系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(8) (2009, 8), 1034–1043

三维系统中一族闭轨在周期扰动下的分支*

刘宣亮 孟笑莹
(华南理工大学数学系，广州 510640)

摘要 讨论一类三维系统在周期扰动下的分支问题. 假设此三维系统有一族闭轨，利用 Poincaré 映射及积分流形定理，得到了在周期扰动下由这族闭轨产生次调和解和不变环面的条件，并讨论了次调和解的鞍结点分支.

关键词 分支，次调和解，不变环面.

MR(2000) 主题分类号 34C23, 34C45

1 引 言

关于自治系统的闭轨在自治或周期扰动下的分支问题，已有大量文献进行研究，如参考文献 [1–9] 等. 当未扰系统有一族闭轨时，文 [4–6] 讨论了这族闭轨在自治或周期扰动下产生的周期轨道，次调和解或不变环面的情况. 文 [7] 讨论了三维系统中的一族闭轨在自治扰动下的周期轨道的分支问题，本文继续讨论三维系统中的一族闭轨在周期扰动下的次调和解和不变环面的分支，我们考虑如下三维 $C^r(r\geq 3)$ 扰动系统

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x}&=f(x)+\varepsilon P(t,x,y,\varepsilon,\delta),\\ \dot{y}&=g(y)+\varepsilon Q(t,x,y,\varepsilon,\delta),\end{aligned}\right. \tag{1}$$

其中 $x=(x_1,x_2)\in R^2, y\in R$, P,Q 是关于 t 为 T 周期的函数， $\delta\in R,\varepsilon$ 为小参数.

我们作如下假设

(H1) 二维系统

$$\dot{x}=f(x) \tag{2}$$

为 Hamilton 系统且有一个 $C^{r+1}(r\geq 3)$ 的 Hamilton 函数 $H(x)$, 即 $f(x)=(-\frac{\partial H(x)}{\partial x_2},\frac{\partial H(x)}{\partial x_1})^{\mathrm{T}}$, 并且存在 R 上的开区间 J, 使 $L_h=\{x:H(x)=h\},h\in J$ 是 (2) 的周期轨道；

(H2) $g(0)=g'(0)=0$.

* 国家自然科学基金 (10871074) 资助项目.
收稿日期：2008-05-19, 收到修改稿日期：2008-11-13.

由 (H1), (H2) 知，系统 (1) 当 $\varepsilon=0$ 时有法向非双曲的不变平面 $y=0$, 其上有一族周期轨道 $\{\overline{L}_h: h\in J\}$, 其中 $\overline{L}_h=\{(x,y): H(x)=h, y=0\}, h\in J$. 我们讨论由这族周期轨道在小扰动下产生的系统 (1) 的次调和解与不变环面的分支问题.

2 坐标变换与分支方程

设 L_h 有参数表示： $x=q(t,h), 0\le t\le T(h)$, 其中 $T(h)$ 为 L_h 的周期. 令 $G(\theta,h)=q(\frac{\theta}{\Omega(h)},h), 0\le\theta\le 2\pi$, 其中 $\Omega(h)=\frac{2\pi}{T(h)}$. 显然 G 关于 θ 是 2π 周期的，且

$$\begin{aligned} &H(G(\theta,h))=h, \quad G_\theta(\theta,h)=\frac{f(G)}{\Omega(h)}, \\ &DH(x)=-f(x)^{\perp}, \quad G_h\wedge f(G)=1, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\end{pmatrix}^{\perp}=(-a_2,a_1), \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\end{pmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$.

令 $G(\theta,h)=(G_1(\theta,h),G_2(\theta,h))^{\mathrm{T}}$, 则

$$G_h^{\perp}(\theta,h)=\Big(-\frac{\partial G_2(\theta,h)}{\partial h},\frac{\partial G_1(\theta,h)}{\partial h}\Big).$$

利用 (3) 式，与文 [7] 中引理 1 的证明类似，可以得到

引理 1 周期变换 $x=G(\theta,h), y=y, 0\le\theta\le 2\pi, h\in J$, 将系统 (1) 变为

$$\left\{\begin{aligned} &\dot\theta=\Omega(h)[1+\varepsilon G_h(\theta,h)\wedge P(t,G(\theta,h),y,\varepsilon,\delta)], \\ &\dot h=-\varepsilon f(G(\theta,h))\wedge P(t,G(\theta,h),y,\varepsilon,\delta), \\ &\dot y=g(y)+\varepsilon Q(t,G(\theta,h),y,\varepsilon,\delta). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

为利用系统 (4) 讨论系统 (1) 的次调和解，设存在 $h_0\in J$ 及互素自然数 m,k, 使

$$\frac{2\pi}{\Omega(h_0)T}=\frac{T(h_0)}{T}=\frac{m}{k}. \tag{5}$$

我们讨论在 $\overline{L}_{h_0}$ 附近的次调和解分支的情况.

