系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(8) (2009, 8), 1009–1027

血红细胞时滞模型的谱及其解的结构*

张 雅 轩 许 跟 起

(天津大学数学系，天津 300072)

摘要 研究一个带有时滞的血红细胞模型的解展开问题. 对模型在平衡点处线性化，并利用泛函分析方法，将线性化模型写成抽象发展方程. 借助半群理论证明了方程的适定性. 对系统算子细致的谱分析，得到了本征值的渐近表达式. 通过对算子的 Riesz 谱投影范数的渐近估计，证明系统的本征向量不能构成状态空间的基，但我们仍给出了方程的解在平衡点附近按照本征向量的的渐近展开.

关键词 血红细胞，时滞， C_0 半群，解的渐近展开.

MR(2000) 主题分类号 34L99, 47D06, 93B60

1 引 言

在周期性血液病的研究中，血红细胞数量的变化是最重要的指标之一. 在对血红细胞的数量建立模型和模型分析时，考虑到细胞分裂、分化、成熟等生命过程所花费的时间，有必要在模型中加入一些时滞项，以使其更契合地描述血红细胞数量的动态变化.

目前，对于时滞方程，已有很多专家学者在研究 (参看文献 [1–8] 及其后的参考文献), 内容涉及正平衡点的存在唯一性 [1–4], 解的 (全局) 渐近稳定性 [1–3,5,6], 解在平衡点附近的振荡 (见文 [1,2,8]), 解的渐近行为 [4,8], 解的局部 (全局)Hopf 分叉的存在性 [3,7], 分叉的方向与稳定性 [6,7] 等方面. 运用的主要方法有重合度理论 [4,5], 判断本征值符号 [3,7], 中心流行定理等 (见文 [2,7]).

我们注意到，上述文献中对解的研究主要集中在定性分析上，而对解的结构，特别是其展开性质方面的研究，文献较少. 而这些对解的定量研究，无论在理论方面还是对实际问题的计算，如追踪人体血红细胞的数量，都有着重要作用. 因此，定量研究时滞模型的解，给出其渐近展开式具有重要意义.

本文主要讨论解在平衡点附近按照本征向量的展开. 模型取自文 [1]

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = dq(P(t))S(t) + (b-\mu_p-kZ(t))P(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} = -\mu_z Z(t) + kZ(t)P(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = 2(1-d)q(P(t-\tau))S(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu_s\tau} - dq(P(t))S(t). \end{cases} \tag{1}$$

* 国家自然科学基金 (NSFC-60874034) 资助项目.
收稿日期：2008-06-16, 收到修改稿日期：2009-01-09.

这是一个非线性模型，其中 τ 表示相应的时滞， $P(t), Z(t), S(t)$ 分别为代表母细胞，血细胞和干细胞的指标， $d, b, \mu_p, k, \mu_z, \mu_s$ 是相应的参数， $q = c\frac{\theta^n}{\theta^n+P^n}(c, \theta > 0)$ 是 P 的函数，它们的具体意义以及模型的建立与假设参看 [1] 及其后的参考文献. 在 [1] 中，作者证明了系统 (1) 有两个可能的稳态解，并在局部稳定意义下用特征方程、 Rouché 定理、 Hopf 分叉定理等方法讨论了它们的动态特性，最后，对这些结论给出了数值模拟. 本文将在 [1] 对平衡态稳定性研究的基础上，计算系统所确定算子的谱的渐近表达式，并给出模型的解在平衡点附近按照系统本征向量的渐近展开式.

本文内容安排如下. 第 2 节，将模型在非平凡平衡点处线性化并写成抽象发展方程，利用半群理论得到系统的适定性. 第 3 节，对系统算子进行详细的谱分析，借助 [9] 中求整函数零点的方法，给出算子本征值的渐近表达式. 第 4 节，研究系统算子及其伴随算子本征向量的表达式，并证明本征向量列不能构成状态空间的基. 第 5 节，给出系统的解按照本征向量的渐近展开式. 第 6 节，给出原始模型在平凡平衡点处线性化后相应的结论.

尽管本文的工作是对一个具体的血红细胞模型进行的，但所用的方法对一般的时滞微分方程解展开的研究具有普适性.

2 方程的适定性

本节我们给出方程的适定性结果. 由 [1] 中的结果知，当 $b < \mu_p$ 时，系统仅以零点为唯一的平衡点. 此时，将方程组 (1) 在零点附近线性化，得到相应的线性化模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = (b-\mu_p)P(t) + cdS(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} = -\mu_z Z(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = 2c(1-d)S(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu_s\tau} - cdS(t). \end{cases} \tag{2}$$

而当 $b > \mu_p$ 时，系统以零点及 $(\frac{\mu_z}{k}, \frac{b-\mu_p}{k}, 0)$ 为平衡点. 对此非平凡平衡点，作变换

$$p(t) = P(t) - \frac{\mu_z}{k}, \quad z(t) = Z(t) - \frac{b-\mu_p}{k}, \quad s(t) = S(t),$$

则系统 (1) 化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = dq\Big(p(t) + \dfrac{\mu_z}{k}\Big)s(t) - kz(t)\Big(p(t) + \dfrac{\mu_z}{k}\Big), \\ \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = -\mu_z\Big(z(t) + \dfrac{b-\mu_p}{k}\Big) + (kz(t) + b - \mu_p)\Big(p(t) + \dfrac{\mu_z}{k}\Big), \\ \dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = 2(1-d)q\Big(p(t-\tau) + \dfrac{\mu_z}{k}\Big)s(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu_s\tau} - dq\Big(p(t) + \dfrac{\mu_z}{k}\Big)s(t). \end{cases} \tag{3}$$

从而当 $b > \mu_p$ 时，系统 (3) 以零点为其平衡点. 在零点附近作线性化，得其相应的线性化模

型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = -\mu_z z(t) + dq\Big(\dfrac{\mu_z}{k}\Big)s(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = (b-\mu_p)p(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = 2(1-d)q\Big(\dfrac{\mu_z}{k}\Big)s(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu_s\tau} - dq\Big(\dfrac{\mu_z}{k}\Big)s(t). \end{cases} \tag{4}$$

由于对 (2) 的谱及解的研究思路与 (4) 的完全相同. 注意到 (2) 中的第二式可以直接求解, 得

$$Z(t) = Z_0\mathrm{e}^{-\mu_z t}, \quad t > 0,$$

其中, Z_0 表示 Z 在 $t=0$ 时的初值. 所以在将 (2) 规范化成 Hilbert 状态空间中的抽象发展方程时, 我们只考虑 $P(t)$ 和 $S(t)$. 所以, 与对系统 (4) 的研究思路相同, 我们只需给出系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = (b-\mu_p)P(t) + cdS(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = 2c(1-d)S(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu_s\tau} - cdS(t) \end{cases} \tag{5}$$

的渐近谱分析及其解按照本征向量的渐近展开. 所以不失一般性, 本文以对 (4) 的分析为主, 给出解的渐近展开, 对平凡平衡点附近解的结构仅在第 6 节中给出结论.

下面, 给出线性化模型 (4) 的适定性分析. 首先, 我们将 (4) 写成标准的时滞微分方程. 为此, 令

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_z & dq\Big(\dfrac{\mu_z}{k}\Big) \\ b-\mu_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -dq\Big(\dfrac{\mu_z}{k}\Big) \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-d)q\Big(\dfrac{\mu_z}{k}\Big)\mathrm{e}^{-\mu_s\tau} \end{pmatrix},$$

并记

$$x(t) = (p(t), z(t), s(t))^{\mathrm{T}},$$

则 (4) 可以写成

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-\tau). \tag{6}$$

对上述系统设置初值

$$x(0) = x_0 = (p_0, z_0, s_0)^{\mathrm{T}}, \quad x(s) = \phi(s), \quad s \in [-\tau, 0],$$

我们就得到了标准的时滞微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-\tau), \\ x(0) = x_0, \\ x(s) = \phi(s), \quad s \in [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{7}$$

其中, $x_0 \in \mathbb{C}^3$, $\phi \in L^2([-\tau,0],\mathbb{C}^3)$. 显然, 方程 (7) 与 (4) 是等价的. 因此, 本节后面的篇幅就来考察方程 (7) 的适定性. 为此, 我们先将 (7) 化为 Hilbert 状态空间中的抽象发展方程.

设状态空间为

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^3 \times L^2([-\tau, 0], \mathbb{C}^3),$$

其上定义内积

$$[X, Y]_{\mathcal{H}} = (x, y)_{\mathbb{C}^3} + \int_{-\tau}^{0} (f(s), g(s))_{\mathbb{C}^3} \mathrm{d}s,$$

其中，$X = (x, f(s))^{\mathrm{T}}$, $Y = (y, g(s))^{\mathrm{T}} \in \mathcal{H}$. 这里，我们用 $\mathbb{C}^3$ 表示复内积空间，用 $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}^3}$ 表示其上的内积，用 $L^2([-\tau, 0], \mathbb{C}^3)$ 表示平方可积函数空间，用 $H^k([-\tau, 0], \mathbb{C}^3)$ 表示 k 阶 Sobolev 空间. 易知，$\mathcal{H}$ 是一个 Hilbert 空间.

定义算子 $\mathcal{A}$ 如下

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ (x, f(s))^{\mathrm{T}} \in \mathcal{H} \,\middle|\, f \in H^1([\tau, 0], \mathbb{C}^3),\ f(0) = x \right\}, \tag{8}$$

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ f(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \delta_1 \\ 0 & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f(s) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中，$\delta_1 \psi = \psi(-\tau)$, $\forall\, \psi \in C[-\tau, 0]$.

