

一类空间连接系统的分布式状态估计及其收敛性分析

梁化勇¹ 周彤¹

摘要 针对一类一维空间连接系统, 本文提出了一种分布式递推状态估计算法, 给出了其收敛的充要条件. 与集总式 Kalman 滤波算法相比, 该算法可大幅度降低计算的时间复杂度和内存占用量, 并具有可简单地实现并行计算的特点. 这一算法还可直接推广到多维空间连接系统. 数值仿真结果表明, 该算法通常只牺牲少量的滤波精度.

关键词 空间连接系统, 分布式状态估计, Kalman 滤波
中图分类号 TP13

Distributed State Estimation for Spatially Interconnected Systems and Its Convergence Analysis

LIANG Hua-Yong¹ ZHOU Tong¹

Abstract A procedure is suggested in this paper for state estimation of one-dimensional spatially interconnected systems. Convergence properties of the algorithm are studied and some necessary and sufficient conditions are obtained. Compared with the lumped Kalman filter, the suggested procedure greatly reduces both time complexity and memory requirements. In addition, this distributed state estimator can be realized through parallel computations and directly extended to multi-dimensional spatially interconnected systems. Numerical experiment results show that this estimator usually does not sacrifice estimation accuracy very much.

Key words spatially interconnected systems, distributed state estimation, Kalman filter

现实生活中很多系统是由许多子系统相互连接而成的, 例如自动高速公路系统 [1], 飞机编队飞行系统 [2], 车辆协调控制系统 [3], 造纸过程中的交互控制系统 [4], 等等. 虽然这些子系统可能特性相似, 彼此之间的连接也比较简单, 但是由它们组成的大系统却可能具有非常复杂而丰富的特性. 随着信息化和网络化技术的发展, 此类系统越来越广泛地得到研究人员的关注. 文 [5] 将此类系统称为“空间连接系统”(Spatially Interconnected Systems). 文 [6][7][8][9][10] 研究了此类系统的分布式控制问题, 文 [11][12] 研究了此类系统的稳定性问题. 但是, 对于此类系统滤波问题的研究还比较少见. 一般的方法是用一个高维的状态空间模型对系统进行描述, 从而应用 Kalman 滤波算法. 此种方法被称为集总式 Kalman 滤波. 集总式 Kalman 滤波在一定条件下可以得到系统状态的最优估计. 但是随着子系统个数的增加, 系统状态个数随之增加, 造成集总式 Kalman 滤波的计算复杂度急剧增大. 这种处理方式对计算机的计算速度和精度以及存储容量都会带

来很苛刻的要求, 故不十分有利于工业上的应用. 因此针对多维空间分布系统分布式滤波的研究逐渐成为学术研究的热点.

针对空间连接系统滤波的研究多采用 Roesser 模型和 FM 模型. 具体而言, 文 [13] 针对 2-D FM 模型提出了一种 2-D Kalman 滤波算法, 该算法采用同时递推单点的估计误差协方差阵和相邻两点的互协方差阵的方法来减小计算量, 但文中没有给出算法的收敛性证明; 文 [14] 将 1-D 系统中的状态估计结果推广至 m-D Roesser 模型中, 所得滤波器以牺牲滤波性能为代价来保持因果性; 文 [15] 分别给出了基于观测器结构和一般形式的 2-D Roesser 模型 H_∞ 滤波器, 前者适用于稳定和不稳定的 2-D 系统, 而后者仅适用于稳定的 2-D 系统. 这些模型不能很好地反映空间连接系统子系统之间的双向影响, 具有一定的局限性. 而本文所研究的 Andrea 模型可以比较直观的反映子系统之间的物理连接. 但是针对 Andrea 模型的分布式滤波的研究, 目前还没有发现比较有意义的研究成果.

本文针对 Andrea 模型所提分布式算法虽然在估计精度上稍逊于最优的集总式 Kalman 滤波, 但是可以大幅度提高计算效率, 而且可以实现并行计算, 具有很好的空间可扩展性. 同时本算法及其理论结果可以比较容易地推广到多维空间连接系统.

