系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(12) (2009, 12), 1559–1570

命题逻辑中概率真度的相似度及伪距离*

于 西 昌
(聊城职业技术学院，山东 252000)
胡 凯
(北京师范大学数学科学学院，北京 100875; 聊城大学数学科学学院，山东 252059)
张 兴 芳
(聊城大学数学科学学院，山东 252059)

摘要 通过引入赋值密度函数、边缘密度函数等概念，给出了连续值命题逻辑系统中公式概率真度的定义，研究了概率真度的推理规则并证明了全体公式的概率真度之集在 [0,1] 中的稠密性，在此基础上给出了 3 种相似度，讨论了其性质及关系，并由此定义了 3 种伪距离，确定了三者之间的比例关系，为推理程度的数值化提供了依据.

关键词 赋值密度函数，概率真度，推理规则，相似度，伪距离.

MR(2000) 主题分类号 03B50

1 引言及预备知识

数理逻辑的特点在于符号化和形式化，它和计算数学有着截然不同的风格；一个自然的问题是：能不能把数值计算的思想融入到数理逻辑之中以便其具有某种灵活而扩大其可能的应用范围呢？回答是肯定的. 事实上，早在 20 世纪 50 年代，文献 [1] 就用 "指派真值" 来反映逻辑概念的程度化思想. 这种程度化的思想在 Pavelka 的系列文章 [2–4] 中得到了全面的发展，其中几乎所有概念都已数值化了. 近年来，王国俊教授先后提出了模糊值、二值、 n 值命题逻辑公式真度的理论 [5−7], 特别是文 [5], 它针对连续值命题逻辑利用积分工具引入公式的真度，为连续值命题逻辑系统中近似推理提供了一种可供利用的构架. 但文献 [5] 的公式真度是建立在赋值均匀的思想上. 文 [8, 9] 虽然引入了赋值密度函数的概念，并得到了一些概率真度的推理规则，但赋值密度函数是一种特殊的赋值密度函数，还不具备更广泛的应用性. 本文提出一般性的赋值密度函数，定义了连续值命题逻辑系统中公式的概率真度，给出了边缘密度的概念，得到了一些概率真度的推理规则；给出了 3 种相似度的定义并讨论了其性质及关系；定义了 3 种伪距离，确定了三者之间的比例关系，为推理程度的数值化提供了可靠的依据.

* 国家自然科学基金 (60875034) 和山东省自然科学基金 (Y2003A01) 资助课题.
收稿日期：2008-10-27, 收到修改稿日期：2009-03-03.

为方便表述，现对本文用到的知识进行简要叙述，并引出相关符号. 设

$$\int_{\triangle_n} f\mathrm{d}\omega_n = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\cdots\mathrm{d}\omega_n, \quad f(x_1,x_2\cdots x_n):[0,1]^n \to [0,1],$$

以 $\triangle_n$ 记 n- 维方体 $[0,1]^n$, 以 $\mathrm{d}\omega_n$ 表示 $\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$, 则

$$\int_{\triangle_n} f\mathrm{d}\omega_n = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}\omega_n.$$

定义 1.1[5] 设 $f:[0,1]^n \to [0,1]$, 则 f 的 k 次扩张定义为

$$f^{(k)}(x_1,x_2,\cdots,x_{n+k}) = f(x_1,x_2,\cdots,x_n), \quad \forall (x_1,x_2,\cdots,x_{n+k}) \in [0,1]^{n+k},$$

这里 $k=0,1,2,\cdots$, 当 $k=0$ 时 $f^{(0)}=f$.

定理 1.2 (积分不变性定理)[5] 任一 n 元函数 $f:[0,1]^n \to [0,1]$ 和它的 k 次扩张 $f^{(k)}$ 在各自定义域上的积分相等. 即

$$\int_{[0,1]^n} f\mathrm{d}\omega_n = \int_{[0,1]^{n+k}} f^{(k)}\mathrm{d}\omega_{n+k}.$$

设 $S=\{p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots\}$ 是一个可数集， $\neg, \vee$ 和 $\to$ 分别是 S 上的一元，二元和二元运算． $F(S)$ 是由 S 生成的 $(\neg,\vee,\to)$ 型自由代数. 我们称 $F(S)$ 中的元素为命题或公式， S 中的元素 $p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots$ 为原子命题或原子公式.

定义 1.3[8] 设 $F(S)$ 的赋值格 $M=[0,1]$, 在 M 中规定 $\neg x = 1-x$, $x\vee y=\max(x,y)$, $x\to y = R(x,y)$, 则 M 成为 $(\neg,\vee,\to)$ 型代数 Fuzzy 命题逻辑系统，其中 $R:[0,1]^n \to [0,1]$ 是某蕴涵算子，如 R 为 Lukasiewicz 算子 R_{Lu} .

在 L 中, 设 $A=A(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in F(S)$, A 由原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 通过 $\neg,\vee,\to$ 连接而成, 则 A 对应一个 n 元函数 $\overline{A}:[0,1]^n\to[0,1]$, 这里的 $\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是由变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 通过运算符号 $\neg$, $\vee$, $\to$ 连接而成，其方式恰如 A 由 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 通过 $\neg$, $\vee$, $\to$ 连接而得的方式，称 $\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为由公式 A 诱导的公式函数 (或称 $\overline{A}$ 为 A 的真值函数).

Lukasiewicz 蕴涵算子 $\to: [0,1]^2\to[0,1]$ 满足 $x\to y=(1-x+y)\wedge 1, x,y\in[0,1]$ ，与之相伴随的 T 模 $\otimes:[0,1]^2\to[0,1]$ 满足 $x\otimes y=(x+y-1)\vee 0$, $x,y\in[0,1]$ 这里 $x\otimes y\le z$ 当且仅当 $x\le y\to z$.