记

$$f(t, s) = x(t + s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad X(t) = (x(t), f(t, s))^{\mathrm{T}},$$

及

$$X(0) = X_0 := (x_0, \phi(s))^{\mathrm{T}}, \quad s \in [-\tau, 0].$$

则方程 (7) 化为状态空间 $\mathcal{H}$ 中的抽象发展方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{A} X(t), \quad t > 0, \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{10}$$

容易验证，方程 (10) 与 (7) 具有相同的可解性，所以我们只需讨论方程 (10) 的适定性.

定理 2.1 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{H}$ 如前定义，则在空间 $\mathcal{H}$ 上存在一个与 $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{H}}$ 等价的内积，记为 $[\cdot, \cdot]_1$, 使得对某个常数 $M > 0$, 成立

$$\Re[\mathcal{A}X, X]_1 \le M[X, X]_1, \quad \forall\, X \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{11}$$

证 对任意的 $X = (x, f(s))^{\mathrm{T}}$, $Y = (y, g(s))^{\mathrm{T}} \in \mathcal{H}$, 定义内积

$$[X, Y]_1 = (x, y)_{\mathbb{C}^3} + \int_{-\tau}^{0} q(s)(f(s), g(s))_{\mathbb{C}^3} \mathrm{d}s,$$

其中，$q(s)$ 是待定的正标量函数. 显然，$[\cdot, \cdot]_1$ 与 $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{H}}$ 是等价内积. 为证明定理的结论，我们只需证明 (11) 对任意实的 $X \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ 成立.

任给 $X=(x,f(s))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是实的，则有

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}X,X]_1 &= (A_0x+A_1f(-\tau),x)_{\mathbb{C}^3}+\int_{-\tau}^{0}q(s)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(s),f(s)\Big)_{\mathbb{C}^3}\mathrm{d}s\\
&\le ||A_0||||x||_{\mathbb{C}^3}^2+||A_1||||f(-\tau)||_{\mathbb{C}^3}||x||_{\mathbb{C}^3}+\frac{1}{2}\int_{-\tau}^{0}q(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}||f(s)||_{\mathbb{C}^3}^2\mathrm{d}s\\
&\le ||A_0||||x||_{\mathbb{C}^3}^2+\frac{1}{2}\left(||A_1||^2||f(-\tau)||_{\mathbb{C}^2}^2+||x||_{\mathbb{C}^3}^2\right)+\frac{1}{2}q(s)||f(s)||_{\mathbb{C}^3}^2\Big|_{-\tau}^{0}\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{-\tau}^{0}q'(s)||f(s)||_{\mathbb{C}^3}^2\mathrm{d}s\\
&=\left(||A_0||+\frac{1}{2}\right)||x||_{\mathbb{C}^3}^2+\frac{1}{2}||A_1||^2||f(-\tau)||_{\mathbb{C}^3}^2+\frac{1}{2}q(0)||f(0)||_{\mathbb{C}^3}^2\\
&\qquad -\frac{1}{2}q(-\tau)||f(-\tau)||_{\mathbb{C}^3}^2-\frac{1}{2}\int_{-\tau}^{0}q'(s)||f(s)||_{\mathbb{C}^3}^2\mathrm{d}s\\
&=\left(||A_0||+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}q(0)\right)||x||_{\mathbb{C}^3}^2+\frac{1}{2}\left(||A_1||^2-q(-\tau)\right)||f(-\tau)||_{\mathbb{C}^3}^2\\
&\quad +\int_{-\tau}^{0}\frac{-q'(s)}{2q(s)}q(s)||f(s)||_{\mathbb{C}^3}^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

由上式可知，需要选取 $q(s)\in C^1[-\tau,0]$, 使得 $q'(s)<0$ 且 $||A_1||^2-q(-\tau)<0$. 事实上，我们可取 $q(s)=\frac{1}{\tau^2}||A_1||^2s^2+1, s\in[-\tau,0]$, 则 $q(s)$ 满足上述要求．此时， $q(0)=1$, 且

$$\frac{-q'(s)}{2q(s)}=\frac{-2\frac{1}{\tau^2}||A_1||^2s}{2(\frac{1}{\tau^2}||A_1||^2s^2+1)}\le\frac{||A_1||^2|s|}{2\tau||A_1|||s|}=\frac{1}{2\tau}||A_1||.$$

取 $M=\max\{||A_0||+1,\ \frac{1}{2\tau}||A_1||\}$, 则有

$$[\mathcal{A}X,X]_1\le M\Big[||x||_{\mathbb{C}^3}^2+\int_{-\tau}^{0}q(s)||f(s)||_{\mathbb{C}^3}^2\mathrm{d}s\Big]=M[X,X]_1.$$

证毕.

定理 2.2 设算子 $\mathcal{A}$ 如式 (8) 和 (9) 所定义，对任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$, 记

$$\varDelta(\lambda)=\lambda I_3-A_0-A_1\mathrm{e}^{-\lambda\tau},$$

其中， I_3 是 $\mathbb{C}^3$ 上的单位算子．则当 $\det\varDelta(\lambda)\neq0$ 时， $\lambda\in\rho(\mathcal{A})$, 且 $\mathcal{A}$ 的预解式是紧的，并由下式给出

$$\begin{cases}(\lambda I-\mathcal{A})^{-1}Y=X=(x,f(s))^{\mathrm{T}}, \quad \forall\, Y=(y,g(s))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H},\\
x=\varDelta(\lambda)^{-1}\Big[y+A_1\displaystyle\int_{-\tau}^{0}\mathrm{e}^{-\lambda(\tau+s)}g(s)\mathrm{d}s\Big],\\
f(s)=\mathrm{e}^{\lambda s}x+\displaystyle\int_{s}^{0}\mathrm{e}^{\lambda(s-r)}g(r)\mathrm{d}r.\end{cases}$$

特别地，我们有

$$\sigma(\mathcal{A})=\sigma_p(\mathcal{A})=\Big\{\lambda\in\mathbb{C}\ \Big|\ \det\varDelta(\lambda)=0\Big\}.$$

证 容易验证, $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个闭稠定线性算子. 对任意给定的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 及 $Y=(y,g(s))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H}$, 考虑如下预解方程

$$(\lambda I-\mathcal{A})X=Y,\quad X=(x,f(s))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

即

$$\begin{cases}\lambda x-A_0x-A_1f(-\tau)=y,\\ \lambda f(s)-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(s)=g(s),\quad s\in[-\tau,0],\\ f(0)=x.\end{cases}\tag{12}$$

求解式 (12) 中的微分方程，得

$$f(s)=\mathrm{e}^{\lambda s}x+\int_s^0\mathrm{e}^{\lambda(s-r)}g(r)\mathrm{d}r.\tag{13}$$

将 (13) 代入 (12) 的第一式，得

$$\Delta(\lambda)x=y+A_1\int_{-\tau}^0\mathrm{e}^{-\lambda(\tau+s)}g(s)\mathrm{d}s.$$

从而，当 $\det\Delta(\lambda)\neq0$ 时，我们有

$$x=\Delta(\lambda)^{-1}\Big[y+A_1\int_{-\tau}^0\mathrm{e}^{-\lambda(\tau+s)}g(s)\mathrm{d}s\Big].\tag{14}$$

因此， x 和 $f(s)$ 分别由式 (14) 和 (13) 唯一确定，且有 $(x,f(s))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, 从而 $\lambda\in\rho(\mathcal{A})$. 特别地，有

$$R(\lambda,\mathcal{A})\begin{pmatrix}y\\ g(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta(\lambda)^{-1}\left[y+A_1\displaystyle\int_{-\tau}^0\mathrm{e}^{-\lambda(\tau+s)}g(s)\mathrm{d}s\right]\\ \mathrm{e}^{\lambda s}x+\displaystyle\int_s^0\mathrm{e}^{\lambda(s-r)}g(r)\mathrm{d}r\end{pmatrix}.$$

由 $R(\lambda,\mathcal{A})$ 的表达式容易看出，它是 $\mathcal{H}$ 上的紧算子.

对任意使得 $\det\Delta(\lambda)=0$ 的 $\lambda\in\mathbb{C}$, 方程 $\Delta(\lambda)\eta=0$ 总有一非零解 $\eta\in\mathbb{C}^3$. 显然，$(\eta,\mathrm{e}^{\lambda s}\eta)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, 且

$$(\lambda I-\mathcal{A})\begin{pmatrix}\eta\\ \mathrm{e}^{\lambda s}\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

从而 $\lambda\in\sigma_p(\mathcal{A})$. 因此， $\sigma(\mathcal{A})=\sigma_p(\mathcal{A})=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\det\Delta(\lambda)=0\}$.

推论 2.1 设 $\mathcal{A}$ 如前定义，则 $\mathcal{A}$ 生成 $\mathcal{H}$ 上的一个 C_0 半群.

证 注意到算子 $\mathcal{A}$ 的定义域 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 在空间 $\mathcal{H}$ 中稠密. 定理 2.1 表明 $\mathcal{A}-MI$ 是耗散算子; 定理 2.2 表明复平面的右半平面都是 $\mathcal{A}-MI$ 的预解点. 因此，算子 $\mathcal{A}-MI$ 生成 $\mathcal{H}$ 上的一个 C_0 压缩半群. 由有界线性算子扰动理论知， $\mathcal{A}$ 生成 $\mathcal{H}$ 上的一个 C_0 半群. 证毕.

