

# 转子系统非线性振动的辨识建模<sup>①</sup>

陈安华 钟 掘

(中南工业大学机电工程学院, 长沙 410083)

**摘 要** 对转子系统振动的线性化建模与分析, 在非线性的因素较为突出时, 不仅导致定量上的误差; 更重要的是, 将忽略真实转子系统丰富的非线性振动现象, 这对于机械故障分析与诊断是非常不利的。针对上述情况, 提出了一种转子系统非线性振动的辨识建模方法, 该方法仅需利用不平衡激励的周期位移响应, 无需人工激振, 数学处理、编程较为简单, 便于实施。实验结果表明, 该辨识建模方法是行之有效的。

**关键词** 转子 系统辨识 机械故障诊断 非线性振动

在机械故障诊断与预测领域, 系统的动力学模型被用来定量和定性阐明实际技术系统由于故障激励产生的各种异常振动现象, 即确立故障集与状态集之间的映射关系。因而, 所建立的数学模型的正确与否、精确程度将直接关系到故障诊断的成败。

为了简化分析与计算, 基于线性振动理论的机械故障诊断方法, 可采用线性化振动模型及其分析方法来研究真实系统。然而, 非线性是机械系统动力学的固有属性, 客观上存在着导致真实机械系统非线性的众多因素(如间隙与摩擦、油膜力、材料的物理性质、滚动轴承的恢复力、裂纹或其它缺陷、渐近弹簧和母子弹簧、大变形和大位移等), 且由于故障的存在及其恶化, 非线性往往变得更加突出<sup>[1]</sup>。当真实系统的非线性较为显著时, 如果仍采用线性化模型及其分析方法, 尽管能明显降低理论上和技术上的难度, 但同时也会产生难以接受的定量上的误差; 更重要的是, 将不可避免地“过滤”掉许多与真实系统故障密切相关的非线性振动现象, 如超谐波次谐波共振、解的多样性与稳定性、振动状态突变以及系统长期性态(吸引子)对参数的依赖性(分叉)等等。这时, 基于线性振动理论的故障诊断方法所固有的局

限性便充分地显露出来了。

研究真实机械系统在故障激励下的非线性振动现象的第一步(也是最关键的一步)是建立能足够精确地重现其动力学行为的非线性振动数学模型。尽管线性振动系统的辨别建模无论在理论上还是实践上都较为成熟, 但由于非线性振动理论还远未完善, 一般情况下不能获得精确的分析解, 非线性振动的辨识建模理论与技术还有待进一步研究。近二十年内, 在非线性的辨识领域虽然取得了一些进展, 如 Masri S F<sup>[2]</sup>、Tumanov Yu A<sup>[3]</sup>、杨永兴和 Ibrahim S R<sup>[4]</sup>、Kimihiko Yasuda<sup>[5]</sup>、Alexander R M<sup>[6]</sup>等提出了各自的有价值的理论方法, 但在已建立的辨识建模方法中, 由于大部分方法要求对被辨识系统施加确定的人工激振并能精确地获得其测量数据等原因, 很难将之直接应用于回转机械非线性转子系统的辨识建模。

本文提出的针对非线性转子系统的辨识建模方法的主要过程是, 用多项式表达振动微分方程中的非线性项, 直接利用不平衡产生的转子系统的稳态周期位移响应数据, 通过 FFT 技术, 由谐波平衡法得到含待辨识参数的线性代数方程组, 求其最小二乘解即得参数值, 进而获得描述转子系统非线性振动的微分方程模

① 收稿日期: 1996- 11- 22; 修回日期: 1997- 03- 19

陈安华, 男, 34岁, 副教授, 博士生

型。

### 1 转子系统的辨识建模方法

本文用多项式表征转子系统的非线性特征,这是因为:(1)根据 Weierstrass 定理,所有单变量多项式的集合在所有定义在某区间上的连续函数的集合内是稠的,即人们总可以用一个恰当的多项式逼近一个连续函数;(2)多项式中的每一项具有明确的物理意义,即能表示对应的非线性的不同源由;(3)辨识过程中的数学处理较为简便、规范;(4)包含多项式非线性刚度、阻尼项的振动微分方程的解能展现出与对实际转子系统振动观测的结果相近的丰富的非线性振动现象,如超谐波次谐波共振<sup>[7]</sup>、振动状态突变<sup>[8]</sup>等。