设 $h(t,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta), y(t,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta), \theta(t,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta)$ 是系统 (4) 当 $t=0$ 时以 (θ_0,r,y_0) 为初值的解，由系统 (4) 在 $\varepsilon=0$ 时的特殊形式，可设

$$h(t,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta),\ y(t,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta),\ \theta(t,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta)$$

有如下展开式

$$\left\{\begin{aligned} &h(t,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta)=r+\varepsilon[a_1(t,\theta_0,r,\delta)+O(|y_0,\varepsilon|)], \\ &y(t,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta)=y_1(t)y_0+y_2(t,\theta_0,r,\delta)\varepsilon+y_3(t)y_0^2+O(|y_0|^3+|y_0\varepsilon|+\varepsilon^2), \\ &\theta(t,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta)=\theta_0+\Omega(r)t+\varepsilon[\theta_1(t,\theta_0,r,\delta)+O(|y_0,\varepsilon|)], \end{aligned}\right. \tag{6}$$

其中

$$a_1(0,\theta_0,r,\delta)=0, \quad y_1(0)=1, \quad y_2(0,\theta_0,r,\delta)=0, \quad y_3(0)=0, \quad \theta_1(0,\theta_0,r,\delta)=0. \tag{7}$$

将 (6) 代人系统 (4), 注意到条件 (H2), 比较方程两边系数可得

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1(t)=0,\\
&\dot{y}_2(t,\theta_0,r,\delta)=Q(t,G(\theta_0+\Omega(r)t,r),0,0,\delta),\\
&\dot{y}_3(t)=\frac{1}{2}g''(0)y_1^2,\\
&\dot{a}_1(t,\theta_0,r,\delta)=-f(G(\theta_0+\Omega(r)t,r))\wedge P(t,G(\theta_0+\Omega(r)t,r),0,0,\delta),\\
&\dot{\theta}_1(t,\theta_0,r,\delta)=\Omega'(r)a_1(t,\theta_0,r,\delta)+\Omega(r)G_h(\theta_0+\Omega(r)t,r)\wedge P(t,G(\theta_0+\Omega(r)t,r),0,0,\delta).
\end{aligned}$$

由上述微分方程组以及它们所满足的初始条件 (7), 容易解出

$$\begin{aligned}
&y_1(t)=1,\\
&y_2(t,\theta_0,r,\delta)=\int_0^t Q(s,G(\theta_0+\Omega(r)s,r),0,0,\delta)\mathrm{d}s,\\
&y_3(t)=\frac{1}{2}g''(0)t,\\
&a_1(t,\theta_0,r,\delta)=-\int_0^t f(G(\theta_0+\Omega(r)s,r))\wedge P(s,G(\theta_0+\Omega(r)s,r),0,0,\delta)\mathrm{d}s,\\
&\theta_1(t,\theta_0,r,\delta)=\int_0^t\Big[-\Omega'(r)\int_0^s f(G(\theta_0+\Omega(r)\tau,r))\wedge P(\tau,G(\theta_0+\Omega(r)\tau,r),0,0,\delta)\mathrm{d}\tau\\
&\qquad\qquad+\Omega(r)G_h(\theta_0+\Omega(r)s,r)\wedge P(s,G(\theta_0+\Omega(r)s,r),0,0,\delta)\Big]\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

设系统 (4) 的 Poincaré 映射为 $P(\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta)$, 则其 m 次复合为

$$P^m(\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta)=(\theta(mT,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta),h(mT,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta),y(mT,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta)).$$

在条件 (5) 下，对充分小的 $|\varepsilon|>0$, 系统 (4) 在 $\overline{L}_{h_0}$ 附近存在 m 阶次调和解当且仅当下述分支方程关于 (θ_0,r,y_0) 在 $\theta_0\in[0,2\pi),|r-h_0|\ll 1,|y_0|\ll 1$ 上有解

$$\begin{aligned}
h(mT,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta)-r&=\varepsilon[a_1(mT,\theta_0,r,\delta)+O(|y_0,\varepsilon|)]\\
&=\varepsilon[-M(\theta_0,r,\delta)+O(|y_0,\varepsilon|)]\\
&=-\varepsilon[M(\theta_0,h_0,\delta)+O(|r-h_0|+|y_0|+|\varepsilon|)]\\
&=0,
\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}
y(mT,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta)-y_0&=y_2(mT,\theta_0,r,\delta)\varepsilon+y_3(mT)y_0^2+O(|y_0|^3+|y_0\varepsilon|+\varepsilon^2)\\
&=\frac{1}{2}g''(0)mTy_0^2+\int_0^{mT}Q(s,G(\theta_0+\Omega(r)s,r),0,0,\delta)\mathrm{d}s\ \varepsilon\\
&\quad+O(|y_0|^3+|y_0\varepsilon|+|\varepsilon|^2)\\
&=\frac{1}{2}g''(0)mTy_0^2+\int_0^{mT}Q(s,G(\theta_0+\Omega(h_0)s,h_0),0,0,\delta)\mathrm{d}s\ \varepsilon\\
&\quad+O(|y_0|^3+|r-h_0||\varepsilon|+|y_0\varepsilon|+|\varepsilon|^2)\\
&=0,
\end{aligned}\tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
&\theta(mT,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta)-(\theta_0+\Omega(h_0)mT)\\
=&\,\theta(mT,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta)-(\theta_0+2k\pi)\\
=&\,mT(\Omega(r)-\Omega(h_0))+\varepsilon(\theta_1(mT,\theta_0,r,\delta)+O(|y_0,\varepsilon|))\\
=&\,mT\Omega'(h_0)(r-h_0)+\varepsilon\theta_1(mT,\theta_0,h_0,\delta)\\
&+O(|r-h_0|^2+|r-h_0||\varepsilon|+|y_0\varepsilon|+\varepsilon^2)\\
=&\,0.
\end{aligned}\tag{10}
$$