本文其余部分结构如下. 第 1 节介绍了本文研究的系统模型, 该模型是在文献 [5] 的基础上得到

收稿日期 XXXX-XX-XX 收修改稿日期 XXXX-XX-XX
Received Month Date, Year; in revised form Month Date, Year
国家自然科学基金 (60574008, 60625305, 60721003), 973 计划 (2009CB320602) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60574008, 60625305, 60721003), 973 program (2009CB320602)
1. 清华大学自动化系 北京 100080
1. Department of Automatic Qinghua University beijing 100084 China
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.xxxxx

的. 第 2 节推导出了分布式状态估计算法, 并对该算法的收敛性和计算复杂度做了理论上的证明. 第 3 部分是数值仿真实验, 主要从滤波精度和计算复杂度两个方面对分布式滤波和集总式 Kalman 滤波进行了比较. 最后给出了本文的总结.

本文采用以下记号. $[X]_i$ 表示把矩阵 X 按指定的行数划分后的第 i 个子矩阵; $[X]_{ij}$ 表示把矩阵 X 按指定的行数和列数划分成四个子矩阵, 取其中第 i 个行块和第 j 个列块的重叠部分构成的子矩阵, $i, j = 1, 2$; $\text{col}(\mathbf{x}_i|_{i=1}^l)$ 表示将向量/矩阵 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_l$ 按从上到下的顺序叠置后构成的向量/矩阵; $\text{diag}(Z_i|_{i=1}^l)$ 表示由矩阵 Z_1, Z_2, \dots, Z_l 构成的分块对角阵; $\mathbf{E}(\cdot)$ 表示对随机变量求数学期望. 其它记号都是标准记号, 不再在此详述.

1 问题描述

考虑图 1a 所示的一维空间连接系统, 其单个子系统如图 1b 所示.

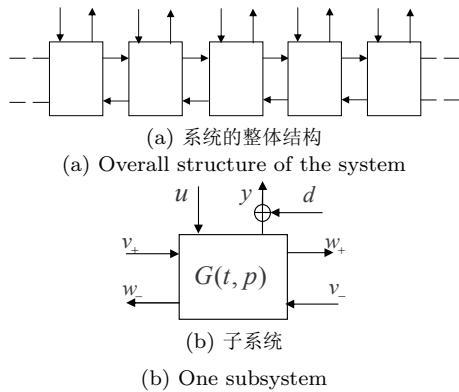


图 1 一维空间连接系统

Fig. 1 A system with one spatial dimension

文 [5] 给出了单个子系统的状态空间模型,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t+1, p) &= A_{TT}(t, p) \mathbf{x}(t, p) + A_{TP}(t, p) \mathbf{v}(t, p) \\
 &\quad + B_T(t, p) \mathbf{u}(t, p) \\
 \mathbf{w}(t, p) &= A_{PT}(t, p) \mathbf{x}(t, p) + A_{PP}(t, p) \mathbf{v}(t, p) \\
 &\quad + B_P(t, p) \mathbf{u}(t, p) \\
 \mathbf{y}(t, p) &= C_T(t, p) \mathbf{x}(t, p) + C_P(t, p) \mathbf{v}(t, p) \\
 &\quad + D(t, p) \mathbf{u}(t, p) + \mathbf{d}(t, p) \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中 $t \geq 0$ 表示时间, $p \geq 1$ 且 $p \in \mathbb{Z}$ 表示子系统在一维空间上的编号. A 矩阵的不同下标主要用于区分时间域和空间域. 具体而言, TT 表示子系统前一时刻的状态对其当前时刻状态的影响; TP 表示子系统输入连接变量对其当前时刻状态的影响; PT 表示子系统当前时刻状态对其输出连接变量的影响; PP 表示子系统输入连接变量对其输出连接

变量的影响. 矩阵 B 和 C 的下标具有类似的物理含义. $\mathbf{u}(t, p)$ 和 $\mathbf{d}(t, p)$ 分别是均值为零协方差阵为 $Q(t, p)$ 和 $R(t, p)$ 的高斯白噪声向量, 代表子系统的外部输入和测量误差, 其维数分别设为 m 和 q . $\mathbf{x}(0, p)$ 是均值为零协方差阵为 $\Pi(0, p)$ 的高斯向量, 其维数为 n , 表示子系统的初始状态. $\mathbf{u}(t, p)$ 、 $\mathbf{d}(t, p)$ 和 $\mathbf{x}(0, p)$ 彼此相互独立. 另外,

$$\mathbf{v}(t, p) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_+(t, p) \\ \mathbf{v}_-(t, p) \end{bmatrix}, \mathbf{w}(t, p) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(t, p) \\ \mathbf{w}_-(t, p) \end{bmatrix}$$

代表系统的“内部”输入、输出向量, 也即相邻子系统之间的连接变量. 从图 1 所描述的相邻子系统之间的物理连接可知,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_+(t, p+1) &= \mathbf{w}_+(t, p), \mathbf{v}_-(t, p) = \mathbf{w}_-(t, p+1) \\
 1 \leq p &\leq p_m - 1 \quad (2)
 \end{aligned}$$

这里 p_m 表示子系统的个数.