以下以具有非线性刚度的 Jeffcott 转子为例说明本文的辨识建模方法。

基于上述理由,Jeffcott 转子的刚度可用三次多项式表示,故描述其在不平衡激励下的横向振动微分方程为

$$m\ddot{x} + c'\dot{x} + kx + \alpha'x^2 + \beta'x^3 = me\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0) \quad (1)$$

式中  $x$  为圆盘中心的横向位移,  $m$  为转子系统的等效质量,  $c'$  为线性阻尼系数,  $k$  为刚度的线性部分,  $\alpha'$  代表源于转子的弯曲和非对称的材料非线性,  $\beta'$  代表源于中性轴伸长和对称的材料非线性<sup>[8]</sup>,  $e$  为圆盘重心与几何中心的偏离量,  $\omega$  为转子角速度。方程(1)等价于

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 + \beta x^3 = e\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0) \quad (2)$$

式中  $c = c'/m$ ,  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $\alpha = \alpha'/m$ ,  $\beta = \beta'/m$ 。至此,转子系统辨识问题变为参数辨识问题,即通过转子不平衡响应确定方程(2)中的各参数  $c$ 、 $\omega_0$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $e$  和  $\phi_0$ 。对方程(2)的理论分析、数值积分和模拟实验均表明,存在以  $T = 2\pi/\omega$  为周期的稳态周期解,故可按与文献[9]和[5]相同的处理方法,将稳态周期响应  $x$  展成 Fourier 级数

$$x = X_0 + X_{1a}\cos \omega t + X_{1b}\sin \omega t + X_{2a}\cos 2\omega t + X_{2b}\sin 2\omega t + \dots \quad (3.1)$$

由上式求导,即得到 Fourier 级数:

$$\dot{x} = -X_{1a}\omega \sin \omega t + X_{1b}\omega \cos \omega t - 2X_{2a}\omega \sin 2\omega t + 2X_{2b}\omega \cos 2\omega t + \dots \quad (3.2)$$

因为  $x^2$  和  $x^3$  也是以  $2\pi/\omega$  为周期的周期函数,故也可将其展成 Fourier 级数:

$$x^2 = X_0^{(2)} + X_{1a}^{(2)}\cos \omega t + X_{1b}^{(2)}\sin \omega t + X_{2a}^{(2)}\cos 2\omega t + X_{2b}^{(2)}\sin 2\omega t + \dots \quad (3.3)$$

$$x^3 = X_0^{(3)} + X_{1a}^{(3)}\cos \omega t + X_{1b}^{(3)}\sin \omega t + X_{2a}^{(3)}\cos 2\omega t + X_{2b}^{(3)}\sin 2\omega t + \dots \quad (3.4)$$

如方程中还含有其它项(如  $\dot{x}x$ 、 $\dot{x}^2$  等),也可做类似处理。将式(3)代入式(2),并令方程两端常数项和  $\cos \omega t$ 、 $\sin \omega t$ 、 $\cos 2\omega t$ 、 $\sin 2\omega t \dots$  等项的系数分别相等,得一含待辨识参数的线性代数方程组,用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 0 & X_0 & X_0^{(2)} & X_0^{(3)} & 0 & 0 \\ \omega X_{1b} & X_{1a} & X_{1a}^{(2)} & X_{1a}^{(3)} & -1 & 0 \\ -\omega X_{1a} & X_{1b} & X_{1b}^{(2)} & X_{1b}^{(3)} & -1 & 0 \\ 2\omega X_{1b} & X_{2a} & X_{2a}^{(2)} & X_{2a}^{(3)} & 0 & 0 \\ -2\omega X_{2b} & X_{2b} & X_{2b}^{(2)} & X_{2b}^{(3)} & 0 & 0 \\ 3\omega X_{3b} & X_{3a} & X_{3a}^{(2)} & X_{3a}^{(3)} & 0 & 0 \\ -3\omega X_{3a} & X_{3b} & X_{3b}^{(2)} & X_{3b}^{(3)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ \omega_b^2 \\ \alpha \\ \beta \\ e\omega^2 \cos \phi_0 \\ e\omega^2 \sin \phi_0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega^2 X_{1a} \\ -\omega^2 X_{1b} \\ -4\omega^2 X_{2a} \\ -4\omega^2 X_{2b} \\ -9\omega^2 X_{3a} \\ -9\omega^2 X_{3b} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4)$$