由于 $x,y\in[0,1]$, 所以 $x\to y=(1-x+y)\wedge 1 = 1-x+x\wedge y$.

引理 1.4 设 $a,b,c,d\in[0,1]$, 则

(1) $(a\wedge c)\otimes(b\wedge d)\le(a\otimes b)\wedge(c\otimes d)$;

(2) $(a\to b)\otimes(b\to c)\le(a\to c)$.

2 逻辑公式概率真度

定义 2.1

(1) 设 $f_1(x):[0,1]\to R^+\cup\{0\}$, 且 $\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x=1$ ，称 $f_1(x)$ 为一元赋值密度函数;

(2) 设 $f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_1(x_1)g_1(x_2)\cdots h_1(x_n)$ ，且 $\int_{\triangle_n} f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}\omega_n=1$ ，称 $f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 n 元独立性赋值密度函数;

(3) 若存在一个 $f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 且 $\int_{\triangle_n} f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}\omega_n=1$, 称 $f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 n 元一般性赋值密度函数;

(4) 若存在一个 $f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 且 $\int_{\triangle_n} f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}\omega_n=1$, 称

$$f_1(x_1)=\int_0^1\mathrm{d}x_2\int_0^1\mathrm{d}x_3\cdots\int_0^1 f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n$$

为 n 元一般性赋值密度函数的边缘密度函数;

(5) 若存在一个 $f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 且 $\int_{\triangle_n} f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}\omega_n=1$, 称

$$f_2(x_1,x_2)=\int_0^1\mathrm{d}x_3\int_0^1\mathrm{d}x_4\cdots\int_0^1 f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n$$

为 n 元一般性赋值密度函数的联合密度函数. 同样可以类推 $f_3(x_1,x_2,x_3)$ 等联合密度函数.

注　(1) 虽然要求赋值密度函数的积分等于 1, 但积分等于 1 的赋值密度函数不是唯一的;

(2) 为适应公式 (含有不同个数的原子公式) 的需要及后面推理的要求, 我们将一系列赋值密度函数 $f_1(x_1),f_2(x_1,x_2),f_3(x_1,x_2,x_3),\cdots,f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 分别记作一元、二元、3 元、$\cdots$、$n$ 元赋值密度函数. 在不引起混淆的情况下, 把 $f(x_1),f(x_1,x_2),f(x_1,x_2,x_3),\cdots,f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 分别记作一元、二元、 3 元、 $\cdots$ 、 n 元赋值密度函数;

(3) $f_1(x),g_1(x),\cdots,h_1(x)$ 代表不同的一元赋值密度函数.

定义 2.2[9]　设 $A\in F(S)$, $R:[0,1]^n\to[0,1]$ 是某蕴涵算子, $\overline{A}$ 为 A 的真值函数, f 为赋值密度函数, 则称

$$\tau_{R-p}(A)=\int_{\triangle}\overline{A_R}f\mathrm{d}\omega$$

为 A 的概率真度, 简记为 τ_R 或 τ.

例 1　设 p,q 为原子公式, $f(x,y)=4xy$, 求 $\tau(p\vee q)$, $\tau(p\wedge q)$, $\tau(p\to q)$.

解　显然 $\int_{\triangle_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$, $f(x)=\int_0^1 4xy\mathrm{d}y=2x$, $f(y)=\int_0^1 4xy\mathrm{d}x=2y$.

因为 $f(xy)=f(x)f(y)$, 所以这里的 $f(x),f(y)$ 为独立性赋值密度函数, 则

$$\tau(p\wedge q)=\int_{\triangle_2}(x\wedge y)\cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\triangle_2(x\geq y)} y\cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\triangle_2(x<y)} x\cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8}{15},$$

$$\tau(p\vee q)=\int_{\triangle_2}(x\vee y)\cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\triangle_2(x\geq y)} x\cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\triangle_2(x<y)} y\cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{5},$$

$$\begin{aligned}\tau(p\to q)&=\int_{\triangle_2}(x\to y)\cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\triangle_2(x\geq y)}(1-x+y)\cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\triangle_2(x<y)}4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(1-x+y)\cdot 4xy\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y 4xy\mathrm{d}x=\frac{13}{15}.\end{aligned}$$

例 2　设 p,q 为原子公式, $f(x,y)=x+y$, 求 $\tau(p\vee q)$, $\tau(p\wedge q)$, $\tau(p\to q)$.

解　显然 $\int_{\triangle_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$, $f(x)=\int_0^1(x+y)\mathrm{d}y=x+\frac{1}{2}$.

因为 $f(xy)\neq f(x)f(y)$, 所以这里的 $f(x),f(y)$ 为一般性赋值密度函数的边缘密度函数, $f(x,y)=x+y$ 为一般性赋值密度函数，则

$$\tau(p\wedge q)=\int_{\triangle_2}(x\wedge y)(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\triangle_2(x\geq y)}y(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\triangle_2(x<y)}x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{12},$$

$$\tau(p\vee q)=\int_{\triangle_2}(x\vee y)(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\triangle_2(x\geq y)}x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\triangle_2(x<y)}y(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{4},$$

$$\begin{aligned}\tau(p\to q)&=\int_{\triangle_2}(x\to y)(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{\triangle_2(x\geq y)}(1-x+y)(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\triangle_2(x<y)}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

3 逻辑公式概率真度的推理规则

在推理规则中，不引入公理系统，而是以真度为 1 的公式取代公理.

定理 3.1 设 $A,B,C\in F(S)$, $R:[0,1]^n\to[0,1]$ 是 Lukasiewicz 蕴涵算子， $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ 为 A,B,C 的真值函数， f 为赋值密度函数，则

(1) 若 $\tau(A)\geq\alpha$, $\tau(A\to B)\geq\beta$, 则 $\tau(B)\geq\alpha+\beta-1$(概率真度的 MP 规则);

(2) 若 $\tau(A\to B)\geq\alpha$, $\tau(B\to C)\geq\beta$, 则 $\tau(A\to C)\geq\alpha+\beta-1$(概率真度的 HS 规则);

(3) 若 $\tau(A\to B)\geq\alpha$, $\tau(A\to C)\geq\beta$, 则 $\tau(A\to B\wedge C)\geq\alpha+\beta-1$(概率真度交推理规则).