相对于文 [5] 来说, 本文所采用的模型除了允许每个子系统的参数是时间和空间的函数外, 其子系统个数有限而且每个子系统可以有不同的输入输出维数. 从实际应用的角度看, 这种模型更具有一般性. 所以本文研究的模型除了满足方程 (2) 的连接关系外, 还必须满足边界条件,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_+(t, 1) &\equiv 0, & \mathbf{v}_-(t, p_m) &\equiv 0 \\
 \mathbf{w}_-(t, 1) &\equiv 0, & \mathbf{w}_+(t, p_m) &\equiv 0 \quad (3)
 \end{aligned}$$

针对上述系统, 本文研究如何根据每个子系统的输出测量值 $\{\mathbf{y}(k, p) |_{k=0}^t, t \geq 0, 1 \leq p \leq p_m\}$ 对其状态 $\{\mathbf{x}(t, p), t \geq 0, 1 \leq p \leq p_m\}$ 进行估计.

2 分布式滤波

2.1 算法推导

由方程 (1) 可知, 在 $\mathbf{v}(t-1, p)$ 已知时, 第 p 个子系统的状态估计可以由标准 Kalman 滤波器给出; 而在 $\mathbf{x}(t, p)$ 和 $\mathbf{u}(t, p)$ 已知时, 根据 $\mathbf{w}(t, p)$ 和 $\mathbf{v}(t, p)$ 的关系可以直接计算出 $\mathbf{v}(t, p)$. 基于这一发现, 本文提出一种由一步 Kalman 滤波和一步迭代算法构成的空间连接系统的分布式状态估计方法, 其计算顺序如下式所示.

$$\begin{aligned}
 \dots &\rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}^w(t-1|t-1, p) \\ \hat{\mathbf{u}}^w(t-1|t-1, p) \end{cases} \rightarrow \hat{\mathbf{v}}(t-1, p) \\
 &\rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}^w(t|t, p) \\ \hat{\mathbf{u}}^w(t|t, p) \end{cases} \rightarrow \hat{\mathbf{v}}(t, p) \rightarrow \dots
 \end{aligned}$$

下面具体叙述上述状态估计算法的每个步骤.

2.1.1 由 $\hat{\boldsymbol{x}}^w(t-1|t-1, p)$ 、 $\hat{\boldsymbol{u}}^w(t-1|t-1, p)$ 和 $\hat{\boldsymbol{v}}(t-1, p)$ 求 $\hat{\boldsymbol{x}}^w(t|t, p)$ 和 $\hat{\boldsymbol{u}}^w(t|t, p)$

设一维空间连接系统的子系统个数满足 $3 \leq p_m < \infty$, 且其第 p 个子系统的输出量测向量 $\boldsymbol{y}(t, p)$ 的维数大于子系统之间的连接向量 $\boldsymbol{v}(t, p)$ 的维数. 一般的工程问题通常满足这一要求. 把 $C_p(t, p)$ 按照列数由上到下划分成若干方阵. 如果最后几行不能组成方阵, 可以从已划分的方阵 $[C_p(t, p)]_i$, $1 \leq i < l$, 中抽出相应数量的行构成最后一个方阵 $[C_p(t, p)]_l$. 具体如下式所示.

$$C_P(t, p) = \text{col}([C_P(t, p)]_i |_{i=1}^l)$$

这样式 (1) 中的输出方程可以重写为,

$$[\boldsymbol{y}(t, p)]_i = [C_T(t, p)]_i \boldsymbol{x}(t, p) + [C_P(t, p)]_i \boldsymbol{v}(t, p) + [D(t, p)]_i \boldsymbol{u}(t, p) + [\boldsymbol{d}(t, p)]_i, \quad 1 \leq i \leq l \quad (4)$$