为表述方便,简记为

$$[A][\theta] = [B] \quad (5)$$

$[A]$  的行数取决于所取 Fourier 级数的项数,列数取决于表征系统非线性的多项式的次数。

为了改善辨识结果,方程(4)可由若干个

不同的  $\omega$  值所对应的线性方程组共同形成。

在进行辨识时, 转子转速为已知,  $[A]$  和  $[B]$  的各元素可由实测的稳态周期时域响应及其平方、立方运算后的 Fourier 变换获得, 从而方程(5) 中的待定参数矩阵  $[\theta]$  可由最小二乘法求出

$$[\theta] = ([A^T][A])^{-1}[A^T][B] \quad (6)$$

在求出  $[\theta]$  的各元素后, 将之代回到方程(2), 即得到描述 Jeffcott 转子在不平衡激励下的非线性振动的数学模型。因为具体的转子系统可视为确定性系统, 当需要研究其它故障(如不对中等) 激励下的非线性振动时, 只需变换方程右端的激励项即可。

以上是对具有非线性刚度单圆盘转子系统的讨论, 所述方法的全过程容易推广到同时具有非线性刚度和非线性阻尼的多自由度转子系统的辨识建模, 只是方程(5) 中的各矩阵包含更多的元素而已。

## 2 转子系统辨识建模的步骤

根据以上理论分析, 本文提出转子系统非线性振动辨识建模方法的步骤如下:

(1) 将转子系统的刚度或(和) 阻尼表达为合适的多项式形式, 根据经验、试算或对系统的先验了解确定多项式的最高次数(一般不超过 4 次即可获得良好的结果) 并选择合适的项(有时可略去最高次以下的某些项)。

(2) 调整到合适的转速, 分别测取不平衡

转子系统圆盘中心的稳态周期响应。应注意避免所得结果来自过渡过程和非周期响应, 尽量削弱横向振动的其它激励源(如不对中等)。

(3) 分别对一周期内的响应数据及其平方、立方作 DFT, 求得方程(5) 中矩阵  $[A]$  和  $[B]$  的各元素。

(4) 求方程组(5) 的最小二乘解, 得待辨识参数  $[\theta]$ 。由于方程(5) 往往呈现较强的病态, 故采用双精度运算并利用数值稳定性较好的求解方法(如 Householder 法等) 较为合适。

## 3 实例

为了说明上述辨识建模方法的有效性, 作者针对一具体转子系统使用本文方法进行了辨识计算。对辨识所得的数学模型在  $\omega$  取不同值时分别进行数值积分, 并将其结果与实测响应进行比较, 两者相差很小, 说明本文的辨识建模方法是行之有效的。

实验装置如图 1 所示。

实验所用转轴为一钢制细长轴。转子对中良好, 圆盘存在明显偏心, 从而保证横向振动的激励主要为不平衡。调整转轴转速到合适值, 使其稳态响应为周期的。待横向振动达到稳定后, 测得响应的离散数据, 并作平方、立方运算, 然后分别作 DFT, 求得各 Fourier 系数如附表所示。由附表数据和  $\omega$  的值生成矩阵  $[A]$  和  $[B]$ 。利用求解线性最小二乘问题的 Householder 方法, 编程并在微机上运算, 得