证 (1) 由积分不变性定理，不妨设 A 与 B 含有同样的原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_n$, 由定义 $\tau(A)=\int_\triangle\overline{A_R}\cdot f\mathrm{d}\omega$ 及前题条件 $\tau(A)=\int_\triangle\overline{A_R}\cdot f\mathrm{d}\omega\geq\alpha$, $\tau(A\to B)\geq\beta$ 知

$$\begin{aligned}\tau(B)&=\int_\triangle\overline{B}\cdot f\mathrm{d}\omega=\int_\triangle[\overline{A}+(1-\overline{A}+\overline{B})-1]\cdot f\mathrm{d}\omega\\&\geq\int_\triangle[\overline{A}+(1-\overline{A}+\overline{B})\wedge 1-1]\cdot f\mathrm{d}\omega\\&=\int_\triangle\overline{A}\cdot f\mathrm{d}\omega+\int_\triangle[(1-\overline{A}+\overline{B})\wedge 1]\cdot f\mathrm{d}\omega-\int_\triangle 1\cdot f\mathrm{d}\omega\\&\geq\alpha+\beta-1.\end{aligned}$$

(2) 设 $\triangle^*=\{\omega\in\triangle|(1-\overline{A}+\overline{C})\cdot f(\omega)>1\}$, 则

$$\begin{aligned}\tau(A\to C)&=\int_\triangle\overline{A\to C}\cdot f\mathrm{d}\omega=\int_{\triangle^*}f\mathrm{d}\omega+\int_{\triangle-\triangle^*}(1-\overline{A}+\overline{C})\cdot f\mathrm{d}\omega\\&=\int_{\triangle^*}f\mathrm{d}\omega+\int_{\triangle-\triangle^*}[(1-\overline{A}+\overline{B})+(1-\overline{B}+\overline{C})-1]\cdot f\mathrm{d}\omega\\&=\int_{\triangle^*}f\mathrm{d}\omega+\int_{\triangle-\triangle^*}(1-\overline{A}+\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega+\int_{\triangle-\triangle^*}(1-\overline{B}+\overline{C})f\mathrm{d}\omega-\int_{\triangle-\triangle^*}f\mathrm{d}\omega\\&=\Big(\int_{\triangle^*}f\mathrm{d}\omega+\int_{\triangle-\triangle^*}(1-\overline{A}+\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega\Big)\\&\quad+\Big(\int_{\triangle^*}f\mathrm{d}\omega+\int_{\triangle-\triangle^*}(1-\overline{B}+\overline{C})f\mathrm{d}\omega-\int_\triangle f\mathrm{d}\omega\Big)\end{aligned}$$

$$= \int_{\triangle}[(1-\overline{A}+\overline{B})\wedge 1]\cdot f\mathrm{d}\omega + \int_{\triangle}[(1-\overline{B}+\overline{C})\wedge 1]\cdot f\mathrm{d}\omega - \int_{\triangle} 1\cdot f\mathrm{d}\omega$$
$$\geq \alpha+\beta-1.$$

(3) 证明方法类似于定理 3.1 中的 (2).

定理 3.2 设 $A,B,C\in F(S)$, $R:[0,1]^n\to[0,1]$ 是 Lukasiewicz 蕴涵算子， $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ 为 A,B,C 的真值函数， f 为赋值密度函数，则

(1) $\tau(A\to B)\leq \tau(A)\to\tau(B)$;

(2) $\tau(A\to B)\otimes\tau(B\to C)\leq\tau(A\to C)$.

证 (1) 因为 $(1-\overline{A}+\overline{B})\wedge 1\leq 1-\overline{A}+\overline{B}$, 所以 $\overline{B}\geq\overline{A}+(1-\overline{A}+\overline{B})\wedge 1-1$, 从而有 $\tau(B)=\int_{\triangle}\overline{B}\cdot f\mathrm{d}\omega\geq\int_{\triangle}[\overline{A}+(1-\overline{A}+\overline{B})\wedge 1-1]\cdot f\mathrm{d}\omega=\tau(A)+\tau(A\to B)-1$, 即 $\tau(A\to B)\leq 1-\tau(A)+\tau(B)$, $\tau(A\to B)\leq 1$, 所以 $\tau(A\to B)\leq[1-\tau(A)+\tau(B)]\wedge 1$.

(2) 因为 $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$, 由 (1) 知 $\tau(A\to B)\leq\tau(B\to C)\to(A\to C)\leq\tau(B\to C)\to\tau(A\to C)$ 知 $\tau(A\to B)\otimes\tau(B\to C)\leq\tau(A\to C)$.

定理 3.3 设 $A,B\in F(S)$, f 为赋值密度函数，则

(1) 若 $\vdash A\to B$, 则 $\tau(A)\leq\tau(B)$;

(2) $\tau(A\vee B)=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B)$;

(3) 若 $A\sim B$, 即 A 与 B 可证等价，则 $\tau(A)=\tau(B)$.

证 (1) $\vdash A\to B$, 则 $\tau(A\to B)=1$, 所以 $1=\int_{\triangle}\overline{A\to B}\cdot f\mathrm{d}\omega=\int_{\triangle}(1-\overline{A}+\overline{B})\wedge 1\cdot f\mathrm{d}\omega\leq\int_{\triangle}(1-\overline{A}+\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega=1-\tau(A)+\tau(B)$, 即 $\tau(A)\leq\tau(B)$.