设矩阵 $[C_P(t, p)]_i$, $1 \leq i \leq l$, 可逆¹ 则当 $2 \leq p \leq p_m - 1$ 时, 由式 (4) 可得,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t, p) &= ([C_P(t, p)]_i)^{-1} [\boldsymbol{y}(t, p)]_i \\ &\quad - ([C_P(t, p)]_i)^{-1} [C_T(t, p)]_i \boldsymbol{x}(t, p) \\ &\quad - ([C_P(t, p)]_i)^{-1} [D(t, p)]_i \boldsymbol{u}(t, p) \\ &\quad - ([C_P(t, p)]_i)^{-1} [\boldsymbol{d}(t, p)]_i \end{aligned} \quad (5)$$

将此关系代入方程 (1) 中关于 $w(t, p)$ 的等式, 可进一步得到如下关系.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}(t, p) &= A_{PP}(t, p) ([C_P(t, p)]_i)^{-1} [\boldsymbol{y}(t, p)]_i \\ &\quad + (A_{PT}(t, p) - A_{PP}(t, p) ([C_P(t, p)]_i)^{-1} \\ &\quad \times [C_T(t, p)]_i) \boldsymbol{x}(t, p) + (B_P(t, p) - A_{PP}(t, p) \\ &\quad \times ([C_P(t, p)]_i)^{-1} [D(t, p)]_i) \boldsymbol{u}(t, p) - A_{PP}(t, p) \\ &\quad \times ([C_P(t, p)]_i)^{-1} [\boldsymbol{d}(t, p)]_i \end{aligned} \quad (6)$$

依据 $\boldsymbol{w}_+(t, p)$ 和 $\boldsymbol{w}_-(t, p)$ 的维数将 $A_{pp}(t, p)$ 做如下分解,

$$A_{PP}(t, p) = \text{col}([A_{PP}(t, p)]_1, [A_{PP}(t, p)]_2)$$

由式 (5) 和式 (6) 可以求得 $\boldsymbol{v}_+(t, p)$ 、 $\boldsymbol{v}_-(t, p)$ 、 $\boldsymbol{w}_+(t, p)$ 和 $\boldsymbol{w}_-(t, p)$. 将 $\boldsymbol{v}_+(t, p)$ 和 $\boldsymbol{w}_-(t, p)$ 的表达式中的 p 用 $p+1$ 代替, 可以得到 $\boldsymbol{v}_+(t, p+1)$ 和 $\boldsymbol{w}_-(t, p+1)$. 将 $\boldsymbol{v}_+(t, p+1)$ 、 $\boldsymbol{w}_+(t, p)$ 、 $\boldsymbol{v}_-(t, p)$ 和 $\boldsymbol{w}_-(t, p+1)$ 代入式 (2) 的两个等式中, 可以消去输出方程中的

连接变量, 从而得到当 $2 \leq p \leq p_m - 1$ 时与式 (1) 等价的系统方程为,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t+1, p, p+1) &= A(t, p, p+1) \boldsymbol{x}(t, p, p+1) \\ &\quad + B(t, p, p+1) \boldsymbol{u}(t, p, p+1) \\ &\quad + E(t, p, p+1) \boldsymbol{v}(t, p, p+1) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(t, p, p+1) &= C(t, p, p+1) \boldsymbol{x}(t, p, p+1) \\ &\quad + D(t, p, p+1) \boldsymbol{u}(t, p, p+1) \\ &\quad + F(t, p, p+1) \boldsymbol{d}(t, p, p+1) \end{aligned} \quad (8)$$

其中,

$$F = \text{diag} \left(\left[\begin{array}{cc} F_{1i} & F_{2i} \\ F_{3i} & F_{4i} \end{array} \right]_{i=1}^l \right)$$

$$F_{1i} = -[A_{PP}(t, p)]_1 ([C_P(t, p)]_i)^{-1}$$

$$F_{2i} = \left[([C_P(t, p+1)]_i)^{-1} \right]_1$$

$$F_{3i} = \left[([C_P(t, p)]_i)^{-1} \right]_2$$

$$F_{4i} = -[A_{PP}(t, p+1)]_2 ([C_P(t, p+1)]_i)^{-1}$$

$$\boldsymbol{y}(t, p, p+1) = F \text{col}(\text{col}([\boldsymbol{y}(t, p)]_i, [\boldsymbol{y}(t, p+1)]_i) |_{i=1}^l)$$