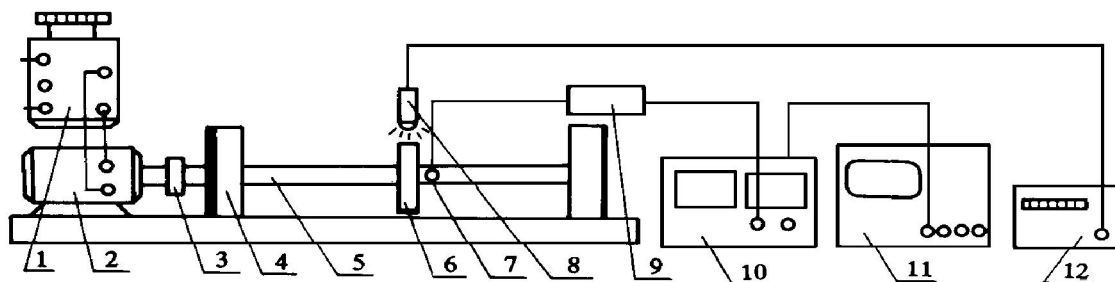


图 1 实验装置

1—调压器; 2—电动机; 3—联轴器; 4—支撑座; 5—转轴; 6—偏心圆盘; 7—涡流传感器;  
8—光电头; 9—前置器; 10—测振仪; 11—信号分析仪; 12—转速表

附表 Fourier 系数(  $\omega= 314.1592654s^{-1}$ , 单位 mm, mm<sup>2</sup>, mm<sup>3</sup>)

$X_0$	$X_{1a}$	$X_{1b}$	$X_{2a}$	$X_{2b}$	$X_{3a}$	$X_{3b}$	$X_{4a}$	$X_{4b}$
- 0.000541986	- 0.0080524	- 0.059569625	- 0.004518587	0.0141075	0.000286637	0.000137547	- 0.000468742	0.000827836
$X_0^{(2)}$	$X_{1a}^{(2)}$	$X_{1b}^{(2)}$	$X_{2a}^{(2)}$	$X_{2b}^{(2)}$	$X_{3a}^{(2)}$	$X_{3b}^{(2)}$	$X_{4a}^{(2)}$	$X_{4b}^{(2)}$
0.001917687	- 0.000794959	- 0.000323876	- 0.001734765	0.000483334	0.000834518	0.000109675	- 0.00012609	- 0.000052441
$X_0^{(3)}$	$X_{1a}^{(3)}$	$X_{1b}^{(3)}$	$X_{2a}^{(3)}$	$X_{2b}^{(3)}$	$X_{3a}^{(3)}$	$X_{3b}^{(3)}$	$X_{4a}^{(3)}$	$X_{4b}^{(3)}$
0.000019324	- 0.000024485	- 0.000180124	- 0.000020195	0.0000768	0.000027619	0.000039783	- 0.000003552	- 0.000035354

到辨识结果为

$$c = 43.445592s^{-1}$$

$$\omega_0^2 = 437445.43s^{-2}$$

$$\alpha = 266346.53mm \cdot s^{-2}$$

$$\beta = -10530433mm^{-2} \cdot s^{-2}$$

$$e = 0.188358mm$$

$$\varphi_0 = -79.1647^\circ$$

进而可建立该转子系统受不平衡激励的横向振动微分方程为

$$\ddot{x} + 43.445592\dot{x} + 437445.43x + 266346.53x^2 - 10530422x^3 = 0.188358\omega^2\cos(\omega t - 79.16470^\circ) \quad (7)$$

为了检验模型的有效性,对式(7)用四阶 Rounge-Kutta 法进行数值积分,舍弃前 600 个周期以确保得到稳态解。将数值结果与实测响应对比(图 2),二者相差很小,说明用本文方法进行转子非线性振动的辨识建模,效果是令人满意的。

## 4 结论

为了深入分析转子系统的非线性振动现象,以便准确诊断回转机械的非线性故障<sup>[1]</sup>,本文提出了一种转子系统非线性振动的辨识建模方法。该方法具有以下三个特点:

(1) 用多项式表征系统的非线性特征,物理意义明确,分析处理简便。但当系统具有本质上不连续的非线性时,会产生一定误差。

(2) 无需专门的人工激振,也不需测量输入数据,而是直接利用转子不平衡所激励的稳态周期位移响应进行辨识建模,便于工程实施。

(3) 因为方程(5)往往呈现病态,在求其最小二乘解时应选用数值稳定性较好的算法,并采用双精度运算。

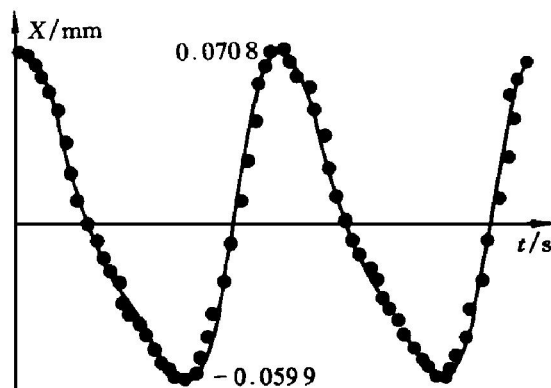


图 2 数值积分与实测响应(  $\omega= 314.1593s^{-1}$  )  
实心点—实验结果;实线—数值结果

值得说明的是,随着机械的日益高速化和各种新型材料在机器制造业中的应用,机械系统的非线性将更加显著,基于线性振动理论的故障诊断与预测技术的局限性也将会更加明显,从而机械系统故障的准确诊断将更有赖于对系统进行非线性振动建模与分析。作者相信,在机械故障诊断领域开展机械系统非线性振动辨识建模与分析计算的研究,既是工程实践的需要,也是机械故障诊断学科自身深化发展的必然。

### 参考文献

- 1 钟掘,陈安华. 见:第五届全国机械设备故障诊断学术会议论文集. 北京:科学技术文献出版社,1996:1-8.
- 2 Masri S F, Caughey T K. Trans ASME, J of Applied Mechanics, 1979, 46: 433-447.
- 3 Tumanov Yu A et al. Prikladnaya, 1981, 17(9): 106-110.

- 4 Yang Yongxin, Ibrahim S R. Trans ASME, J of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1985, 107: 60 – 66.
- 5 Kimihiko Yasuda, Shozo Kawamura. JSME International Journal, Series III, 1989, 32 (3): 365– 372.
- 6 Alexander R M *et al.* Trans ASME, J of Vibration and Acoustics, 1993, 115: 25– 31.
- 7 Toshio Yamamoto *et al.* Bulletin of JSME, 1985, 28(238): 679– 686.
- 8 Cveticanin L. Mech Mach Theory, 1995, 30(4): 581 – 588.
- 9 Zavodney L D. J of Sound and Vibration, 1989, 129(3): 417– 442.
- 10 Yeor-Sun Choi, Sherif T. Trans ASME, J of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1987, 109: 255 – 261.

## AN IDENTIFICATION AND MODELING TECHNIQUE FOR NONLINEAR ROTOR SYSTEMS

Chen Anhua, Zhong Jue

*College of Mechanical and Electrical Engineering,  
Central South University of Technology, Changsha 410083*

**ABSTRACT** Linear mathematical models for vibrations of rotor systems may lead to not only quantitative errors but also the neglect of rich nonlinear dynamic behaviour of real rotor systems, which is unfavourable to mechanical fault analysis and diagnosis when the nonlinearities of the systems to be investigated exist evidently. A new technique for identifying and modeling rotor systems has been presented in this paper. It uses only displacement data of steady-state periodic responses imbalance excited, and does not require any specially designed excitation. Moreover, mathematical operations and programming for it are relatively simple. The present technique is proved to be effective through mathematically modeling a real rotor.

**Key words** rotor system identification mechanical fault diagnosis nonlinear vibration

(编辑 李 军)