其中

$$
M(\theta_0,r,\delta)=\int_0^{mT}f(G(\theta_0+\Omega(r)t,r)\wedge P(s,G(\theta_0+\Omega(r)t,r),0,0,\delta)\mathrm{d}t.
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_1(mT,\theta_0,r,\delta)=\int_0^{mT}\Big[&-\Omega'(r)\int_0^s f(G(\theta_0+\Omega(r)\tau,r))\wedge P(\tau,G(\theta_0+\Omega(r)\tau,r),0,0,\delta)\mathrm{d}\tau\\
&+\Omega(r)G_h(\theta_0+\Omega(r)s,r)\wedge P(s,G(\theta_0+\Omega(r)s,r),0,0,\delta)\Big]\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

3　次调和解分支

通过分析分支方程 (8)–(10) 的解，可得如下结论

定理 1　在条件 (H1), (H2) 下，假设 (5) 式成立，则对充分小的 $|\varepsilon|>0$, 有

i)　若对 $\theta_0\in[0,2\pi),\delta\in R$ 有

$M(\theta_0,h_0,\delta)\neq 0$ 或者 $g''(0)\int_0^{mT}Q(s,G(\theta_0+\Omega(h_0)s,h_0),0,0,\delta)\mathrm{d}s\varepsilon>0$, 则系统 (1) 在 $\overline{L}_{h_0}$ 的邻域内没有 m 阶次调和解.

ii)　若存在 $\theta_0^*\in[0,2\pi),\delta\in R$ 使 $g''(0)\int_0^{mT}Q(s,G(\theta_0^*+\Omega(h_0)s,h_0),0,0,\delta)\mathrm{d}s\varepsilon<0$, $\Omega'(h_0)\neq 0$, 且

$$
M(\theta_0^*,h_0,\delta)=0,\quad \frac{\partial M(\theta_0^*,h_0,\delta)}{\partial\theta_0}\neq 0 \tag{11}
$$

成立，则系统 (1) 在 $\overline{L}_{h_0}$ 附近有两个 m 阶次调和解.

iii)　若存在 $\overline{\theta}_0\in[0,2\pi),\delta_0\in R$, 使 $g''(0)\int_0^{mT}Q(s,G(\overline{\theta}_0+\Omega(h_0)s,h_0),0,0,\delta_0)\mathrm{d}s\varepsilon<0$, $\Omega'(h_0)\neq 0$, 且

$$
M(\overline{\theta}_0,h_0,\delta_0)=M_{\theta_0}(\overline{\theta}_0,h_0,\delta_0)=0,\quad M_{\theta_0\theta_0}(\overline{\theta}_0,h_0,\delta_0)\neq 0,\quad M_\delta(\overline{\theta}_0,h_0,\delta_0)\neq 0 \tag{12}
$$

成立，则系统 (1) 在 $\overline{L}_{h_0}$ 附近的 m 阶次调和解存在两条鞍结点分支曲线.

证　i)　对 $\theta_0\in[0,2\pi),\delta\in R$ 有 $M(\theta_0,h_0,\delta)\neq 0$ 或者 $g''(0)\int_0^{mT}Q(s,G(\theta_0+\Omega(h_0)s,h_0),0,0,\delta)\mathrm{d}s\varepsilon>0$ 时, 由方程 (8) 与 (9) 易知, 它们关于 (θ_0,r,y_0) 在 $\theta_0\in[0,2\pi),|r-h_0|\ll 1,|y_0|\ll 1$ 上无解，从而系统 (1) 在 $\overline{L}_{h_0}$ 的邻域内没有 m 阶次调和解.

ii)　当 $\Omega'(h_0)\neq 0$ 时，由 (10) 可得 $r=h_0+O(\varepsilon)\equiv r(y_0,\varepsilon)$, 代入 (9), 得到

$$
\begin{aligned}
&y(mT,\theta_0,r(y_0,\varepsilon),y_0,\varepsilon,\delta)-y_0\\
=&\,\frac{1}{2}g''(0)mTy_0^2+\int_0^{mT}Q(s,G(\theta_0+\Omega(h_0)s,h_0),0,0,\delta)\mathrm{d}s\,\varepsilon+O(|y_0|^3+|y_0\varepsilon|+|\varepsilon|^2)\\
=&\,0.
\end{aligned}\tag{13}
$$

当 $g''(0)\int_0^{mT}Q(s,G(\theta_0+\Omega(h_0)s,h_0),0,0,\delta)\mathrm{d}s\varepsilon<0$ 时, (13) 关于 y_0 有两解

$$\begin{aligned}y_0&=(-1)^j\Big(-\frac{2}{g''(0)mT}\int_0^{mT}Q(s,G(\theta_0+\Omega(h_0)s,h_0),0,0,\delta)\mathrm{d}s\varepsilon\Big)^{\frac{1}{2}}+O(\varepsilon)\\&\equiv y_{0j}(\theta_0,\varepsilon,\delta),\quad j=1,2.\end{aligned}\tag{14}$$