$$\boldsymbol{x}(t, p, p+1) = \text{col}(\boldsymbol{x}(t, p), \boldsymbol{x}(t, p+1))$$

$$\boldsymbol{v}(t, p, p+1) = \text{col}(\boldsymbol{v}(t, p), \boldsymbol{v}(t, p+1))$$

$$\boldsymbol{d}(t, p, p+1) = \text{col}(\text{col}([\boldsymbol{d}(t, p)]_i, [\boldsymbol{d}(t, p+1)]_i) |_{i=1}^l)$$

$$\boldsymbol{u}(t, p, p+1) = \text{col}(\boldsymbol{u}(t, p), \boldsymbol{u}(t, p+1))$$

$$C(t, p, p+1) = \text{col} \left(\left[\begin{array}{cc} C_{1i} & C_{2i} \\ C_{3i} & C_{4i} \end{array} \right]_{i=1}^l \right)$$

$$D(t, p, p+1) = \text{col} \left(\left[\begin{array}{cc} D_{1i} & D_{2i} \\ D_{3i} & D_{4i} \end{array} \right]_{i=1}^l \right)$$

$$C_{1i} = [A_{PT}(t, p)]_1$$

$$- [A_{PP}(t, p)]_1 ([C_P(t, p)]_i)^{-1} [C_T(t, p)]_i$$

$$C_{2i} = \left[([C_P(t, p+1)]_i)^{-1} \right]_1 [C_T(t, p+1)]_i$$

$$C_{3i} = \left[([C_P(t, p)]_i)^{-1} \right]_2 [C_T(t, p)]_i$$

$$C_{4i} = [A_{PT}(t, p+1)]_2 - [A_{PP}(t, p+1)]_2$$

$$\times ([C_P(t, p+1)]_i)^{-1} [C_T(t, p+1)]_i$$

$$D_{1i} = [B_P(t, p)]_1$$

$$- [A_{PP}(t, p)]_1 ([C_P(t, p)]_i)^{-1} [D(t, p)]_i$$

$$D_{2i} = \left[([C_P(t, p+1)]_i)^{-1} \right]_1 [D(t, p+1)]_i$$

$$D_{3i} = \left[([C_P(t, p)]_i)^{-1} \right]_2 [D(t, p)]_i$$

¹本文结论可直接推广到 $[C_P(t, p)]_i$ 右可逆的情形. 如果该条件不能得到满足, 则满足式 (4) 的 $\boldsymbol{v}(t, p)$ 可能不存在, 也可能存在但不唯一. 该情形需要做进一步的研究.

$$\begin{aligned}
D_{4i} &= [B_P(t, p+1)]_2 - [A_{PP}(t, p+1)]_2 \\
&\times ([C_P(t, p+1)]_i)^{-1} [D(t, p+1)]_i \\
A(t, p, p+1) &= \text{diag}(A_{TT}(t, p), A_{TT}(t, p+1)) \\
B(t, p, p+1) &= \text{diag}(B_T(t, p), B_T(t, p+1)) \\
E(t, p, p+1) &= \text{diag}(A_{TP}(t, p), A_{TP}(t, p+1))
\end{aligned}$$

基于同样的代数运算, 当 $p=1$ 和 $p=p_m$ 时, 可以得到与式 (7) 和 (8) 类似的状态空间模型。

值得注意的是, 式 (1) 描述的是单个子系统的输入输出关系, 而式 (7) 和 (8) 描述的是前后相连的两个子系统的输入输出关系。

对于式 (7) 和 (8) 来说, 如果 $\mathbf{v}(t-1, p, p+1)$ 的值由估计值 $\hat{\mathbf{v}}(t-1, p, p+1)$ 代替, 则可以应用标准 Kalman 滤波得到状态 $\mathbf{x}(t, p, p+1)$ 和输入 $\mathbf{u}(t, p, p+1)$ 的估计值。