3 算子 $\mathcal{A}$ 谱的渐近分析

本节我们利用 [9] 给出的方法考察算子 $\mathcal{A}$ 的谱. 由定理 2.2, 我们只需讨论函数 $\det\Delta(\lambda)$ 的零点. 由于

$$\begin{aligned}\det\Delta(\lambda)&=\det(\lambda I_3-A_0-A_1\mathrm{e}^{-\lambda\tau})\\&=\begin{vmatrix}\lambda & \mu_z & -dq\Big(\dfrac{\mu_z}{k}\Big)\\ -(b-\mu_p) & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda+dq\Big(\dfrac{\mu_z}{k}\Big)-2(1-d)q\Big(\dfrac{\mu_z}{k}\Big)\mathrm{e}^{-\mu_s\tau}\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\end{vmatrix}\\&=(\lambda^2+\mu_z(b-\mu_p))\Big(\lambda+dq\Big(\frac{\mu_z}{k}\Big)-2(1-d)q\Big(\frac{\mu_z}{k}\Big)\mathrm{e}^{-\mu_s\tau}\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\Big).\end{aligned}$$

易知算子 $\mathcal{A}$ 在虚轴上有一对共轭虚点谱 $\mu_{1,2}=\pm\mathrm{i}\sqrt{\mu_z(b-\mu_p)}$, 其余零点完全由整函数 $h(\lambda)=\lambda+D_0-D\mathrm{e}^{-\lambda\tau}$ 确定. 这里记 $D_0=dq(\frac{\mu_z}{k})$, $D=2(1-d)q(\frac{\mu_z}{k})\mathrm{e}^{-\mu_s\tau}$ 以简化计算.

注意到, $\forall\ \lambda\in\mathbb{C}$ 满足 $\alpha<\Re\lambda<\beta$ ($\alpha<\beta$ 是两个任意取定的实数), 当 $|\lambda|\to+\infty$ 时, 有 $|h(\lambda)|\to+\infty$. 故 $h(\lambda)$ 在带域 $\alpha<\Re\lambda<\beta$ 中只有有限个零点. 且当 $\Re\lambda\to+\infty$ 时, $|h(\lambda)|\to+\infty$. 现在, 我们来确定当 $\Re\lambda\to-\infty$ 时, $h(\lambda)$ 的零点. 令 $h(\lambda)=0$, 则有 $\mathrm{e}^{\lambda\tau}h(\lambda)=\lambda\mathrm{e}^{\lambda\tau}+D_0\mathrm{e}^{\lambda\tau}-D=0$. 令 $z=\lambda+D_0$, 得到 $\mathrm{e}^{z\tau}h(z-D_0)=z\mathrm{e}^{z\tau}-D\mathrm{e}^{\tau D_0}=0$. 因此, $h(\lambda)$ 的零点完全由

$$\widetilde{h}(z)=z\mathrm{e}^{z\tau}-D_1,\quad D_1=D\mathrm{e}^{\tau D_0}\tag{15}$$

决定.

由于 $D_1>0$, 简单的数学分析推导表明, $\widetilde{h}(z)$ 有且仅有一个正实零点, 记作 μ_3. 下面的定理给出了 $\widetilde{h}(z)$ 的所有零点的表达.

定理 3.1 设 $\widetilde{h}(z)$ 如式 (15) 定义, 则 $\widetilde{h}(z)$ 的零点集可表示为

$$\Lambda=\{\xi_n,\overline{\xi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}\bigcup\{\mu_3\},$$

其中, μ_3 是 $\widetilde{h}(z)$ 唯一的正实零点, ξ_n 具有渐近表达式

$$\xi_n=\frac{1}{\tau}\Big[\ln D_1-\ln\frac{(2n-\frac12)\pi}{\tau}\Big]+\mathrm{i}\Big[\frac{(2n-\frac12)\pi}{\tau}-\frac{\ln\frac{(2n-\frac12)\pi}{\tau}}{\tau(2n-\frac12)\pi}\Big]+O\Big(\frac1n\Big).\tag{16}$$

证 由于 τ 和 D_1 均为正实数, 故当 $\widetilde{h}(z)=0$ 时, 亦有 $\widetilde{h}(\overline{z})=0$. 这表明 $\widetilde{h}$ 的零点关于实轴对称分布. 因此, $\widetilde{h}(z)$ 的零点集可以记为

$$\Lambda=\{(\xi_n,\overline{\xi_n})\mid\xi_n=x_n+\mathrm{i}y_n,\quad y_n>0,n\in\mathbb{N}\}\bigcup\{\mu_3\}.$$

记 $\xi=x+\mathrm{i}y, y>0$. 则由方程 $\widetilde{h}(\xi)=0$ 得 $\mathrm{e}^{\tau x}(x\cos\tau y-y\sin\tau y)=D_1$, $\mathrm{e}^{\tau x}(x\sin\tau y+y\cos\tau y)=0$. 所以

$$x=-\frac{y\cos\tau y}{\sin\tau y},\tag{17}$$

$$\mathrm{e}^{\tau x}=-\frac{D_1\sin\tau y}{y},\tag{18}$$

从而 $x=\frac{1}{\tau}\left[\ln(-D_1\sin\tau y)-\ln y\right]$. 此式与 (17) 式联立，得

$$\ln(-D_1\sin\tau y)-\ln y+\frac{\tau y\cos\tau y}{\sin\tau y}=0.$$

由于 $D_1>0$, 所以 $-\sin\tau y>0$. 这表明 $y\in(\frac{(2n-1)\pi}{\tau},\frac{2n\pi}{\tau}),n\geq 1$.

记

$$G(y)=\ln D_1+\ln(-\sin\tau y)-\ln y+\frac{\tau y\cos\tau y}{\sin\tau y},\quad y\in\Big(\frac{(2n-1)\pi}{\tau},\frac{2n\pi}{\tau}\Big),\quad n\geq 1.$$

则

$$G'(y)<0,\ y\in\Big(\frac{(2n-1)\pi}{\tau},\frac{2n\pi}{\tau}\Big),\qquad \lim_{y\to\frac{(2n-1)\pi}{\tau}}G(y)=+\infty,\qquad \lim_{y\to\frac{2n\pi}{\tau}}G(y)=-\infty. \tag{19}$$

因此，在每个区间 $(\frac{(2n-1)\pi}{\tau},\frac{2n\pi}{\tau})$ 中，存在唯一的 y_n, 使得 $G(y_n)=0$. 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 记

$$x_n=\frac{1}{\tau}\ln\Big(-\frac{D_1\sin\tau y_n}{y_n}\Big),$$

则 $\xi_n=x_n+\mathrm{i}y_n$ 是 $\widetilde{h}(z)$ 的零点. 从而 $\varLambda$ 中包含无穷多个点.

注意到当 $y_n>D_1$ 时,

$$x_n=\frac{1}{\tau}\ln\Big(-\frac{D_1\sin\tau y_n}{y_n}\Big)<0. \tag{20}$$

且当 $n\to\infty$ 时， $x_n\to-\infty$, $y_n\to+\infty$. 式 (17) 和 (18) 说明 $\mathrm{e}^{\tau x_n}x_n=D_1\cos\tau y_n$. 联系 (20), 可知 $\cos\tau y_n<0$. 且当 $n\to\infty$ 时， $\cos\tau y_n\to 0$. 所以 $\tau y_n\in((2n-1)\pi,(2n-\frac{1}{2})\pi)$, 且 $y_n-\frac{(2n-\frac{1}{2}\pi)}{\tau}\to 0$. 可令

$$y_n=\frac{(2n-\frac{1}{2})\pi+\varepsilon_n}{\tau}, \tag{21}$$

则 $\varepsilon_n\in(-\frac{\pi}{2},0)$, 且当 $n\to\infty$ 时， $\varepsilon_n\to 0$. 将式 (21) 代入 $G(y)$ 的表达式中，有

$$0=G(y_n)=\ln D_1+\ln\cos\varepsilon_n-\ln y_n-\frac{\tau y_n\sin\varepsilon_n}{\cos\varepsilon_n}.$$

这表明，当 $n\to\infty$ 时， $\sin\varepsilon_n=-\frac{\ln y_n}{\tau y_n}+O(\frac{1}{n})$. 从而 $\varepsilon_n=-\frac{\ln\frac{(2n-\frac{1}{2})\pi}{\tau}}{(2n-\frac{1}{2})\pi}+O(\frac{1}{n})$. 因此,

$$y_n=\frac{(2n-\frac{1}{2})\pi}{\tau}-\frac{\ln\frac{(2n-\frac{1}{2})\pi}{\tau}}{\tau(2n-\frac{1}{2})\pi}+O\Big(\frac{1}{n}\Big). \tag{22}$$

将式 (22) 代入 $x_n=\frac{1}{\tau}\left[\ln D_1+\ln(-\sin\tau y_n)-\ln y_n\right]$ 中，得

$$x_n=\frac{1}{\tau}\Big[\ln D_1-\ln\frac{(2n-\frac{1}{2})\pi}{\tau}\Big]+O\Big(\frac{\ln^2 n}{n^2}\Big). \tag{23}$$

由式 (22) 和 (23), 知命题得证.

下面的定理给出了算子 $\mathcal{A}$ 谱的分布.