记 $r_j=r(y_0,\varepsilon)|_{y_0=y_{0j}(\theta_0,\varepsilon,\delta)}$ $(j=1,2)$. 将 $r=r_j,y_0=y_{0j}$ 代入 (8), 可得

$$h(mT,\theta_0,r_j,y_{0j},\varepsilon,\delta)-r_j=-\varepsilon[M(\theta_0,h_0,\delta)+O(|\varepsilon|^{\frac{1}{2}})]=0,\quad j=1,2.\tag{15}$$

若存在 $\theta_0^*\in[0,2\pi)$ 使

$$M(\theta_0^*,h_0,\delta)=0,\quad \frac{\partial M(\theta_0^*,h_0,\delta)}{\partial\theta_0}\neq0,$$

则由隐函数定理,对充分小的 $|\varepsilon|>0$, 方程 (15) 分别对 $j=1,2$ 关于 θ_0 有解 $\theta_{0j}=\theta_0^*+O(|\varepsilon|^{\frac{1}{2}})$, 从而 (8)–(10) 关于 (θ_0,r,y_0) 有两解 (θ_{0j},r_j,y_{0j}), $j=1,2$. 故对充分小的参数 $|\varepsilon|>0$, 系统 (1) 在 $\overline{L}_{h_0}$ 附近有两个 m 阶次调和解.

iii) 与 ii) 的推导类似, 可得 (15) 式成立. 将 (15) 式记为

$$h(mT,\theta_0,r_j,y_{0j},\varepsilon,\delta)-r_j=-\varepsilon F_j(\theta_0,h_0,\varepsilon,\delta)=0,\quad j=1,2,\tag{16}$$

其中 $F_j(\theta_0,h_0,\varepsilon,\delta)=M(\theta_0,h_0,\delta)+O(|\varepsilon|^{\frac{1}{2}})$, $j=1,2$.

先取 $j=1$, 由 (12) 式, 则

$$\begin{aligned}&F_1(\overline{\theta}_0,h_0,0,\delta_0)=(F_1)_{\theta_0}(\overline{\theta}_0,h_0,0,\delta_0)=0,\\&(F_1)_{\theta_0\theta_0}(\overline{\theta}_0,h_0,0,\delta_0)\neq0,\quad (F_1)_{\delta_0}(\overline{\theta}_0,h_0,0,\delta_0)\neq0.\end{aligned}$$

由隐函数定理知存在唯一的 $\theta_0=\overline{\theta}_0+O(|\delta-\delta_0|+|\varepsilon|^{\frac{1}{2}})\equiv\widetilde{\theta}_0(\varepsilon,\delta)$ 使 $(F_1)_{\theta_0}(\widetilde{\theta}_0(\varepsilon,\delta),h_0,\varepsilon,\delta)=0$. 将 $F_1(\theta_0,h_0,\varepsilon,\delta)$ 在 $\theta_0=\widetilde{\theta}_0(\varepsilon,\delta)$ 处泰勒展开

$$\begin{aligned}&F_1(\theta_0,h_0,\varepsilon,\delta)\\&=F_1(\widetilde{\theta}_0(\varepsilon,\delta),h_0,\varepsilon,\delta)+\frac{1}{2}(F_1)_{\theta_0\theta_0}(\widetilde{\theta}_0(\varepsilon,\delta),h_0,\varepsilon,\delta)(\theta_0-\widetilde{\theta}_0(\varepsilon,\delta))^2(1+o(1))\\&=\frac{1}{2}(F_1)_{\theta_0\theta_0}(\widetilde{\theta}_0(\varepsilon,\delta),h_0,\varepsilon,\delta)(1+o(1))\Big[(\theta_0-\widetilde{\theta}_0(\varepsilon,\delta))^2-\frac{\triangle}{1+o(1)}\Big],\end{aligned}$$

其中 $\triangle=-\frac{2(F_1)(\widetilde{\theta}_0(\varepsilon,\delta),h_0,\varepsilon,\delta)}{(F_1)_{\theta_0\theta_0}(\widetilde{\theta}_0(\varepsilon,\delta),h_0,\varepsilon,\delta)}=-\frac{2M_\delta(\overline{\theta}_0,h_0,\delta_0)}{M_{\theta_0\theta_0}(\overline{\theta}_0,h_0,\delta_0)}(\delta-\delta_0)+O(|\varepsilon|^{\frac{1}{2}}+|\delta-\delta_0|^2)$.

若 $\triangle>0(=0,<0)$, 则 $F_1(\theta_0,h_0,\varepsilon,\delta)=0$ 关于 θ_0 有两解 (一个解, 无解), 于是当 $0<|\varepsilon|\ll1$ 时, (16) 在 $j=1$ 时关于 θ_0 有两解 (一解, 无解), 从而系统 (1) 的 m 阶次调和解存在一条鞍结点分支曲线 $\delta=\delta_1(\varepsilon)=\delta_0+O(|\varepsilon|^{\frac{1}{2}})$.

再取 $j=2$, 与上述类似分析, 可知系统 (1) 的 m 阶次调和解还存在另一条鞍结点分支曲线, 也有形如 $\delta=\delta_2(\varepsilon)=\delta_0+O(|\varepsilon|^{\frac{1}{2}})$.