需要注意的是, 对于第 p ($2 \leq p \leq p_m - 1$) 个子系统来说, 它既可以和第 $p-1$ 个子系统组合, 得到其状态估计值 $[\hat{\mathbf{x}}(t|t, p-1, p)]_2$ 及其估计误差协方差阵 $[P(t|t, p-1, p)]_{22}$, 又可以和第 $p+1$ 个子系统组合, 得到其状态估计值 $[\hat{\mathbf{x}}(t|t, p, p+1)]_1$ 及其估计误差协方差阵 $[P(t|t, p, p+1)]_{11}$. 为提高状态估计精度, $\hat{\mathbf{x}}^w(t|t, p)$ 和 $\hat{\mathbf{u}}^w(t|t, p)$ 可按下式计算。

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}^w(t|t, p) &= (([P(t|t, p-1, p)]_{22})^{-1} \\
&+ ([P(t|t, p, p+1)]_{11})^{-1})^{-1} \\
&\times (([P(t|t, p-1, p)]_{22})^{-1} [\hat{\mathbf{x}}(t|t, p-1, p)]_2 \\
&+ ([P(t|t, p, p+1)]_{11})^{-1} [\hat{\mathbf{x}}(t|t, p, p+1)]_1) \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{u}}^w(t|t, p) &= (([P_u(t|t, p-1, p)]_{22})^{-1} \\
&+ ([P_u(t|t, p, p+1)]_{11})^{-1})^{-1} \\
&\times (([P_u(t|t, p-1, p)]_{22})^{-1} [\hat{\mathbf{u}}(t|t, p-1, p)]_2 \\
&+ ([P_u(t|t, p, p+1)]_{11})^{-1} [\hat{\mathbf{u}}(t|t, p, p+1)]_1) \quad (10)
\end{aligned}$$

2.1.2 由 $\hat{\mathbf{x}}^w(t|t, p)$ 和 $\hat{\mathbf{u}}^w(t|t, p)$ 求 $\hat{\mathbf{v}}(t, p)$

定义向量 $\mathbf{z}(t, p)$ 、 $\mathbf{z}_+(t, p)$ 和 $\mathbf{z}_-(t, p)$ 如下,

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}(t, p) &= \text{col}(\mathbf{z}_+(t, p), \mathbf{z}_-(t, p)) \\
&= A_{PT}(t, p) \mathbf{x}(t, p) + B_P(t, p) \mathbf{u}(t, p)
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{z}_+(t, p)$ 和 $\mathbf{z}_-(t, p)$ 分别与 $\mathbf{w}_+(t, p)$ 和 $\mathbf{w}_-(t, p)$ 具有相同的维数。根据 $\mathbf{z}_+(t, p)$ 和 $\mathbf{z}_-(t, p)$ 的维数, 将 $A_{PP}(t, p)$ 做如下分解。

$$A_{PP}(t, p) = \begin{bmatrix} [A_{PP}(t, p)]_{11} & [A_{PP}(t, p)]_{12} \\ [A_{PP}(t, p)]_{21} & [A_{PP}(t, p)]_{22} \end{bmatrix}$$

当 $2 \leq p \leq p_m - 1$ 时, 假设 $[A_{PP}(t, p)]_{22}$ 可逆², 则由式 (1) 的第二个方程所描述的 $\mathbf{v}(t, p)$ 和

²本文结论可以推广至 $[A_{PP}(t, p)]_{22}$ 不可逆的情形。这一假设主要是为了叙述简洁。

$\mathbf{w}(t, p)$ 的关系可得,

$$\begin{aligned}
\text{col}(\mathbf{w}_+(t, p-1), \mathbf{v}_-(t, p)) &= \\
&\begin{bmatrix} I & 0 \\ -([A_{PP}(t, p)]_{22})^{-1} [A_{PP}(t, p)]_{21} & ([A_{PP}(t, p)]_{22})^{-1} \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(t, p-1) \\ \mathbf{v}_-(t, p-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -([A_{PP}(t, p)]_{22})^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{z}_-(t, p) \quad (11)
\end{aligned}$$

$\text{col}(\mathbf{w}_+(t, p), \mathbf{v}_-(t, p)) =$

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} [A_{PP}(t, p)]_{11} & [A_{PP}(t, p)]_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(t, p-1) \\ \mathbf{v}_-(t, p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_+(t, p) \\ \mathbf{z}_-(t, p) \end{bmatrix} \quad (12)
\end{aligned}$$