定理 3.2 设算子 $\mathcal{A}$ 如式 (8) 和 (9) 所定义，则下述表达成立

1) $\mathcal{A}$ 的谱关于实轴对称分布；

2)
$$\sigma(\mathcal{A})=\left\{\lambda_n,\overline{\lambda_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\bigcup\{\widetilde{\mu_j}\}_{j=1}^{3},$$

其中，$\widetilde{\mu_j}=\mu_j$, $j=1,2$, $\widetilde{\mu_3}=\mu_3-D_0$ 是整函数 $h(\lambda)=\lambda\mathrm{e}^{\lambda\tau}+D_0\mathrm{e}^{\lambda\tau}-D$ 唯一的实零点，

$$\lambda_n=\frac{1}{\tau}\Big[\ln D-\ln\frac{2n-\frac{1}{2}}{\tau}\pi\Big]+\mathrm{i}\Big[\frac{2n-\frac{1}{2}}{\tau}\pi-\frac{\ln\frac{2n-\frac{1}{2}}{\tau}\pi}{\tau(2n-\frac{1}{2})\pi}\Big]+O\Big(\frac{1}{n}\Big),\quad \mu_{1,2}=\pm\mathrm{i}\sqrt{\mu_z(b-\mu_p)}.$$

证 由定理 2.2 知，对 $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$ 当且仅当 $\det\varDelta(\lambda)=0$. 由于整函数 $\det\varDelta(\lambda)$ 中的系数均为实数，所以当 $\det\varDelta(\lambda)=0$ 时，有 $\det\varDelta(\overline{\lambda})=0$. 所以 $\mathcal{A}$ 的谱关于实轴对称分布.

注意到 $z=\lambda+D_0$, 故由 (16) 式可立即得到定理中 λ_n 的表达式.

下面的定理给出了 $\mathcal{A}$ 的本征值的重数及相应本征向量的形式.

定理 3.3 设 $\mathcal{A}$ 如前定义，则每一个 $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$ 都是简单本征值，且相应的一个本征向量具有形式
$$\varPhi_\lambda=(x,\mathrm{e}^{\lambda\tau}x)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}(\mathcal{A}),$$
其中，
$$x=\Big(\frac{\lambda}{b-\mu_p},1,\frac{1}{D_0}\Big[\frac{\lambda^2}{b-\mu_p}+\mu_z\Big]\Big)^{\mathrm{T}}.$$

证 $\forall\,\lambda\in\sigma(\mathcal{A})\cap\mathbb{C}$, 有 $h(\lambda)=\lambda+D_0-D\mathrm{e}^{-\lambda\tau}=0$, 而 $h'(\lambda)=\tau D\mathrm{e}^{-\lambda\tau}+1=\tau(\lambda+D_0)+1\neq 0$. 从而 $h(\lambda)$ 的复零点是简单的. 此外，易见实零点 $\mu_i, i=1,2,3$ 也是简单的.

现设 $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$, $\varPhi=(x,f(s))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是其相应的一个本征向量，则 $\mathcal{A}\varPhi=\lambda\varPhi$, 即
$$\begin{cases}A_0x+A_1f(-\tau)=\lambda x,\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(s)=\lambda f(s),\quad s\in[-\tau,0],\\ f(0)=x.\end{cases}\tag{24}$$

求解式 (24) 中的微分方程，得
$$f(s)=\mathrm{e}^{\lambda s}x,\quad s\in[-\tau,0].$$

将其代入 (24) 中的第一式，得
$$\varDelta(\lambda)x=\begin{pmatrix}\lambda & \mu_z & -D_0\\ -(b-\mu_p) & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda+D_0-D\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\end{pmatrix}x=0.$$

求解上式，当 λ 是 $h(\lambda)=\lambda+D_0+D\mathrm{e}^{-\lambda\tau}$ 的零点时，$x=\big(\frac{\lambda}{b-\mu_p},1,\frac{1}{D_0}\big[\frac{\lambda^2}{b-\mu_p}+\mu_z\big]\big)^{\mathrm{T}}$; 当 $\lambda=\widetilde{\mu}_{1,2}$ 时，$x=\big(\frac{\lambda}{b-\mu_p},1,0\big)^{\mathrm{T}}$. 证毕.

4 算子 $\mathcal{A}$ 本征向量的非基性质

在这一节中，我们证明 $\mathcal{A}$ 的本征向量不构成空间 $\mathcal{H}$ 的一个基．为此，我们需要对谱投影 $E(\lambda;\mathcal{A})$ 的范数作渐近估计．

首先给出 $\mathcal{A}$ 的伴随算子．设 $X=(x,f(s))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, $Y=(y,g(s))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$, 这里 $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ 是待定的．由定义

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}X,Y]_{\mathcal{H}}&=(A_0x+A_1f(-\tau),y)_{\mathbb{C}^3}+\int_{-\tau}^{0}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(s),g(s)\Big)_{\mathbb{C}^3}\mathrm{d}s\\&=(A_0x,y)_{\mathbb{C}^3}+(A_1f(-\tau),y)_{\mathbb{C}^3}+(f(s),g(s))_{\mathbb{C}^3}\Big|_{-\tau}^{0}-\int_{-\tau}^{0}\Big(f(s),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g(s)\Big)_{\mathbb{C}^3}\mathrm{d}s\\&=(x,A_0^*y)_{\mathbb{C}^3}+(f(-\tau),A_1^*y)_{\mathbb{C}^3}+(f(0),g(0))_{\mathbb{C}^3}-(f(-\tau),g(-\tau))_{\mathbb{C}^3}\\&\quad+\int_{-\tau}^{0}\Big(f(s),-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g(s)\Big)_{\mathbb{C}^3}\mathrm{d}s\\&=(x,A_0^*y+g(0))_{\mathbb{C}^3}+(f(-\tau),A_1^*y-g(-\tau))_{\mathbb{C}^3}+\int_{-\tau}^{0}\Big(f(s),-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g(s)\Big)_{\mathbb{C}^3}\mathrm{d}s\\&=[x,\mathcal{A}^*Y]_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

由此，可定义

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)=\Big\{(y,g(s))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H}\;\Big|\;g\in H^1([-\tau,0],\mathbb{C}^3),\ g(-\tau)=A_1^{\mathrm{T}}y\Big\},\tag{25}$$

$$\mathcal{A}^*\begin{pmatrix}y\\g(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_0^* & \delta_0\\0 & -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\g(s)\end{pmatrix},\tag{26}$$

其中， $\delta_0\psi=\psi(0)$, $\forall\,\psi\in C[\tau,0]$, A_j^* 表示 $A_j, j=1,2$ 的共轭转置.

定理 4.1 设算子 $\mathcal{A}$ 由式 (25) 和 (26) 所定义，则 $\mathcal{A}^*$ 的谱为

$$\sigma(\mathcal{A}^*)=\overline{\sigma(\mathcal{A})}=\Big\{\overline{\lambda}\in\mathbb{C}\;\Big|\;\det\Delta(\lambda)^*=0\Big\},$$

其中， $\Delta(\lambda)^*=\overline{\lambda}I_3-A_0^{\mathrm{T}}-A_1^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\overline{\lambda}\tau}$. 对 $\overline{\lambda}\in\sigma(\mathcal{A}^*)$, 相应的一个本征向量具有形式

$$\Psi_{\overline{\lambda}}=(y,\mathrm{e}^{-\overline{\lambda}(\tau+s)}A_1^{\mathrm{T}}y)^{\mathrm{T}},\tag{27}$$

其中,

$$y=\Big(\frac{\overline{\lambda}+D_0-D\mathrm{e}^{-\overline{\lambda}\tau}}{D_0},\frac{\overline{\lambda}(\overline{\lambda}+D_0-D\mathrm{e}^{-\overline{\lambda}\tau})}{D_0(b-\mu_p)},1\Big)^{\mathrm{T}}.$$

证 由伴随算子的谱理论, 有 $\sigma(\mathcal{A}^*)=\overline{\sigma(\mathcal{A})}$. 又 A_0,A_1 是实矩阵, 所以 $A_j^*=A_j^{\mathrm{T}}, j=0,1$. 与定理 3.3 的证明相似，容易验证，由式 (27) 给出的 $\Psi_{\overline{\lambda}}$ 是 $\mathcal{A}^*$ 相应于 $\overline{\lambda}$ 的本征向量.

定理 4.2 设算子 $\mathcal{A}$ 如前定义， $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$, $E(\lambda;\mathcal{A})$ 是相应的 Riesz 谱投影，则对任意的 $X\in\mathcal{H}$, 有

$$E(\lambda;\mathcal{A})X=[X,\Psi_{\overline{\lambda}}]_{\mathcal{H}}\Phi_{\lambda}.$$

其中， $\Phi_\lambda, \Psi_{\overline{\lambda}}$ 分别为定理 3.3 和 4.1 中给出的本征向量，且满足 $[\Phi_\lambda, \Psi_{\overline{\lambda}}]_{\mathcal{H}} = 1$. 进一步地，当 $\Re\lambda \to -\infty$ 时， Riesz 谱投影 $E(\lambda;\mathcal{A})$ 有如下渐近估计

$$||E(\lambda;\mathcal{A})|| \approx \frac{\mathrm{e}^{|\Re\lambda|\tau}}{2\tau|\Re\lambda|},$$

从而本征向量序列 $\{\Phi_\lambda \mid \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$ 不构成状态空间 $\mathcal{H}$ 的一个基.

