压力

（1）爆破过程

OA： 弹性变形阶段

AC： 弹塑性变形阶段（壁厚减薄+材料强化）

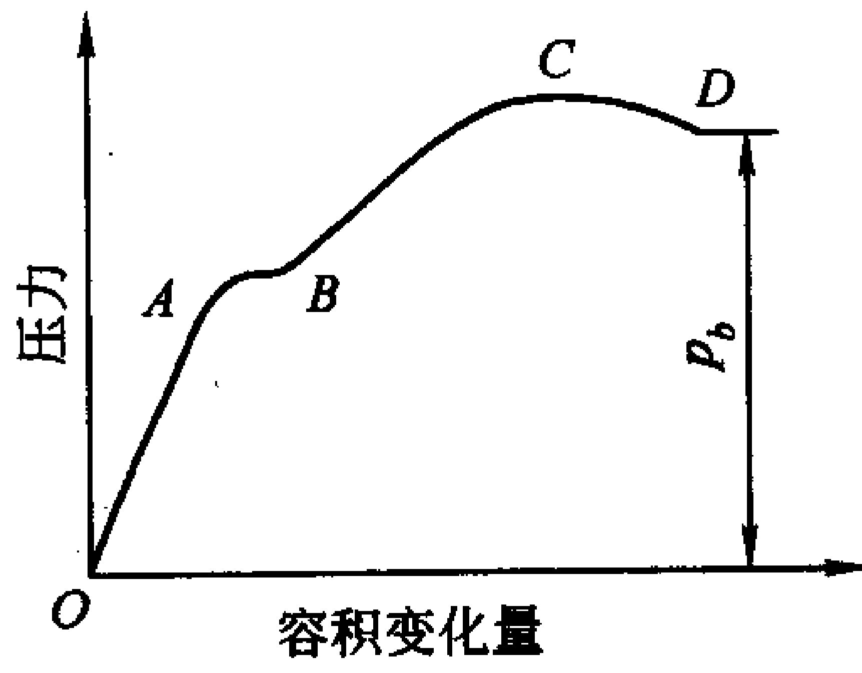


图2-26 厚壁圆筒中压力与容积变化量的关系

C: 塑性垮塌压力（**Plastic Collapse Pressure**）——容器所能承受的最大压力

D: 爆破压力（**Bursting Pressure**）

2.3.3 屈服压力和爆破压力（续）

（2）屈服压力

a. 初始屈服压力

令 $p_i = p_s$，得基于mises屈服失效判据的圆筒初始屈服压力 p_s 。

$$p_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \frac{K^2 - 1}{K^2} \tag{2-51}$$

b. 全屈服压力

当筒壁达到整体屈服状态时所承受的压力，称为圆筒全屈服压力或极限压力（**Limit pressure**），用 p_{so} 表示。

令$R_c=Ro$，得

$$p_{so} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \ln K \tag{2-52}$$

●不要把全屈服压力和塑性垮塌压力等同起来。前者假设材料为理想弹塑性，后者利用材料的实际应力应变关系。

2.3.3 屈服压力和爆破压力（续）

（3）爆破压力

厚壁圆筒爆破压力的计算公式较多，但真正在工程设计中应用的并不多，最有代表性的是福贝尔（**Faupel**）公式。

爆破压力的上限值为

$$p_{b\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_b \ln K$$

下限值为

$$p_{b\min} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln K$$

且爆破压力随材料的屈强比 σ_s / σ_b 呈线性变化规律。

$$p_b = p_{b\min} + \frac{\sigma_s}{\sigma_b}\left(p_{b\max} - p_{b\min}\right)$$

于是，福贝尔将爆破压力$\boldsymbol{p_b}$归纳为

即：

$$\boxed{p_b = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\left(2 - \frac{\sigma_s}{\sigma_b}\right)\ln K} \qquad \text{（2-53）}$$

2.3.4 提高屈服承载能力的措施

增加壁厚： 径比大到一定程度后效果不明显

对圆筒施加外压： 效果难以保证

自增强： 通过超工作压力处理，由筒壁自身外层材料的弹性收缩引起残余应力。工程上常用。