证毕.

注 1 若在区间 $[0,2\pi)$ 上有 n 个不同的 θ_0^* 使定理 1 ii) 中条件成立, 则系统 (1) 在 $\overline{L}_{h_0}$ 邻域内有 $2n$ 个不同的 m 阶次调和解. 同理, 若对同一个 $\delta_0,M(\overline{\theta}_0,h_0,\delta_0)$ 在 $[0,2\pi)$ 中恰有 l 个 $\overline{\theta}_0$ 使定理 1 iii) 中条件成立, 则系统 (1) 也恰有 $2l$ 个鞍结点分支均在 δ_0 附近.

若 $\dot{x}=f(x)$ 的闭轨族 $\{L_h: h\in J\}$ 的周期为常数，设 $T(h)=T_0, h\in J$, 则 $\Omega(h)=\frac{2\pi}{T_0}, \Omega'(h)=0, h\in J$, 从而定理 1 ii), iii) 不适用于这种情形．此时方程 (10) 为

$$\theta(mT,\theta_0,r,y_0,\varepsilon,\delta)-\Big(\theta_0+\frac{2\pi mT}{T_0}\Big)=\frac{2\pi}{T_0}\varepsilon[M_1(\theta_0,r,\delta)+O(|y_0,\varepsilon|)]=0, \tag{17}$$

其中

$$M_1(\theta_0,r,\delta)=\int_0^{mT}G_h\Big(\theta_0+\frac{2\pi}{T_0}s,r\Big)\wedge P\Big(s,G\Big(\theta_0+\frac{2\pi}{T_0}s,r\Big),0,0,\delta\Big)\mathrm{d}s.$$

定理 2　设对一切 $h\in J$, 有 $T(h)=T_0$, 且 $\frac{T_0}{T}=\frac{m}{k}$, m,k 为互素自然数．对充分小的 $|\varepsilon|>0$, 有

i)　若存在 $h_0\in J$, 使 $g''(0)\int_0^{mT}Q(s,G(\theta_0+\Omega(h_0)s,h_0),0,0,\delta)\mathrm{d}s\varepsilon>0$ 或 $g''(0)\int_0^{mT}Q(s,G(\theta_0+\Omega(h_0)s,h_0),0,0,\delta)\mathrm{d}s\varepsilon<0$ 且 $(M(\theta_0,h_0,\delta),M_1(\theta_0,h_0,\delta))\neq(0,0)$. 对一切 $\theta_0\in[0,2\pi),\delta\in R$ 成立，则系统 (1) 在 $\overline{L}_{h_0}$ 的邻域内没有 m 阶次调和解；

ii)　若存在 $h_0\in J,\theta_0^*\in[0,2\pi)$, 使 $g''(0)\int_0^{mT}Q(s,G(\theta_0^*+\Omega(h_0)s,h_0),0,0,\delta)\mathrm{d}s\varepsilon<0$, 且 $M(\theta_0^*,h_0,\delta)=0, M_1(\theta_0^*,h_0,\delta)=0$, $\det\frac{\partial(M,M_1)}{\partial(\theta_0,r)}|_{(\theta_0^*,h_0)}\neq 0$, 则系统 (1) 在 $\overline{L}_{h_0}$ 的邻域内有两个 m 阶次调和解．

证　利用 (8), (9), (17) 易知结论 i) 成立．下证结论 ii) 成立．

由 $g''(0)\int_0^{mT}Q(s,G(\theta_0^*+\Omega(h_0)s,h_0),0,0,\delta)\mathrm{d}s\varepsilon<0$ 知当 $|r-h_0|\ll 1, |\theta_0-\theta_0^*|\ll 1$ 时，方程 (9) 关于 y_0 有两解

$$\begin{aligned} y_0&=y_{0j}(\theta_0,r,\varepsilon,\delta)\\ &=(-1)^j\Big(-\frac{2}{g''(0)mT}\int_0^{mT}Q(s,G(\theta_0+\Omega(r)s,r),0,0,\delta)\mathrm{d}s\varepsilon\Big)^{\frac12}+O(\varepsilon),\quad j=1,2. \end{aligned}\tag{18}$$

先取 $j=1$, 将 (18) 代入 (8), (17), 可得

$$\left\{\begin{aligned} &h(mT,\theta_0,r,y_{01},\varepsilon,\delta)-r=\varepsilon[-M(\theta_0,r,\delta)+O(|\varepsilon|^{\frac12})]=0,\\ &\theta(mT,\theta_0,r,y_{01},\varepsilon,\delta)-(\theta_0+2k\pi)=\frac{2\pi}{T_0}\varepsilon[M_1(\theta_0,r,\delta)+O(|\varepsilon|^{\frac12})]=0, \end{aligned}\right.\tag{19}$$

当 $0<|\varepsilon|\ll 1$ 时，由条件 $M(\theta_0^*,h_0,\delta)=0, M_1(\theta_0^*,h_0,\delta)=0$, $\det\frac{\partial(M,M_1)}{\partial(\theta_0,r)}|_{(\theta_0^*,h_0)}\neq 0$, 根据隐函数定理可知，方程组 (19) 关于 (θ_0,r) 有解 $(\theta_0,r)=(\theta_0^*,h_0)+O(|\varepsilon|^{\frac12})$, 故系统 (1) 在 $\overline{L}_{h_0}$ 的邻域内有一个 m 阶次调和解．对 j 取 2 时与上类似讨论，可得系统 (1) 在 $\overline{L}_{h_0}$ 的邻域内有另一个 m 阶次调和解．从而结论 ii) 成立．