(2) $\tau(A\wedge B)=\int_{\triangle}\overline{(\neg(\neg A\vee\neg B))}\cdot f\mathrm{d}\omega=\int_{\triangle}(1-(\neg\overline{A}\vee\neg\overline{B}))\cdot f\mathrm{d}\omega=\int_{\triangle}f\mathrm{d}\omega-\int_{\triangle}(\neg A\vee\neg B)\cdot f\mathrm{d}\omega=1-\tau(\neg A)\vee\tau(\neg B)$, 及

$$1-\tau(\neg A)\vee\tau(\neg B)=\begin{cases}\tau(B), & \tau(A)>\tau(B),\\ \tau(A), & \tau(A)\leq\tau(B),\end{cases}$$

并且

$$\begin{aligned}\tau(A\vee B)&=\int_{\triangle}\overline{((A\to B)\to B)}\cdot f\mathrm{d}\omega\\ &=\tau((A\to B)\to B)\\ &=\tau(A\to B)\to\tau(B)=[1-\tau(A\to B)+\tau(B)]\wedge 1\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}&[1-\tau(A\to B)+\tau(B)]\wedge 1\\ =&[1-(1-\tau(A)+\tau(B))\wedge 1+\tau(B)]\wedge 1=\begin{cases}\tau(A), & \tau(A)>\tau(B),\\ \tau(B), & \tau(A)\leq\tau(B),\end{cases}\end{aligned}$$

所以 $\tau(A\vee B)=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B)$.

(3) 若 $A\sim B$, 则 $\vdash A\to B$ 且 $\vdash B\to A$, 则 $\tau(A)\leq\tau(B)$ 且 $\tau(B)\leq\tau(A)$, 证毕.

4 概率真度值在 $[0,1]$ 中的分布

在这里将证明全体可能的概率真度值作为 [0,1] 中的子集是没有孤立点的.

令 $\Gamma^{(n)}=\{A\in F(S)|$ 存在一个从 Γ 出发的长度为 n 的一个证明 $\}$, 显然 $D(\Gamma)=\cup\{\Gamma^{(n)}|n=1,2,\cdots\}$.

在 Lukasiewicz 系统中规定： $A\otimes B=\neg(A\to\neg B)$, $A\oplus B=\neg A\to B$, $A^n=A\otimes A\otimes\cdots\otimes A$, $nA=A\oplus A\oplus\cdots\oplus A$.

引理 4.1 设 $A\in F(S)$, 则 $\overline{A^n}=(\overline{A})^n$, $n=1,2,\cdots$.

引理 4.2 设 $A\in F(S)$, 则 $\tau(A^n)=\int_{\triangle}((n\overline{A}-(n-1)\vee 0)\vee 0)\mathrm{d}\omega$, $n=1,2,\cdots$.

引理 4.3 设 $A\in F(S)$, 则 $A^n\in D(A), nA\in D(A)$, $n=1,2,\cdots$.

引理 4.4[12] 对任意 $\frac{b}{a}\in Q\cap[0,1]$ $(b,a\in N, b<a)$, 总存在 $A_b^a(p)\in M$, 使其对应的 McNaughton 函数为

$$\overline{A_b^a}=\begin{cases}0, & x\in\Big[0,\dfrac{b}{a}\Big],\\ ax-b, & x\in\Big[\dfrac{b}{a},\dfrac{b+1}{a}\Big],\\ 1, & x\in\Big[\dfrac{b+1}{a},1\Big].\end{cases}$$

定理 4.5[13] 全体公式的积分真度之集在 $[0,1]$ 中稠密，即

$$\overline{A}(x)=\overline{A}_0^n(x)\wedge\neg\overline{A}_m^n(x)=\begin{cases}nx, & x\in\Big[0,\dfrac{1}{n}\Big],\\ 1, & x\in\Big[\dfrac{1}{n},\dfrac{m}{n}\Big],\\ 1-nx+m, & x\in\Big[\dfrac{m}{n},\dfrac{m+1}{n}\Big],\\ 0, & x\in\Big[\dfrac{m+1}{n},1\Big],\end{cases}$$

$$\tau(A(p))=\int_0^{\frac{1}{n}}nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{m}{n}}1\mathrm{d}x+\int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}}(1-nx+m)\mathrm{d}x+\int_{\frac{m+1}{n}}^1 0\mathrm{d}x=\frac{m}{n}.$$

定理 4.6 设 $A,B\in F(S)$, f 为赋值密度函数，则全体公式的概率真度之集在 $[0,1]$ 中稠密.

证 由定理 4.5 知,

$$\begin{aligned}\tau(A)&=\int_0^1\overline{A}\cdot f\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{\frac{1}{n}}nx\cdot f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{m}{n}}1\cdot f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}}(1-nx+m)\cdot f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{m+1}{n}}^1 0\cdot f(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{\frac{1}{n}}nx\cdot f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{m}{n}}1\cdot f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}}(1-nx+m)\cdot f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为在 $[0,\frac{1}{n}]$ 上有 $0\le n|x|\le 1$ 以及在 $[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n}]$ 上有 $0\le|1-nx+m|\le 1$, 则

$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^{\frac{1}{n}}nx\cdot f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{m}{n}}1\cdot f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}}(1-nx+m)\cdot f(x)\mathrm{d}x\Big|\\ \le&\Big|\int_0^{\frac{1}{n}}nx\cdot f(x)\mathrm{d}x\Big|+\Big|\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{m}{n}}1\cdot f(x)\mathrm{d}x\Big|+\Big|\int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}}(1-nx+m)\cdot f(x)\mathrm{d}x\Big|\end{aligned}$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{n}} n|x|\cdot|f(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{m}{n}} 1\cdot|f(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}} |(1-nx+m)|\cdot|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{n}} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{m}{n}} 1\cdot|f(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty,$$

从而存在一个有理数 ζ, 使得

$$\int_0^{\frac{1}{n}} nx\cdot f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{m}{n}} 1\cdot f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}} (1-nx+m)\cdot f(x)\mathrm{d}x > \zeta,$$

即 $\tau(A)=\int_0^1 \overline{A}\cdot f\mathrm{d}x > \zeta$, 从而稠密性得证.