证 对任意的 $\lambda, \zeta \in \sigma(\mathcal{A}), \lambda \neq \zeta$, 记 Φ_λ 是 $\mathcal{A}$ 相应于 λ 的一个本征向量， $\Psi_{\overline{\zeta}}$ 是 $\mathcal{A}^*$ 相应于 $\overline{\zeta}$ 的本征向量，则

$$\lambda[\Phi_\lambda, \Psi_{\overline{\zeta}}]_{\mathcal{H}} = [\mathcal{A}\Phi_\lambda, \Psi_{\overline{\zeta}}]_{\mathcal{H}} = [\Phi_\lambda, \mathcal{A}^*\Psi_{\overline{\zeta}}]_{\mathcal{H}} = [\Phi_\lambda, \overline{\zeta}\Psi_{\overline{\zeta}}]_{\mathcal{H}} = \zeta[\Phi_\lambda, \Psi_{\overline{\zeta}}]_{y\mathcal{H}}.$$

所以当 $\lambda \neq \zeta$ 时， $[\Phi_\lambda, \Psi_{\overline{\zeta}}]_{\mathcal{H}} = 0$.

设 $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, $\Phi_\lambda = (x_\lambda, \mathrm{e}^{\lambda s}x_\lambda)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathcal{A}$ 相应于 λ 的一个本征向量，$E(\lambda;\mathcal{A})$ 是相应的 Riesz 谱投影，则 $E(\lambda;\mathcal{A})\mathcal{H}$ 是由 Φ_λ 张成的 $\mathcal{H}$ 的一维子空间. 设 $\Psi_{\overline{\lambda}} = (y_{\overline{\lambda}}, \mathrm{e}^{-\overline{\lambda}(\tau+s)}A_1^{\mathrm{T}}y_{\overline{\lambda}})^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathcal{A}^*$ 相应于 $\overline{\lambda}$ 的一个本征向量，且使 $[\Phi_\lambda, \Psi_{\overline{\lambda}}]_{\mathcal{H}} = 1$, 则 $\forall\, X \in \mathcal{H}$, 都有 $E(\lambda;\mathcal{A})X = [X, \Psi_{\overline{\lambda}}]_{\mathcal{H}}\Phi_\lambda$. 由于我们讨论的是当 $\Re\lambda \to -\infty$ 时， $||E(\lambda;\mathcal{A})||$ 的估计式，故由定理 3.3 和定理 4.1, 可设

$$x_\lambda = k_1(\lambda)\left(\frac{\lambda}{b-\mu_p}, 1, \frac{1}{D_0}\left[\frac{\lambda^2}{b-\mu_p} + \mu_z\right]\right)^{\mathrm{T}}, \quad y_{\overline{\lambda}} = k_2(\lambda)(0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

其中， $k_1(\lambda), k_2(\lambda) \in \mathbb{C}$ 是与 λ 有关的待定系数. 此时，有

$$\begin{aligned}1 &= [\Phi_\lambda, \Psi_{\overline{\lambda}}]_{\mathcal{H}}\\ &= (x_\lambda, y_{\overline{\lambda}})_{\mathbb{C}^3} + \int_{-\tau}^0 (\mathrm{e}^{\lambda s}x_\lambda, \mathrm{e}^{-\overline{\lambda}(\tau+s)}A_1^{\mathrm{T}}y_{\overline{\lambda}})_{\mathbb{C}^3}\mathrm{d}s\\ &= (x_\lambda, y_{\overline{\lambda}})_{\mathbb{C}^3} + \tau\mathrm{e}^{-\lambda\tau}(A_1x_\lambda, y_{\overline{\lambda}})_{\mathbb{C}^3}\\ &= k_1(\lambda)\overline{k_2(\lambda)}\Big[\frac{1}{D_0}\Big(\frac{\lambda^2}{b-\mu_p} + \mu_z\Big) + \frac{D}{D_0}\Big(\frac{\lambda^2}{b-\mu_p} + \mu_z\Big)\tau\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\Big].\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}\eta(\lambda) &= \frac{1}{D_0}\left(\frac{\lambda^2}{b-\mu_p} + \mu_z\right)\left[1 + \tau D\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\right],\\ k_1(\lambda) &= \sqrt{|\Re\lambda|}\mathrm{e}^{\lambda\tau}, \quad \overline{k_2(\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{|\Re\lambda|}\mathrm{e}^{\lambda\tau}\eta(\lambda)},\end{aligned}$$

则 $[\Phi_\lambda, \Psi_{\overline{\lambda}}]_{\mathcal{H}} = 1$, 且当 $\Re\lambda \to -\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}||\Phi_\lambda||_{\mathcal{H}}^2 &= ||x_\lambda||_{\mathbb{C}^3}^2 + \int_{-\tau}^0 ||\mathrm{e}^{\lambda s}x_\lambda||_{\mathbb{C}^3}^2\mathrm{d}s = ||x_\lambda||_{\mathbb{C}^3}^2\Big[1 + \int_{-\tau}^0 \mathrm{e}^{2\Re\lambda s}\mathrm{d}s\Big]\\ &= |k_1(\lambda)|^2\Big[1 + \Big|\frac{\lambda}{b-\mu_p}\Big|^2 + \frac{1}{D_0^2}\Big|\frac{\lambda^2}{b-\mu_p} + \mu_z\Big|^2\Big]\Big[1 + \frac{1-\mathrm{e}^{-2\Re\lambda\tau}}{2\Re\lambda}\Big]\\ &= |\Re\lambda|\mathrm{e}^{2\Re\lambda\tau}\Big[1 + \frac{1-\mathrm{e}^{-2\Re\lambda\tau}}{2\Re\lambda}\Big]\Big[1 + \Big|\frac{\lambda}{b-\mu_p}\Big|^2 + \frac{1}{D_0^2}\Big|\frac{\lambda^2}{b-\mu_p} + \mu_z\Big|^2\Big]\\ &= \Big[|\Re\lambda|\mathrm{e}^{2\Re\lambda\tau} - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\Re\lambda\tau} - 1)\Big]\Big[1 + \frac{|\lambda|^2}{(b-\mu_p)^2} + \frac{1}{D_0^2}\Big|\frac{\lambda^2}{b-\mu_p} + \mu_z\Big|^2\Big]\\ &\approx \frac{|\lambda|^4}{2D_0^2(b-\mu_p)^2}\end{aligned}$$

及

$$
\begin{aligned}
\|\Psi_{\overline{\lambda}}\|^2_{\mathcal{H}} &= \|y_{\overline{\lambda}}\|^2_{\mathbb{C}^3} + \int_{-\tau}^{0} \|\mathrm{e}^{-\overline{\lambda}(\tau+s)} A_1^{\mathrm{T}} y_{\overline{\lambda}}\|^2_{\mathbb{C}^3} \mathrm{d}s \\
&= |k_2(\lambda)|^2 + |k_2(\lambda)|^2 D^2 \int_{-\tau}^{0} \mathrm{e}^{-2\Re\lambda(\tau+s)} \mathrm{d}s \\
&= |k_2(\lambda)|^2 \Big[1 + D^2 \frac{1-\mathrm{e}^{-2\Re\lambda\tau}}{2\Re\lambda}\Big] \\
&= \frac{1 + \frac{1-\mathrm{e}^{-2\Re\lambda\tau}}{2\Re\lambda} D^2}{|\Re\lambda| \mathrm{e}^{2\Re\lambda\tau} \frac{1}{D_0^2} \big|\frac{\lambda^2}{b-\mu_p} + \mu_z\big|^2 \left|1 + \tau D \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\right|^2} \\
&= \frac{|\Re\lambda| - \frac{1-\mathrm{e}^{-2\Re\lambda\tau} D^2}{2}}{\frac{1}{D_0^2} |\Re\lambda|^2 \big|\frac{\lambda^2}{b-\mu_p} + \mu_z\big|^2 \left|\mathrm{e}^{\lambda\tau} + \tau D\right|^2} \\
&\approx \frac{\Big[|\Re\lambda| - \frac{1-\mathrm{e}^{-2\Re\lambda\tau} D^2}{2}\Big] |\lambda|^2}{\frac{1}{D_0^2} |\Re\lambda|^2 \big|\frac{\lambda^2}{b-\mu_p} + \mu_z\big|^2 \left|\lambda\mathrm{e}^{\lambda\tau} + \lambda\tau D\right|^2},
\end{aligned}
$$

注意到 $\lambda \mathrm{e}^{\lambda\tau} \approx D$, 所以

$$
\|\Psi_{\overline{\lambda}}\|^2_{\mathcal{H}} \approx \frac{\frac{D^2}{2} \mathrm{e}^{2|\Re\lambda|\tau} |\lambda|^2}{\frac{1}{D_0^2} |\Re\lambda|^2 \big|\frac{\lambda^2}{b-\mu_p}\big|^2 |\lambda\tau D + D|^2} = \frac{D_0^2 (b-\mu_p)^2 \mathrm{e}^{2|\Re\lambda|\tau}}{2|\Re\lambda|^2 |\lambda|^4 \tau^2}. \tag{28}
$$

因此，当 $\Re\lambda \to -\infty$ 时,

$$
\|E(\lambda;\mathcal{A})\| = \|\Phi_\lambda\|_{\mathcal{H}} \|\Psi_{\overline{\lambda}}\|_{\mathcal{H}} \approx \frac{\mathrm{e}^{|\Re\lambda|\tau}}{2\tau|\Re\lambda|} \to +\infty.
$$

这说明本征向量序列 $\{\Phi_\lambda | \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$ 不构成空间 $\mathcal{H}$ 的一个基.