注 2　与定理 1 iii) 类似，若向量函数 $(M(\theta_0,h,\delta),M_1(\theta_0,h,\delta))$ 在某点 $(\theta_0^*,h_0,\delta_0)$ 关于 $(\theta_0,h)\in[0,2\pi)\times J$ 有 2 重零点分支，则系统 (1) 在 $\overline{L}_{h_0}$ 的邻域内有两条 m 阶次调和解的鞍结点分支曲线．

4　不变环面的分支

在本节，我们考虑系统 (1) 在闭轨族 $\{\overline{L}_h: h\in J\}$ 附近的不变环面的分支问题．为使问题简化，除条件 (H1), (H2) 成立外，我们还作如下假设

(H3) 在系统 (1) 中 P,Q 不含有参数 δ, 即考虑如下三维 $C^r(r\geq 3)$ 系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x)+\varepsilon P(t,x,y,\varepsilon),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(y)+\varepsilon Q(t,x,y,\varepsilon),\end{cases}\tag{20}$$

并且以下仅讨论 $0<\varepsilon\ll 1$ 的情形. 对 $0<-\varepsilon\ll 1$ 时可类似讨论.

(H4) 闭轨族 $\{\overline{L}_h:h\in J\}$ 的周期是常数 T_0, 即 $T(h)=T_0,h\in J$, 且 $\frac{T_0}{T}$ 为无理数.

首先，与引理 1 类似，在周期变换 $x=G(\theta,h),y=y,0\leq\theta\leq 2\pi,h\in J$ 下，系统 (20) 变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2\pi}{T_0}[1+\varepsilon G_h(\theta,h)\wedge P(t,G(\theta,h),y,\varepsilon)],\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\varepsilon f(G(\theta,h))\wedge P(t,G(\theta,h),y,\varepsilon),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(y)+\varepsilon Q(t,G(\theta,h),y,\varepsilon).\end{cases}\tag{21}$$

取 $h_0\in J$, 令 $h=h_0+u,\ 0<|u|\ll 1$, 则 (21) 可化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2\pi}{T_0}+\varepsilon\dfrac{2\pi}{T_0}G_h(\theta,h_0)\wedge P(t,G(\theta,h_0),0,0)+O(|u\varepsilon|+|y\varepsilon|+\varepsilon^2),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\varepsilon[b_1(t,\theta,h_0)+b_2(t,\theta,h_0)u+b_3(t,\theta,h_0)y+O(|u,y|^2+|\varepsilon|)],\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}g''(0)y^2+\varepsilon Q(t,G(\theta,h_0),0,0)+O(|y|^3+|u\varepsilon|+|y\varepsilon|+\varepsilon^2),\end{cases}\tag{22}$$

其中

$$\begin{aligned}b_1(t,\theta,h_0)&=f(G(\theta,h_0))\wedge P(t,G(\theta,h_0),0,0),\\ b_2(t,\theta,h_0)&=f(G(\theta,h_0))\wedge(P_x(t,G(\theta,h_0),0,0)G_h(\theta,h_0))\\ &\quad+(f_x(G(\theta,h_0))G_h(\theta,h_0))\wedge P(t,G(\theta,h_0),0,0),\\ b_3(t,\theta,h_0)&=f(G(\theta,h_0))\wedge P_y(t,G(\theta,h_0),0,0).\end{aligned}$$

作尺度变换 $u=\varepsilon^{\frac{1}{2}}\overline{u},y=\varepsilon^{\frac{1}{2}}\overline{y}$, 系统 (22) 变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2\pi}{T_0}+\varepsilon\dfrac{2\pi}{T_0}G_h(\theta,h_0)\wedge P(t,G(\theta,h_0),0,0)+O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t}=-\varepsilon^{\frac{1}{2}}b_1(t,\theta,h_0)-\varepsilon[b_2(t,\theta,h_0)\overline{u}+b_3(t,\theta,h_0)\overline{y}]+O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\overline{y}}{\mathrm{d}t}=\varepsilon^{\frac{1}{2}}\Big[\dfrac{1}{2}g''(0)\overline{y}^2+Q(t,G(\theta,h_0),0,0)\Big]+O(\varepsilon).\end{cases}\tag{23}$$

为了利用积分流形定理得到系统 (23) 的不变环面的存在性，我们先用平均法的技巧将 (23) 化简，即有如下引理.