5　公式间的相似度及伪距离

利用公式概率真度的定义，在 Lukasiewicz 逻辑系统中给出公式间相似度定义如下.

定义　5.1　设 $A,B\in F(S)$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ 为 A,B 的真值函数， f 为赋值密度函数，则称

(1) $\xi(A,B)=\int_{\triangle}[(\overline{A}\to\overline{B})\wedge(\overline{B}\to\overline{A})]\cdot f\mathrm{d}\omega$ 为 A 与 B 之间的第一种积分相似度;

(2) $\mu(A,B)=\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)$ 为 A 与 B 之间的第二种积分相似度;

(3) $\eta(A,B)=(\tau(A)\to\tau(B))\wedge(\tau(B)\to\tau(A))$ 为 A 与 B 之间的第三钟积分相似度.

为研究方便，我们把以上 3 种积分相似度统一记为 K, 并令 $K_1=\xi, K_2=\mu, K_3=\eta$. 则有下面的命题.

命题　5.2　设 $A,B\in F(S)$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ 为 A,B 的真值函数， f 为赋值密度函数，则

(1) $K(A,A)=1$;

(2) $K(A,B)=K(B,A)$;

(3) $K_1(A,B)\leq K_2(A,B)\leq K_3(A,B)$.

证　显然 (1), (2) 成立.

(3) 由定理 3.2 知 $\mu(A,B)\leq\eta(A,B)$, 即 $K_2(A,B)\leq K_3(A,B)$. 因为 $\int_{\triangle}[(\overline{A}\to\overline{B})\wedge(\overline{B}\to\overline{A})]\cdot f\mathrm{d}\omega\leq\int_{\triangle}(\overline{A}\to\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega$, 同时 $\int_{\triangle}[(\overline{A}\to\overline{B})\wedge(\overline{B}\to\overline{A})]\cdot f\mathrm{d}\omega\leq\int_{\triangle}(\overline{B}\to\overline{A})\cdot f\mathrm{d}\omega$, 知 $\int_{\triangle}[(\overline{A}\to\overline{B})\wedge(\overline{B}\to\overline{A})]\cdot f\mathrm{d}\omega\leq\int_{\triangle}(\overline{A}\to\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega\wedge\int_{\triangle}(\overline{B}\to\overline{A})\cdot f\mathrm{d}\omega$, 得 $\xi(A,B)\leq\mu(A,B)$, 即 $K_1(A,B)\leq K_2(A,B)$.

例 3　设 p,q 为原子公式， $f(x,y)=4xy$, 求 $\xi(p,q)$, $\mu(p,q)$, $\eta(p,q)$.

解

$$\begin{aligned}\xi(p,q)&=\int_{\triangle}[(1-x+y)\wedge(1-y+x)]\cdot 4xy\mathrm{d}\omega\\&=\int_{\triangle(x\geq y)}(1-x+y)\cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\triangle(x<y)}(1-y+x)\cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{11}{30}+\frac{11}{30}=\frac{11}{15},\\\mu(p,q)&=\tau(x\to y)\wedge\tau(y\to x)\\&=\int_{\triangle}[(1-x+y)\wedge 1]4xy\mathrm{d}\omega\wedge\int_{\triangle}[(1-y+x)\wedge 1]4xy\mathrm{d}\omega=\frac{13}{15},\\\eta(p,q)&=[\tau(x)\to\tau(y)]\wedge[\tau(y)\to\tau(x)]=1.\end{aligned}$$

引理 5.3 设 $\forall a',b',c'\in[0,1]$, $\exists m\in(0,1]$ 若 $a=ma'$, $b=mb'$, $c=mc'$, 则

$$(a\to c)\wedge(c\to a)\geq(a\to b)\wedge(b\to a)+(b\to c)\wedge(c\to b)-1.$$

证 因为 $m\in(0,1]$, 所以当 $a'<b'$ 时，有 $a<b$, 其它类同．由文 [11] 的引理 3.3 知，以上不等式成立.

定理 5.4 设 $A,B,C\in F(S)$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ 为 A,B 的真值函数， f 为赋值密度函数，则
(1) $\xi(A,C)\geq\xi(A,B)+\xi(B,C)-1$;
(2) $\mu(A,C)\geq\mu(A,B)+\mu(B,C)-1$;
(3) $\eta(A,C)\geq\eta(A,B)+\eta(B,C)-1$.
证 (1) 由引理 5.3 得

$$\begin{aligned}&\xi(A,C)=\int_{\triangle}[(\overline{A}-\overline{C})\wedge(\overline{C}\to\overline{A})]\cdot f\mathrm{d}\omega\\ \geq&\int_{\triangle}[(\overline{A}\to\overline{B})\wedge(\overline{B}\to\overline{A})+(\overline{B}\to\overline{C})\wedge(\overline{C}\to\overline{B})-1]\cdot f\mathrm{d}\omega\\ =&\int_{\triangle}[(\overline{A}\to\overline{B})\wedge(\overline{B}\to\overline{A})]\cdot f\mathrm{d}\omega+\int_{\triangle}[(\overline{B}\to\overline{C})\wedge(\overline{C}\to\overline{B})]\cdot f\mathrm{d}\omega-\int_{\triangle}f\mathrm{d}\omega\\ =&\,\xi(A,B)+\xi(B,C)-1.\end{aligned}$$

(2) 由定理 3.2 知， $\tau(A\to C)\geq\tau(A\to B)\otimes\tau(B\to C)$ 及 $\tau(C\to A)\geq\tau(C\to B)\otimes\tau(B\to A)=\tau(B\to A)\otimes\tau(C\to B)$, 再由引理 1.4 知 $\tau(A\to C)\wedge\tau(C\to A)\geq(\tau(A\to B)\otimes\tau(B\to C))\wedge\tau(B\to A)\otimes\tau(C\to B)=(\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A))\otimes(\tau(B\to C)\wedge\tau(C\to B))$.
(3) 结合引理 1.4, 证明方法类似 (2).