5 时滞方程解的展开

本节我们给出抽象发展方程 (10) 的解按照本征向量的渐近展开式. 为得到解的展开式的收敛性，我们需要如下的符号和结果 (见 [10]).

设 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ 是 Banach 空间 $\mathbb{X}$ 上的 C_0 半群, 算子 $\mathcal{A}$ 是其生成元. 假定算子 $\mathcal{A}$ 的谱是离散的，即 $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}) = \{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$. 对每个 $\lambda_n \in \sigma(\mathcal{A})$, 记 $E(\lambda_n;\mathcal{A})$ 是相应于 λ_n 的 Riesz 谱投影. 定义空间 $\mathbb{X}$ 的 $T(t)-$ 谱不变子空间

$$
Sp(\mathcal{A}) := \overline{\mathrm{span}\Big\{\sum_{j=1}^{m} E(\lambda_j;\mathcal{A})x |\ x \in \mathbb{X};\ \forall\, m \in \mathbb{N}\Big\}},
$$

以及 $\mathbb{X}$ 的另一个 $T(t)-$ 不变子空间

$$
\mathcal{M}_\infty := \{x \in \mathbb{X} |\ E(\lambda;\mathcal{A})x = 0, \forall\, \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}.
$$

显然，$\overline{Sp(\mathcal{A}) + \mathcal{M}_\infty} \subseteq \mathbb{X}$.

对每个 $\lambda_n \in \sigma(\mathcal{A})$, 用 m_n 表示相应于 λ_n 的根子空间的代数重数，并对每个 $n \in \mathbb{N}$, 定义算子

$$D_n := (\mathcal{A} - \lambda_n I)E(\lambda_n; \mathcal{A}), \quad D_n^0 = E(\lambda_n; \mathcal{A}),$$

则 D_n 是 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子，且

$$D_n^k = (\mathcal{A} - \lambda_n I)^k E(\lambda_n; \mathcal{A}), \quad D_n^{m_n} = 0.$$

命题 5.1 设 $T(t)$ 是 Banach 空间 $\mathbb{X}$ 上的 C_0 半群，算子 $\mathcal{A}$ 是其生成元．假设 $\mathcal{A}$ 具有离散谱，且满足下述条件

(c1) 存在正常数 M_1, ρ_1 及 ρ_3 使得 $\sum\limits_{k=0}^{m_n} \frac{t^k \|D_n^k\|}{k!} \le M_1 \mathrm{e}^{-\rho_1 \Re\lambda_n} \mathrm{e}^{\rho_3 t}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ t \ge 0;$

(c2) 存在常数 $\tau_0 > 0$, 使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\Re\lambda_n \tau_0}$ 收敛，

则我们可以定义参数区间为 $[\tau_0 + \rho_1, \infty)$ 的两族算子 $T_1(t):\ \mathbb{X} \to Sp(\mathcal{A})$ 及 $T_2(t):\ \mathbb{X} \to \mathcal{M}_\infty$, 使得

1) $T_1(t)$ 是紧算子， $T_1(t)$ 和 $T_2(t)$ 是强连续的；

2) $T_j(t)T(s) = T(s)T_j(t) = T_j(t+s)$, 对 $t \ge \tau_0 + \rho_1,\ s \ge 0,\ j = 1, 2$ 成立；

3) $T(t)$ 有分解： $T(t) = T_1(t) + T_2(t), \quad t \ge \tau_0 + \rho_1,$

进一步地，如果 $\mathcal{A}$ 的谱满足下面的条件

(c3) 存在常数 $M_2 > 0$ 及 $\rho_2 > 0$, 使得 $|\Im\lambda_n| \le M_2 \mathrm{e}^{-\rho_2 \Re\lambda_n}$,

则对每个 $x \in \mathbb{X}, T_1(t)$ 在区间 $(\tau_0 + \rho_1 + \rho_2, \infty)$ 上是可微的．

命题 5.2 设 $T(t)$ 是 Banach 空间 $\mathbb{X}$ 上的一个 C_0 半群，算子 $\mathcal{A}$ 是其生成元．假设命题 5.1 中的条件 (c1)–(c3) 成立．且若下列条件之一满足

1) 算子 $\mathcal{A}$ 的广义本征向量在空间 $\mathbb{X}$ 中完整；

2) 算子 $\mathcal{A}$ 的预解式在 $\mathcal{M}_\infty$ 上的限制是在空间 $\mathbb{X}$ 中取值的 h 型有限指数型整函数，

则 $T(t)$ 对 $t > \tau_1$ 是可微半群，其中 $\tau_1 := \max\{\tau_0 + \rho_1 + \rho_2, \tau_0 + \rho_1 + h\}$.

下面，我们将验证命题 5.1 和 5.2 中的条件．

定理 5.1 设 $\mathcal{A}$ 如前定义，则 $\mathcal{A}$ 满足命题 5.1 中的全部条件，其中 $\rho_1 = \tau,\ \rho_2 = \tau,\ \rho_3 = 0,\ \tau_0 > \tau$.

证 $\forall\, \lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, 定理 3.3 表明 λ 是 $\mathcal{A}$ 的简单本征值．根据定理 4.2, $E(\lambda; \mathcal{A})$ 有渐近估计

$$||E(\lambda_n; \mathcal{A})|| \approx \frac{\mathrm{e}^{|\Re\lambda_n|\tau}}{2\tau|\Re\lambda_n|},$$

注意到当 $\Re\lambda_n \to -\infty$ 时， $\lambda \mathrm{e}^{\lambda_n \tau} \approx D$, 两边取模，得 $|\lambda_n| \mathrm{e}^{\Re\lambda_n \tau} \approx D$, 即 $|\lambda_n| \approx D\mathrm{e}^{|\Re\lambda_n|\tau}$. 所以， $||E(\lambda_n; \mathcal{A})|| \approx \frac{D\mathrm{e}^{2|\Re\lambda_n|\tau}}{2\tau|\Re\lambda_n|}$. 当 $n > \frac{1}{2}\left(\frac{\tau D}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$ 时， $\Re\lambda_n < 0$. 取 n_0 为 $\frac{1}{2}\left(\frac{\tau D}{\pi} + \frac{1}{2}\right) + 1$ 的整数部分， $d = \frac{1}{\tau} \ln \frac{w_{n_0}}{D}$, 则 $|\Re\lambda_n| > d > 0$. 从而

$$||E(\lambda_n; \mathcal{A})|| \le \frac{D}{2\tau d} \mathrm{e}^{|\Re\lambda_n|\tau}.$$

由于

$$\mathrm{e}^{\Re\lambda_n \tau_0} = \mathrm{e}^{\frac{\tau_0}{\tau}[\ln D - \ln \frac{2n - \frac{1}{2}}{\tau}\pi]} = \Big[\frac{\tau D}{(2n - \frac{1}{2})\pi}\Big]^{\frac{\tau_0}{\tau}},$$

故当 $\tau_0>\tau$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\Re\lambda_n\tau_0}=\Big[\frac{\tau D}{\pi}\Big]^{\frac{\tau_0}{\tau}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-\frac{1}{2})^{\frac{\tau_0}{\tau}}}<\infty.$$

又 λ_n 是方程 $\lambda\mathrm{e}^{\lambda\tau}=D+O(\mathrm{e}^{\lambda\tau})$ 的解，故有

$$|\Im\lambda_n|\le|\lambda_n|\le(1+D)\mathrm{e}^{-\tau\Re\lambda_n}.$$

综上，命题 5.1 中的条件 c(1)–c(3) 成立.

定理 5.2 设 $\mathcal{A}$ 如前定义，则其预解式为 $\mathbb{C}$ 上至多 2τ 型的有限指数型亚纯函数．从而，命题 5.2 中的条件 2) 成立.

证 根据定理 2.2, 算子 $\mathcal{A}$ 的预解式为

$$R(\lambda,\mathcal{A})\begin{pmatrix}y\\ g(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varDelta(\lambda)^{-1}\Big[y+A_1\displaystyle\int_{-\tau}^{0}\mathrm{e}^{-\lambda(\tau+s)}g(s)\mathrm{d}s\Big]\\ \mathrm{e}^{\lambda s}x+\displaystyle\int_{s}^{0}\mathrm{e}^{\lambda(s-r)}g(r)\mathrm{d}r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ f(s)\end{pmatrix},$$

这里 $X=(x,f(s))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, $Y=(y,g(s))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H}$. 由此

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathrm{e}^{\lambda s}x+\int_{s}^{0}\mathrm{e}^{\lambda(s-r)}g(r)\mathrm{d}r\Big\|_{\mathbb{C}^3}\\ \le{}&\mathrm{e}^{\Re\lambda s}||x||_{\mathbb{C}^3}+\Big[\int_{s}^{0}||g(r)||_{\mathbb{C}^3}^2\mathrm{d}r\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[\int_{s}^{0}\mathrm{e}^{2\Re\lambda(s-r)}\mathrm{d}r\Big]^{\frac{1}{2}}\\ ={}&\mathrm{e}^{\Re\lambda s}||x||_{\mathbb{C}^3}+||g||_{L^2}\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{2\Re\lambda s}}{2\Re\lambda}}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}||f||_{L^2}&=\Big[\int_{-\tau}^{0}\Big\|\mathrm{e}^{\lambda s}x+\int_{s}^{0}\mathrm{e}^{\lambda(s-r)}g(r)\mathrm{d}r\Big\|_{\mathbb{C}^3}^2\mathrm{d}s\Big]^{\frac{1}{2}}\\ &\le\Big[2\int_{-\tau}^{0}\Big(\mathrm{e}^{2\Re\lambda s}||x||_{\mathbb{C}^3}^2+||g||_{L^2}^2\frac{1-\mathrm{e}^{2\Re\lambda s}}{2\Re\lambda}\Big)\mathrm{d}s\Big]^{\frac{1}{2}}\\ &=\sqrt{2}\Big[||x||_{\mathbb{C}^3}^2\frac{1-\mathrm{e}^{-2\Re\lambda\tau}}{2\Re\lambda}+||g||_{L^2}^2\Big(\frac{\tau}{2\Re\lambda}-\frac{1-\mathrm{e}^{-2\Re\lambda\tau}}{(2\Re\lambda)^2}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}\\ &\le M_1\mathrm{e}^{|\Re\lambda|\tau}(||x||_{\mathbb{C}^3}^2+||g||_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中， $M_1>0$ 是常数.