引理 2 假设 $\frac{T_0}{T}$ 为无理数，且

$$G(\theta,h_0),\quad f(G(\theta,h_0)),\quad P(t,G(\theta,h_0),0,0),\quad Q(t,G(\theta,h_0),0,0)$$

皆为关于 $\frac{2\pi}{T}t, \theta$ 的三角多项式，则存在 $(\theta, \overline{u}, \overline{y})$ 到 (φ, ρ, z) 的周期变换，将系统 (23) 化为如下等价的周期系统，关于 (t, φ) 分别有周期 $T, 2\pi$.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2\pi}{T_0} + \varepsilon\overline{\Phi}_1(h_0) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \\ \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon^{\frac{1}{2}}\overline{b}_1(h_0) - \varepsilon(\overline{b}_2(h_0)\rho + \overline{b}_3(h_0)z) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[\dfrac{1}{2}g''(0)z^2 + Q_1(h_0)\right] + O(\varepsilon), \end{cases} \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_1(h_0) &= \frac{1}{TT_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\mathrm{T}} G_h(\theta, h_0) \wedge P(t, G(\theta, h_0), 0, 0)\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta, \\ \overline{b}_1(h_0) &= \frac{1}{2\pi T}\int_0^{2\pi}\int_0^{\mathrm{T}} f(G(\theta, h_0)) \wedge P(t, G(\theta, h_0), 0, 0)\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta, \\ \overline{b}_2(h_0) &= \frac{1}{2\pi T}\int_0^{2\pi}\int_0^{\mathrm{T}} [f(G(\theta, h_0)) \wedge (P_x(t, G(\theta, h_0), 0, 0)G_h(\theta, h_0)) \\ &\qquad + (f_x(G(\theta, h_0))G_h(\theta, h_0)) \wedge P(t, G(\theta, h_0), 0, 0)]\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta, \\ \overline{b}_3(h_0) &= \frac{1}{2\pi T}\int_0^{2\pi}\int_0^{\mathrm{T}} f(G(\theta, h_0)) \wedge P_y(t, G(\theta, h_0), 0, 0)\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta, \\ Q_1(h_0) &= \frac{1}{2\pi T}\int_0^{2\pi}\int_0^{\mathrm{T}} Q(t, G(\theta, h_0), 0, 0)\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{25}$$

证 考虑存在如下形式的变换

$$\begin{aligned} \theta &= \varphi + \varepsilon\Phi_1(t, \varphi) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \\ \overline{u} &= \rho + \varepsilon^{\frac{1}{2}}S_1(t, \varphi) + \varepsilon[S_2(t, \varphi)\rho + S_3(t, \varphi)z] + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \\ \overline{y} &= z + \varepsilon^{\frac{1}{2}}R_1(t, \varphi) + O(\varepsilon), \end{aligned} \tag{26}$$

其中 $\Phi_1(t, \varphi), S_1(t, \varphi), S_2(t, \varphi), S_3(t, \varphi), R_1(t, \varphi)$ 待定，变换 (26) 将系统 (23) 变为 (24), 我们证明这样的变换 (26) 确实存在. 将变换 (26) 代入 (23), 并利用 (24), 可得关于 ε, ρ, z 的一组等式，比较两边同次幂的系数，可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\frac{2\pi}{T_0} &= \frac{2\pi}{T_0}G_h(\varphi, h_0) \wedge P(t, G(\varphi, h_0), 0, 0) - \overline{\Phi}_1(h_0), \\ \frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\partial S_1}{\partial\varphi}\frac{2\pi}{T_0} &= -b_1(t, \varphi, h_0) + \overline{b}_1(h_0), \\ \frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial\varphi}\frac{2\pi}{T_0} &= -b_2(t, \varphi, h_0) + \overline{b}_2(h_0), \\ \frac{\partial S_3}{\partial t} + \frac{\partial S_3}{\partial\varphi}\frac{2\pi}{T_0} &= -b_3(t, \varphi, h_0) + \overline{b}_3(h_0), \\ \frac{\partial R_1}{\partial t} + \frac{\partial R_1}{\partial\varphi}\frac{2\pi}{T_0} &= Q(t, G(\varphi, h_0), 0, 0) - Q_1(h_0), \end{aligned} \tag{27}$$

由于 $\frac{T_0}{T}$ 为无理数，即非共振条件成立，利用文 [1] 第 12 章引理 4.1, 4.2, 可知当

$$G(\theta,h_0), f(G(\theta,h_0)), \quad P(t,G(\theta,h_0),0,0), \quad Q(t,G(\theta,h_0),0,0)$$

皆为关于 $\frac{2\pi}{T}t,\theta$ 的三角多项式时，(27) 式中的方程有关于 t,φ 分别为周期 $T,2\pi$ 的解

$$\Phi_1(t,\varphi), \quad S_1(t,\varphi), \quad S_2(t,\varphi), \quad S_3(t,\varphi), \quad R_1(t,\varphi)$$

当且仅当 (25) 式成立．引理证毕．

利用等价系统 (24), 可得下面的定理．

定理 3 假设 (H1)–(H4) 成立，

$$G(\theta,h_0), f(G(\theta,h_0)), \quad P(t,G(\theta,h_0),0,0), \quad Q(t,G(\theta,h_0),0,0)$$

皆为关于 $\frac{2\pi}{T}t,\theta$ 的三角多项式，且 $\overline{b}_1,\overline{b}_2,\overline{b}_3,Q_1$ 由 (25) 式给出．当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时，有如下结论成立

i) 若对一切 $h\in J$, 有 $\overline{b}_1(h)\neq 0$ 或 $g''(0)Q_1(h)>0$, 则 (20) 在 $\{\overline{L}_h: h\in J\}$ 附近没有不变环面；

ii) 若有 $h_0\in J$, 使 $\overline{b}_1(h_0)=0,\overline{b}_2(h_0)\neq 0,\overline{b}_3(h_0)\neq 0$ 且 $g''(0)Q_1(h_0)<0$, 则 (20) 在 $\overline{L}_{h_0}$ 附近有两个不变环面．