定理 5.5 设 $A,B\in F(S)$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ 为 A,B 的真值函数， f 为赋值密度函数，则

$$K(A,C)\geq K(A,B)+K(B,C)-1\ (\text{统一表达式}).$$

命题 5.6 设 $A,B\in F(S)$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ 为 A,B 的真值函数， f 为赋值密度函数，在 $F(S)$ 上定义二元非负实函数 $\rho:F(S)\times F(S)\to[0,1]$ 如下

$$\rho(A,B)=1-K(A,B),\quad \rho_i(A,B)=1-K_i(A,B),\quad i=1,2,3,$$

则 ρ 是 $F(S)$ 上的伪距离， $(F(S),\rho)$ 为伪距离空间，其相应空间记为 $(F(S),\rho_i)$.

命题 5.7 设 $A,B,C\in F(S)$, 则
(1) $0\leq\rho(A,B)\leq1$;
(2) $\rho(A,A)=0$;
(3) $\rho(A,B)=\rho(B,A)$;
(4) $\rho_1(A,B)\geq\rho_2(A,B)\geq\rho_3(A,B)$;
(5) $\rho(A,C)\leq\rho(A,B)+\rho(B,C)$.
证 (1) 显然成立.
(2) $\rho(A,A)=1-K(A,A)=1-1=0$.
(3) $\rho(A,B)=1-K(A,B)=1-K(B,A)=\rho(B,A)$.
(4) 由命题 5.2 及命题 5.6 可得.
(5) $\rho(A,C)=1-K(A,C)\leq[1-K(A,B)]+[1-K(B,C)]=\rho(A,B)+\rho(B,C)$.

定理 5.7 设 A, $B\in F(S)$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ 为 A,B 的真值函数， f 为赋值密度函数，则
(1) $\rho_1(A,B)=\int_{\triangle}|\overline{A}-\overline{B}|\cdot f\mathrm{d}\omega$;

(2) $\rho_3(A,B)=|\tau(A)-\tau(B)|=|\int_\triangle(\overline{A}-\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega|$.

证 (1) 容易验证

$$\rho_1(A,B)=1-\xi(A,B)=\int_\triangle[1-(1-\overline{A}+\overline{B})\wedge(1-\overline{B}+\overline{A})]\cdot f\mathrm{d}\omega=\int_\triangle|\overline{A}-\overline{B}|f\mathrm{d}\omega.$$

(2) $\rho_3(A,B)=1-[(1-\tau(A)+\tau(B))\wedge(1-\tau(B)+\tau(A))]\wedge 1=|\int_\triangle(\overline{A}-\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega|$ $=|\tau(A)-\tau(B)|$.

命题 5.8 设 $A,B\in F(S)$, $\overline{A},\overline{B}$ 为 A,B 的真值函数， f 为赋值密度函数，则

$$\rho_i(\neg A,\neg B)=\rho_i(A,B),\quad i=1,2,3.$$

证 (1) $\rho_1(\neg A,\neg B)=\int_\triangle|\neg\overline{A},\neg\overline{B}|f\mathrm{d}\omega=\int_\triangle|(1-\overline{A})-(1-\overline{B})|f\mathrm{d}\omega=\int_\triangle|\overline{B}-\overline{A}|f\mathrm{d}\omega=\rho_1(A,B)$.

(2) $\rho_2(\neg A,\neg B)=1-[\tau(\neg A\to\neg B)\wedge\tau(\neg B\to\neg A)]=1-[(1-(1-\tau(A))+(1-\tau(B))\wedge(1-(1-\tau(B)+1-\tau(A))]=\rho_2(A,B)$.

(3) $\rho_3(\neg A,\neg B)=|\tau(\neg A)-\tau(\neg B)|=|\tau(\neg A)-\tau(\neg B)|=|\int_\triangle(1-\overline{A})-(1-\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega|=\rho_3(A,B)$.

推论 5.9 设 $A,A_n\in F(S)$ $(n=1,2,\cdots)$, f 为赋值密度函数，则

$$\lim_{n\to\infty}\rho_i(A_n,A)=0 \text{ 当且仅当 } \lim_{n\to\infty}\rho_i(\neg A_n,\neg A)=0,\quad i=1,2,3.$$

命题 5.10 由推论 5.9 知，一元运算 “$\neg$” 在 $(F(S),\rho_i)$, $i=1,2,3$ 中是连续的.

下面证明并运算 “$\vee$” 与蕴涵运算 “$\to$” 也在 $(F(S),\rho_i), i=1,2$ 是连续的.

引理 5.11 设 $\forall a',b',c'\in[0,1]$, $\exists m\in(0,1]$ 设 $a=ma'$, $b=mb'$, $c=mc'$, 则

$$|a\vee c-b\vee c|\le|a-b|.$$

证 不妨设 $a'\le b'$, 则 $a\le b$.

(1) 若 $c\le a$, 则 $|a\vee c-b\vee c|\le|a-b|$.

(2) 若 $a<c\le b$, 则 $|a\vee c-b\vee c|=|c-b|<|a-b|$.

(3) 若 $b\le c$, 则 $|a\vee c-b\vee c|=|c-c|=0\le|a-b|$.