对 x, 有

$$\begin{aligned}||x||_{\mathbb{C}^3}&\le||\varDelta(\lambda)^{-1}||||y+A_1\int_{-\tau}^{0}\mathrm{e}^{-\lambda(\tau+s)}g(s)\mathrm{d}s||_{\mathbb{C}^3}\\ &=||\varDelta(\lambda)^{-1}||\Big[||y||_{\mathbb{C}^3}+||A_1||||g||_{L^2}\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-2\Re\lambda\tau}}{2\Re\lambda}}\Big]\\ &\le M_2\mathrm{e}^{|\Re\lambda|\tau}||\varDelta(\lambda)^{-1}||\left(||y||_{\mathbb{C}^3}^2+||g||_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中, $M_2>0$ 是常数.

下面估计 $||\varDelta(\lambda)^{-1}||$. 计算可得

$$\begin{aligned}\varDelta(\lambda)^{-1}=&\frac{1}{\det(\varDelta(\lambda))}\\&\cdot\begin{pmatrix}\lambda(\lambda+D_0-D\mathrm{e}^{-\lambda\tau}) & -\mu_z(\lambda+D_0-D\mathrm{e}^{-\lambda\tau}) & \lambda D_0\\(b-\mu_p)(\lambda+D_0-D\mathrm{e}^{-\lambda\tau}) & \lambda(\lambda+D_0-D\mathrm{e}^{-\lambda\tau}) & (b-\mu_p)D_0\\0 & 0 & \lambda^2+\mu_z(b-\mu_p)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

根据文献 [11], 总有 $||T||\leq||T||_F$, 这里 $||\cdot||_F$ 表示矩阵的 Frobenious 范数. 所以只需找出 $\varDelta(\lambda)^{-1}$ 中的最高阶元素.

当 $\Re\lambda>0$ 时，最高阶元素为 $\lambda(\lambda+D_0-D\mathrm{e}^{-\lambda\tau})$ 和 $\lambda^2+\mu_z(b-\mu_p)$. 此时,

$$||\varDelta(\lambda)^{-1}||\leq||\varDelta(\lambda)^{-1}||_F\leq\widetilde{M}_3\frac{|\lambda||\lambda+D_0-D\mathrm{e}^{-\lambda\tau}|+|\lambda^2+\mu_z(b-\mu_p)|}{|\lambda^2+\mu_z(b-\mu_p)||\lambda+D_0-D\mathrm{e}^{-\lambda\tau}|}\leq M_3.$$

当 $\Re\lambda<0$ 时，最高阶元素为 $\lambda(\lambda+D_0-D\mathrm{e}^{-\lambda\tau})$. 此时,

$$||\varDelta(\lambda)^{-1}||\leq||\varDelta(\lambda)^{-1}||_F\leq\widetilde{M}_3\frac{|\lambda||\lambda+D_0-D\mathrm{e}^{-\lambda\tau}|}{|\lambda^2+\mu_z(b-\mu_p)||\lambda+D_0-D\mathrm{e}^{-\lambda\tau}|}\leq M_3.$$

由上面的估计容易知道,

$$||R(\lambda,\mathcal{A})||\leq M\mathrm{e}^{2\tau|\Re\lambda|},\quad M>0.$$

至此, 我们已经验证了命题 5.1 和 5.2 中的所有条件. 根据命题 5.2, 我们得到下述结果.

定理 5.3 设 $\mathcal{A}$ 由式 (8) 和 (9) 定义，则当 $t>4\tau$ 时，方程 (10) 的解可按照本征向量展开如下

$$\begin{aligned}X(t)&=T(t)X_0\\&=\sum_{j=1}^{3}\mathrm{e}^{t\widetilde{\mu_j}}(X_0,\varPsi_{\widetilde{\mu_j}})_{\mathcal{H}}\varPhi_{\widetilde{\mu_j}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{t\lambda_n}(X_0,\varPsi_{\overline{\lambda_n}})_{\mathcal{H}}\varPhi_{\lambda_n}+\mathrm{e}^{t\overline{\lambda_n}}(X_0,\varPsi_{\lambda_n})_{\mathcal{H}}\varPhi_{\overline{\lambda_n}}\right],\end{aligned}\qquad(29)$$

其中, $\varPhi_\lambda$ 和 $\varPsi_{\overline{\lambda}}$ 分别在定理 3.3 和 4.1 中定义，且满足

$$[\varPhi_\lambda,\varPsi_{\overline{\lambda}}]_{\mathcal{H}}=1.$$

6 系统 (1) 平凡平衡点附近的解展开

由 [1], 系统总以零点为其平衡点. 类似于对 (4) 的研究，令

$$B_0=\begin{pmatrix}b-\mu_p & cd\\0 & -cd\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & C\end{pmatrix},\quad \text{其中 } C=2c(1-d)\mathrm{e}^{-\mu_s\tau}.$$

并记

$$x(t)=(P(t),S(t))^{\mathrm{T}},$$

则 (5) 可以写成 $\dot{x}(t)=B_0x(t)+B_1x(t-\tau)$.

对上述系统设置初值

$$x(0)=x_0=(P_0,S_0)^{\mathrm{T}},\quad x(s)=\phi(s),\quad s\in[-\tau,0],$$

我们就得到了与 (5) 等价的标准时滞微分方程

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=B_0x(t)+B_1x(t-\tau), & t>0,\\ x(0)=x_0, & \\ x(s)=\phi(s), & s\in[-\tau,0].\end{cases}\tag{30}$$

其中, $x_0\in\mathbb{C}^2,\phi\in L^2([-\tau,0],\mathbb{C}^2)$.

下面, 设状态空间 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 为

$$\widetilde{\mathcal{H}}=\mathbb{C}^2\times L^2([-\tau,0],\mathbb{C}^2),$$

其上内积定义为

$$[X,Y]_{\widetilde{\mathcal{H}}}=(x,y)_{\mathbb{C}^2}+\int_{-\tau}^{0}(f(s),g(s))_{\mathbb{C}^2}\mathrm{d}s,$$

其中, $X=(x,f(s))^{\mathrm{T}},Y=(y,g(s))^{\mathrm{T}}\in\widetilde{\mathcal{H}}$. 其他符号如前面章节所约定.

定义算子 $\mathcal{B}$ 如下

$$\mathcal{D}(\mathcal{B})=\{(x,f(s))^{\mathrm{T}}\in\widetilde{\mathcal{H}}\mid f\in H^1([-\tau,0],\mathbb{C}^2),\ f(0)=x\},$$

$$\mathcal{B}\begin{pmatrix}x\\ f(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_0 & B_1\delta_1\\ 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ f(s)\end{pmatrix},$$

其中, $\delta_1\psi=\psi(-\tau),\ \forall\,\psi\in C[-\tau,0]$.

记

$$\begin{aligned}&f(t,s)=x(t+s),\ s\in[-\tau,0],\\ &X(t)=(x(t),f(t,s))^{\mathrm{T}},\quad X(0)=X_0:=(x,\phi(s))^{\mathrm{T}},\quad s\in[-\tau,0],\end{aligned}$$

则时滞微分方程 (30) 化为与之等价的 Hilbert 状态空间 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 中的抽象发展方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=\mathcal{B}X(t), & t>0,\\ X(0)=X_0.\end{cases}\tag{31}$$

由于推导思路与前面章节相同, 我们省略证明细节, 直接给出下列结论.

定理 6.1 设 $\mathcal{B}$ 和 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 如前定义, 则在空间 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 上存在一个与 $[\cdot,\cdot]_{\widetilde{\mathcal{H}}}$ 等价的内积, 记为 $[\cdot,\cdot]_2$, 使得对某个常数 $M>0$, 成立

$$\Re[\mathcal{B}X,X]_2\le M[X,X]_2,\quad \forall\,X\in\mathcal{D}(\mathcal{B}).$$

定理 6.2 设算子 $\mathcal{B}$ 如前定义, 对任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$, 记

$$\varDelta(\lambda)=\lambda I_2-B_0-B_1\mathrm{e}^{-\lambda\tau},$$

其中， I_2 是 $\mathbb{C}^2$ 上的单位算子．则当 $\det\Delta(\lambda)\neq 0$ 时， $\lambda\in\rho(\mathcal{B})$, 且 $\mathcal{B}$ 的预解式是紧的，并由下式给出

$$\begin{cases}(\lambda I-\mathcal{B})^{-1}Y=X=(x,f(s))^{\mathrm{T}}, \quad \forall\, Y=(y,g(s))^{\mathrm{T}}\in\widetilde{\mathcal{H}},\\ x=\Delta(\lambda)^{-1}\left[y+B_1\displaystyle\int_{-\tau}^{0}\mathrm{e}^{-\lambda(\tau+s)}g(s)\mathrm{d}s\right],\\ f(s)=\mathrm{e}^{\lambda s}x+\displaystyle\int_{s}^{0}\mathrm{e}^{\lambda(s-r)}g(r)\mathrm{d}r.\end{cases}$$

特别地，我们有

$$\sigma(\mathcal{B})=\sigma_p(\mathcal{B})=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\ \det\Delta(\lambda)=0\}.$$

推论 6.1 设 $\mathcal{B}$ 如前定义，则 $\mathcal{B}$ 生成 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 上的一个 C_0 半群.