证 i) 由方程 (24) 易知，当 $\overline{b}_1(h_0)\neq 0$ 或 $g''(0)Q_1(h_0)>0$ 不存在不变环面，从而 (20) 在 $\{\overline{L}_h: h\in J\}$ 附近没有不变环面；

ii) 当 $\overline{b}_1(h_0)=0$ 且 $g''(0)Q_1(h_0)<0$ 时，记 $z_0=\sqrt{\frac{-2Q_1(h_0)}{g''(0)}}$, (24) 可写为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2\pi}{T_0}+\varepsilon\overline{\Phi}_1(h_0)+O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}),\\ \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-\varepsilon(\overline{b}_2(h_0)\rho+\overline{b}_3(h_0)z)+O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}),\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}g''(0)\varepsilon^{\frac{1}{2}}(z+z_0)(z-z_0)+O(\varepsilon).\end{cases} \tag{28}$$

下面假定 $\overline{b}_2(h_0)\neq 0,\overline{b}_3(h_0)\neq 0$.

令 $\rho=\overline{\rho}-\frac{\overline{b}_3(h_0)}{\overline{b}_2(h_0)}z_0,\ z=z_0+\varepsilon^{\frac{1}{4}}w$, (28) 变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2\pi}{T_0}+\varepsilon\overline{\Phi}_1(h_0)+O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}),\\ \dfrac{\mathrm{d}\overline{\rho}}{\mathrm{d}t}=-\varepsilon\overline{b}_2(h_0)\overline{\rho}+O(\varepsilon^{\frac{5}{4}}),\\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\varepsilon^{\frac{1}{2}}g''(0)z_0w+O(\varepsilon^{\frac{3}{4}}),\end{cases} \tag{29}$$

由文 [8] 定理 2.1 及其注 2.1 易知，此时 (29) 在 $(\overline{\rho},w)=(0,0)$ 附近有不变环面，从而 (20) 在 $\overline{L}_{h_0}$ 附近有不变环面．若令 $\rho=\widetilde{\rho}+\frac{\overline{b}_3(h_0)}{\overline{b}_2(h_0)}z_0, z=\varepsilon^{\frac{1}{4}}\widetilde{w}-z_0$, 则 (28) 变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2\pi}{T_0}+\varepsilon\overline{\Phi}_1(h_0)+O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}),\\ \dfrac{\mathrm{d}\widetilde{\rho}}{\mathrm{d}t}=-\varepsilon\overline{b}_2(h_0)\widetilde{\rho}+O(\varepsilon^{\frac{5}{4}}),\\ \dfrac{\mathrm{d}\widetilde{w}}{\mathrm{d}t}=-\varepsilon^{\frac{1}{2}}g''(0)z_0\widetilde{w}+O(\varepsilon^{\frac{3}{4}}),\end{cases} \tag{30}$$

与上同理，可知 (30) 在 $(\widetilde{\rho},\widetilde{w})=(0,0)$ 附近有不变环面，从而 (20) 在 $\overline{L}_{h_0}$ 附近有另一不变环面存在．于是定理 3 ii) 成立．

参 考 文 献

[1] Chow S N, Hale J K. Methods of Bifurcation Theory. New York: Springer-Verlag, 1982.
[2] 韩茂安．动力系统的周期解与分支理论．北京：科学出版社， 2002.
[3] 韩茂安，朱德明．微分方程分支理论．北京：煤炭工业出版社， 1994.
[4] Winggins S, Holmes P. Periodic orbits in slowly varying oscillations. *SIAM J. Math. Anal.,* 1987, **18**(3): 592–611.
[5] Han M A, Jiang K, David G. Bifurcations of periodic orbits, subharmonic solutions and invariant tori of high-dimensional systems. *Nonlinear Analysis*, 1999, **36**: 319–329.
[6] 朱德明，韩茂安．周期流形的不变环面和次调和分支．数学学报， 1998, **4**: 749–756.
[7] Liu X L, Han M A. Poincaré bifurcation of a three-dimensional system. *Chaos, Solitons and Fractals,* 2005, **23**: 1385–1398.
[8] 韩茂安，陈贤峰．积分流形的分支条件及其应用．中国科学， 2005, **35A**(4): 425–441.
[9] Ye Z Y, Han M A. Bifurcations of invariant tori and subharmonic solutions of singularly perturbed system. *Chinese Annals of Mathematics*, 2007, **28B**(2): 135–148.

BIFURCATION OF A THREE-DIMENSIONAL SYSTEM WITH PERIODIC PERTURBATION

LIU Xuanliang MENG Xiaoying

(*Department of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou* 510640)

Abstract In this paper, bifurcation of subharmonic solutions and invariant tori of a three-dimensional system under periodic perturbation is studied. Assume that the unperturbed three dimensional system has a family of closed orbits, by using Poincaré map and integral manifold theory, sufficient conditions for the existence of subharmonic solutions and invariant tori of the perturbed system are obtained. Moreover, saddle-node bifurcation of subharmonic solutions are studied.

Key words Bifurcation, subharmonic solutions, invariant tori.