定理 5.12 设 $A,B,C,D\in F(S)$, 且 $\rho_i(A,B)<\varepsilon,\rho_i(C,D)<\varepsilon$, $i=1,2$, 则

$$\rho_i(A\vee C,B\vee D)<2\varepsilon,\quad i=1,2.$$

证 (1) 由定理 5.7 及引理 5.11 知

$$\begin{aligned}\rho_1(A\vee C,B\vee D)&=\int_\triangle|\overline{A}\vee\overline{C}-\overline{B}\vee\overline{D}|\cdot f\mathrm{d}\omega\\&\le\int_\triangle|\overline{A}\vee\overline{C}-\overline{B}\vee\overline{C}|\cdot f\mathrm{d}\omega+\int_\triangle|\overline{B}\vee\overline{C}-\overline{B}\vee\overline{D}|\cdot f\mathrm{d}\omega\\&=\int_\triangle|\overline{A}-\overline{B}|\cdot f\mathrm{d}\omega+\int_\triangle|\overline{C}-\overline{D}|\cdot f\mathrm{d}\omega<2\varepsilon.\end{aligned}$$

(2) 由引理 1.4, 定理 3.2 及命题 5.6 可得.

推论 5.13 设 $A,A_n,B,B_n\in F(S)(n=1,2,\cdots)$, f 为赋值密度函数，则

(1) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_i(A_n,A)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_i(B_n,B)=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_i(A_n\vee B_n,A\vee B)=0,i=1,2$;

(2) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_i(A_n,A)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_i(B_n,B)=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_i(A_n\wedge B_n,A\wedge B)=0,\ i=1,2$.

引理 5.14 设 $\forall a,b,c,d\in[0,1]$, 则

$$|(a\to b)-(c\to d)|\leq|a-c|+|b-d|.$$

定理 5.15 设 $A,B,C,D\in F(S)$, 则 $\rho_i(A\to B,C\to D)\leq\rho_i(A,C)+\rho_i(B,D),i=1,2$.

证 (1) 由引理 5.14 知

$$\begin{aligned}&\rho_1(A\to B,C\to D)\\=&\int_{\triangle}|(\overline{A}\to\overline{B})\to(\overline{C}-\overline{D})|\cdot f\mathrm{d}\omega\\\leq&\int_{\triangle}|(\overline{A}-\overline{C})|\cdot f\mathrm{d}\omega+\int_{\triangle}|\overline{B}-\overline{D}|\cdot f\mathrm{d}\omega=\rho_1(A,C)+\rho_1(B,D).\end{aligned}$$

(2) 由文献 [5] 的命题 5.4.8, 命题 5.4.12 及本文命题 5.7 可得.

推论 5.16 设 $A,A_n,B,B_n\in F(S)\ (n=1,2,\cdots)$, 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(A_n,A)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(B_n,B)=0$ 时, 则

$$\lim_{n\to\infty}\rho(A_n\to B_n,\ A\to B)=0.$$

定理 5.17 在伪距离概率空间 $(F(S),\rho_i)$, $i=1,2$ 中, 一元运算 "$\neg$" 与二元运算 "$\vee$", "$\wedge$" 与 "$\to$" 都是连续的.

定理 5.18 设 $A,B\in F(S)$, f 为赋值密度函数, 则在伪距离概率空间 $(F(S),\rho_1)$ 中有

(1) 有公式 B 满足 $0<\rho_1(A,B)<\varepsilon$;

(2) 当 $\tau(A)=\alpha,\tau(B)=\beta$ 时, 则 $\rho_1(A,B)\leq 2-\alpha-\beta$.

证 (1) 显然成立.

(2)

$$\begin{aligned}\rho_1(A,B)&=\int_{\triangle}|\overline{A}-\overline{B}|\cdot f\mathrm{d}\omega\leq\int_{\triangle}|1-\overline{A}|\cdot f\mathrm{d}\omega+\int_{\triangle}|1-\overline{B}|\cdot f\mathrm{d}\omega\\&=\int_{\triangle}(1-\overline{A})\cdot f\mathrm{d}\omega+\int_{\triangle}(1-\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega\\&=1-\tau(A)+1-\tau(B)=2-\alpha-\beta.\end{aligned}$$

定理 5.19 在伪距离概率空间 $(F(S),\rho_3)$ 中, $\wedge,\vee,\to$ 是不连续的. 验证一下便知, 设 $A=p,B=p,C=q,R=s,f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$, 知 $\rho_3(A,C)=0,\rho_3(B,D)=0$, 但 $\rho_3(A\to B,C\to D)\neq0,\rho_i(A\vee B,C\vee D)\neq0$, 即 $\wedge,\vee,\to$ 是不连续的. 虽然 $\wedge,\vee,\to$ 在 $(F(S),\rho_1),(F(S),\rho_2)$ 中连续, 在 $(F(S),\rho_3)$ 不连续, 但我们可以得出如下关系.

定理 5.20 设 $A,B\in F(S)$, f 为赋值密度函数, 则

$$\rho_2(A,B)=\frac{1}{2}(\rho_1(A,B)+\rho_3(A,B)).$$

证

$$\begin{aligned}\rho_2(A,B)&=1-\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)\\&=(1-\tau(A\to B))\vee(1-\tau(B\to A))\\&=\Big(1-\int_{\triangle}(1-\overline{A}+\overline{A}\wedge\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega\Big)\vee\Big(1-\int_{\triangle}(1-\overline{B}+\overline{A}\wedge\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\triangle}(\overline{A}-\overline{A}\wedge\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega \vee \int_{\triangle}(\overline{B}-\overline{A}\wedge\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_{\triangle}(\overline{A}-\overline{A}\wedge\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega + \int_{\triangle}(\overline{B}-\overline{A}\wedge\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega\Big) \\
&\quad +\frac{1}{2}\Big|\int_{\triangle}(\overline{A}-\overline{A}\wedge\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega + \int_{\triangle}(\overline{B}-\overline{A}\wedge\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega\Big| \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_{\triangle}(\overline{A}+\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega + \int_{\triangle}(\overline{A}+\overline{B}-|\overline{A}-\overline{B}|)\cdot f\mathrm{d}\omega + \Big|\int_{\triangle}(\overline{A}-\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega\Big|\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_{\triangle}|\overline{A}-\overline{B}|\cdot f\mathrm{d}\omega + \Big|\int_{\triangle}(\overline{A}-\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega\Big|\Big) = \frac{1}{2}(\rho_1(A,B)+\rho_3(A,B)).
\end{aligned}
$$

定理 5.21 ρ_i 在伪距离概率空间 $(F(S),\rho_i)$, $i=1,2$ 中是稠密的.