定理 6.3 设 $\mathcal{B}$ 如前定义，则下列表述成立

1) $\mathcal{B}$ 的谱关于实轴对称分布；

2) $\mathcal{B}$ 的渐近谱为

$$\Lambda=\{\xi_n,\overline{\xi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}\bigcup\{\mu_1,\mu_2\},$$

其中，

$$\xi_n=-\mu_s+\frac{1}{\tau}\Big[\ln 2c(1-d)-\ln\frac{(2n-\frac{1}{2}\pi)}{\tau}\Big]+\mathrm{i}\Big[\frac{(2n-\frac{1}{2})\pi}{\tau}-\frac{\ln\frac{(2n-\frac{1}{2})\pi}{\tau}}{\tau(2n-\frac{1}{2})\pi}\Big]+O\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

$\mu_1=b-\mu_p$, μ_2 是整函数 $\lambda\mathrm{e}^{\lambda\tau}-C$ 的正实零点；

3) $\sigma(\mathcal{B})=\{\lambda_n,\overline{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}\bigcup\{\widetilde{\mu_1},\widetilde{\mu_2}\}$, 其中， $\widetilde{\mu_1}=\mu_1,\widetilde{\mu_2}$ 是 $\lambda\mathrm{e}^{\lambda\tau}+cd\mathrm{e}^{\lambda\tau}-C$ 可能的实零点．对足够大的 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$\lambda_n=\xi_n+O\Big(\frac{1}{n}\Big);$$

4) 每一个 $\lambda_n\in\sigma(\mathcal{B})$ 都是简单本征值，且相应的一个本征向量具有形式

$$\Phi_{\lambda_n}=(x_n,\mathrm{e}^{\lambda_n s}x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}(\mathcal{B}),$$

其中 x_n 是方程 $\Delta(\lambda_n)x=0$ 的非零解，其渐近表达式为

$$x_n=\Big(1,\frac{\lambda_n-(b-\mu_p)}{cd}\Big)^{\mathrm{T}}.$$

定理 6.4 设算子 $\mathcal{B}$ 如前定义，则下述关于其伴随算子 $\mathcal{B}^*$ 的陈述成立

1) $\mathcal{B}^*$ 的定义为

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}^*)=\{(y,g(s))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H}\mid g\in H^1([-\tau,0],\mathbb{C}^2),g(-\tau)=B_1^*y\}.$$

$$\mathcal{B}^*\begin{pmatrix}y\\ g(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_0^* & \delta_0\\ 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ g(s)\end{pmatrix},$$

其中， $\delta_0\psi=\psi(0)$, $\forall\,\psi\in C[-\tau,0]$, B_j^* 表示 B_j 的共轭转置， $j=0,1$;

2) $\mathcal{B}^*$ 的谱

$$\sigma(\mathcal{B}^*)=\overline{\sigma(\mathcal{B})}=\{\overline{\lambda}\in\mathbb{C}\mid\ \det\Delta(\lambda)^*=0\},$$

其中, $\Delta(\lambda)^* = \overline{\lambda} I_2 - B_0^{\mathrm{T}} - B_1^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-\overline{\lambda}\tau}$;

3) $\forall\, \overline{\lambda_n} \in \sigma(\mathcal{B}^*)$, 相应的一个本征向量具有形式

$$\Psi_{\overline{\lambda_n}} = (y_n, \mathrm{e}^{-\overline{\lambda_n}(\tau+s)} B_1^{\mathrm{T}} y_n)^{\mathrm{T}},$$

其中,

$$y_n = \Big(\frac{\overline{\lambda} + cd - C\mathrm{e}^{-\overline{\lambda}\tau}}{cd}, 1\Big)^{\mathrm{T}}.$$

定理 6.5 设算子 $\mathcal{B}$ 如前定义, $\lambda \in \sigma(\mathcal{B})$, Φ_λ, $\Psi_{\overline{\lambda}}$ 分别为定理 6.3 和 6.4 中给出的本征向量, 且满足

$$[\Phi_\lambda, \Psi_{\overline{\lambda}}]_{\widetilde{\mathcal{H}}} = 1,$$

则当 $\Re\lambda \to -\infty$ 时, 算子 $\mathcal{B}$ 相应于 λ 的 Riesz 谱投影有如下渐近估计

$$||E(\lambda;\mathcal{B})|| \approx \frac{\mathrm{e}^{|\Re\lambda|\tau}}{2\tau|\Re\lambda|},$$

从而本征向量序列 $\{\Phi_\lambda | \lambda \in \sigma(\mathcal{B})\}$ 不构成空间 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 的一个基.

定理 6.6 设 $\mathcal{B}$ 如前定义, 则 $\mathcal{B}$ 满足命题 5.1 中的条件 (c1)–(c3), 其中 $\rho_1 = \rho_2 = \tau, \rho_3 = 0, \tau_0 > \tau$. 且 $\mathcal{B}$ 的预解式为 $\mathbb{C}$ 上至多 2τ 型的有限指数型亚纯函数, 从而命题 5.2 中的条件 c2) 成立. 因此, 当 $t > 4\tau$ 时, 方程 (31) 的解可按照本征向量展开如下:

$$X(t) = T(t)X_0 \tag{32}$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \mathrm{e}^{t\widetilde{\mu_j}} (X_0, \Psi_{\widetilde{\mu_j}})_{\widetilde{\mathcal{H}}} \Phi_{\widetilde{\mu_j}} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\mathrm{e}^{t\lambda_n} (X_0, \Psi_{\overline{\lambda_n}})_{\widetilde{\mathcal{H}}} \Phi_{\lambda_n} + \mathrm{e}^{t\overline{\lambda_n}} (X_0, \Psi_{\lambda_n})_{\widetilde{\mathcal{H}}} \Phi_{\overline{\lambda_n}}\Big], \tag{33}$$

其中, Φ_λ 和 $\Psi_{\overline{\lambda}}$ 分别在定理 6.3 和 6.4 中定义.

参 考 文 献

[1] Yafia R. Dynamics and numerical simulations in a production and development of red blood cells model with one delay. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2009, **14**: 582–592.

[2] Zhang B G and Saker S H. Oscillation in a discrete partial delay survival red blood cells model. *Math. Comput. Modelling,* 2003, **37**: 659–664.

[3] Adimya M, Craustea F and Ruan S. Periodic oscillations in leukopoiesis models with two delays. *J. Theoret. Biol.,* 2006, **242**: 288–299 .

[4] Saker S H. Qualitative analysis of discrete nonlinear delay survival red blood cells model. *Nonlinear Anal.: Real World Appl.,* 2008, **9:** 471–489.

[5] Li J W and Wang Z C. Existence and global attractivity of positive periodic solutions of a survival model of red blood cells. *Comput. Math. Appl.,* 2005, **50**: 41–47.

[6] Zhang C R, Zu Y G and Zheng B D. Stability and bifurcation of a discrete red blood cell survival model. *Chaos, Solitons Fractals,* 2006, **28**: 386–394.

[7] Song Y L, Wei J J and Yuan Y. Bifurcation analysis on a survival red blood cells model. *J. Math. Anal. Appl.,* 2006, **316**: 459–471.
[8] Zaghrout A, Ammar A and El-Sheikh M M A. Oscillations and global attractivity in delay differential equations of population dynamics. *Appl. Math. Comput.,* 1996, **77**: 195–204.
[9] Hagen T. Asymptotic solutions of characteristic equations. *Nonliear Analysis: Real World Appl.,* 2005, **6**: 429–446.
[10] Xu G Q, Yung S P. Properties of a class of C_0 semigroups on Banach spaces and their applications. *J. Math. Anal. Appl.,* 2007, **328**: 245–256.
[11] Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1984.

SPECTRAL ANALYSIS AND SOLUTION STRUCTURE OF A RED BLOOD CELLS MODEL WITH ONE DELAY

ZHANG Yaxuan XU Genqi

(*Department of Mathematics, Tianjin University, Tianjin* 300072)

Abstract In this paper, the expansion of the solution of a red blood cells model with one delay is considered. First, the model near its equilibrium is linearized and the linearized model is rewritten as abstract evolutionary equation. Then, the well-posed-ness of the equation is obtained by applying the theory of C_0 semigroup. With a detailed spectral analysis, the explicit asymptotical expressions of all eigenvalues are given. Finally, it is shown that the eigenvectors of the system fail to form a basis for the Hilbert state space by estimating the norm of Riesz projection of the system operator. However, the asymptotic expansion of the solution associated with the eigenvectors is given.

Key words Red blood cell, delay, C_0 semigroup, asymptotic expansion of solution.