证 (1) 要证 ρ_1 在 $(F(S),\rho)$ 中是否稠密，只须证 ξ 在空间中是否稠密即可. 由定义 5.1 知 $\xi(A,B)=\int_{\triangle}[(\overline{A}\to\overline{B})\wedge(\overline{B}\to\overline{A}))]\cdot f\mathrm{d}\omega$. 不失一般性，不妨设 $0\le\overline{A}\to\overline{B}\le\overline{B}\to\overline{A}$, 则 $\rho_1=\xi(A,B)=\int_{\triangle}(\overline{A}\to\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega=1-\int_{\triangle}\overline{A}\cdot f\mathrm{d}\omega+\int_{\triangle}(\overline{A}\wedge\overline{B})\cdot f\mathrm{d}\omega=1-\tau(A)+\tau(A\wedge B)$, 由定理 4.5 知 $\tau(A)=\int_{\triangle}\overline{A}\cdot f\mathrm{d}\omega$ 在 $[0,1]$ 中稠密，故 ρ_1 在 $(F(S),\rho)$ 中稠密.

(2) 证明方法同 (1).

定理 5.22 ρ_3 在伪距离概率空间 $(F(S),\rho_3)$ 中是不稠密的.

证 由定理 5.19 知，$\wedge,\vee,\to$ 在伪距离概率空间 $(F(S),\rho_3)$ 中是不连续的，故不稠密的.

6 结束语

本文基于连续值 Lukasiewicz 命题逻辑系统提出一般性的赋值密度函数、边缘密度函数，通过公式概率真度的定义，得到了一些概率真度的推理规则；给出了 3 种相似度的定义并讨论了其性质及关系；定义了 3 种伪距离的，确定了三者之间的比例关系，为推理程度的数值化提供了依据. 另外，我们知道在给定的逻辑系统下公式或命题的真度是由公式或命题自身的结构所完全确定的，也是内蕴的，但附加了一个有条件的函数后，概率真度的情况就不同了，它表现出一种“内蕴型”随机性，为计量逻辑学、概率逻辑学的研究提供了一种可供借鉴的方法，同时也为数值计算与形式化逻辑推理之间搭起了一个桥梁. 为深入探讨概率真度的意义及作用，我们将进行理论相容度的研究，另文讨论.

参 考 文 献

[1] Rosser J B, Turquette A R. Many-Valued Logics. Amsterdam: North-Holland, 1952.

[2] Pavelka J. On fuzzy logic I. *Z. Math Logik Grundlagen Math.*, 1979, **25**: 45–52.

[3] Pavelka J. On fuzzy logic II. *Z. Math Logik Grundlagen Math.*, 1979, **25**: 119–134.

[4] Pavelka J. On fuzzy logic III. *Z. Math Logik Grundlagen Math.*, 1979, **25**: 447–464.

[5] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京：科学出版社， 2000.

[6] 王国俊等. 二值命题逻辑中命题的真度理论. 中国科学， A 辑， 2001, **31**(11): 998–1007.

[7] 王国俊等．Lukasiewicz 值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理．中国科学，E 辑，2005, **35**(6): 561–569.
[8] 于鹏，王国俊．根与 F(S) 中的近似推理．自然科学进展， 2006, **16**(8): 1028–1032.
[9] 左卫兵，毋红军．连续值命题逻辑系统中公式的概率真度．河南教育学院学报， 2007, **16**(1): 23–25.
[10] 王国俊，王伟．逻辑度量空间．数学学报， 2001, **44**(1): 159–168.
[11] 王国俊，刘保翠．四种命题逻辑公式的相对重言度理论．工程数学学报， 2007, **24**(4): 598–610.
[12] Di Nala, Lettieri A. On normal forms in Lukasiewicz logic. *Archive for Mathematical*, 2004, **43**: 795–823.
[13] 李立锋，王国俊，刘保翠． Lukasiewicz 命题集的积分真度、发散度与相容度的分布．陕西师范大学学报，2006, **34**(2): 5–8.

SIMILARITY DEGREE AND PSEUDO-DISTANCE OF THE PROBABILITY TRUTH DEGREE FOR FORMULAE IN THE PROPOSITIONAL LOGIC SYSTEM

YU Xichang

(*Liao Cheng Vocational and Technical College, Shandong* 252000)

HU Kai

(*School of Mathematics Science, Beijing Normal University, Beijing* 100875;
School of Mathematics Science, Liao Cheng University, Shandong 252059)

ZHANG Xingfang

(*School of Mathematics Science, Liao Cheng University, Shandong* 252059)

Abstract By introducing the concepts of valuation density function and edge density function, a definition of probability truth degree for formula in the continuous value propositional logic is proposed,studies some inference rules of probability truth degree and proves the density of probability truth degree in. On this groundwork, three similarities are given which discusses the properties of the relationship. By introducing similarity degree, the definition of pseudo-distance is proposed， and determines the relationship between them. Thus the basis for the inference degree's numerical is proved.

Key words Valuation density, probability truth degree, inference rule, similarity degree, pseudo-distance.