把式 (11) 代入式 (12) 可得,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(t, p) \\ \mathbf{v}_-(t, p) \end{bmatrix} = \Phi(t, p, p-1) \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(t, p-1) \\ \mathbf{v}_-(t, p-1) \end{bmatrix} + \Gamma(t, p, p-1) \mathbf{z}(t, p) \quad (13)$$

其中,

$$\Phi(t, p, p-1) = \begin{bmatrix} \Phi_1(t, p, p-1) & \Phi_2(t, p, p-1) \\ \Phi_3(t, p, p-1) & \Phi_4(t, p, p-1) \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1(t, p, p-1) = [A_{PP}(t, p)]_{11}$$

$$\Phi_2(t, p, p-1) = [A_{PP}(t, p)]_{12} ([A_{PP}(t, p)]_{22})^{-1}$$

$$\Phi_3(t, p, p-1) = -([A_{PP}(t, p)]_{22})^{-1} [A_{PP}(t, p)]_{21}$$

$$\Phi_4(t, p, p-1) = ([A_{PP}(t, p)]_{22})^{-1}$$

$$\Gamma(t, p, p-1) = \begin{bmatrix} I & \Gamma_1(t, p, p-1) \\ 0 & \Gamma_2(t, p, p-1) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1(t, p, p-1) = -[A_{PP}(t, p)]_{12} ([A_{PP}(t, p)]_{22})^{-1}$$

$$\Gamma_2(t, p, p-1) = -([A_{PP}(t, p)]_{22})^{-1}$$

这样就实现了 $\text{col}(\mathbf{w}_+(t, p), \mathbf{v}_-(t, p))$ 在空间上的递推。

对于第一个和最后一个子系统, 根据式 (3) 所描述的边界条件, 分别有以下关系。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(t, 1) \\ \mathbf{v}_-(t, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{PP}(t, p) \\ I \end{bmatrix} \mathbf{v}_-(t, 1) + \text{col}(I, 0) \mathbf{z}(t, 1) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{PP}(t, p_m) & -I \end{bmatrix} \\ & \times \text{col}(\mathbf{w}_+(t, p_m - 1), \mathbf{v}_-(t, p_m - 1)) \\ & + \mathbf{z}(t, p_m) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

定义 $\Phi(t, 1, 0)$ 和 $\Gamma(t, 1, 0)$ 分别为,

$$\Phi(t, 1, 0) = \begin{bmatrix} A_{PP}(t, 1) \\ I \end{bmatrix}, \Gamma(t, 1, 0) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

则由递推式 (13) 和 (14) 可得,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(t, p_m - 1) \\ \mathbf{v}_-(t, p_m - 1) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{p_m-1} \Phi(t, p_m - 1, j) \\ & \Gamma(t, j) \mathbf{z}(t, j) + \Phi(t, p_m - 1, 0) \mathbf{v}_-(t, 1) \end{aligned} \quad (16)$$

这里 $\Phi(t, p_m - 1, p_m - 1) = I$, $\Phi(t, p_m - 1, j) = \prod_{k=2}^{p_m-j} \Phi(t, p_m - k + 1, p_m - k)$, $0 \leq j \leq p_m - 2$. 把式 (16) 代入式 (15) 可得,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_-(t, 1) = & - \left(\begin{bmatrix} A_{PP}(t, p_m) & -I \end{bmatrix} \right. \\ & \times \Phi(t, p_m - 1, 0)^{-1} \left(\begin{bmatrix} A_{PP}(t, p_m) & -I \end{bmatrix} \right. \\ & \left. \left. \sum_{j=1}^{p_m-1} \Phi(t, p_m - 1, j) \Gamma(t, j) \mathbf{z}(t, j) + \mathbf{z}(t, p_m) \right) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

由式 (17) 求得 $\mathbf{v}_-(t, 1)$ 后, 可以通过式 (13) 和式 (14) 求得 $\mathbf{v}(t, p)$, $1 \leq p \leq p_m$. 如果 $\mathbf{x}(t, p)$ 和 $\mathbf{u}(t, p)$ 分别由其估计值 $\hat{\mathbf{x}}^w(t|t, p)$ 和 $\hat{\mathbf{u}}^w(t|t, p)$ 代替, 则可得到 $\mathbf{v}(t, p)$ 的估计值 $\hat{\mathbf{v}}(t, p)$.

2.2 收敛性和计算复杂度分析

虽然上述状态估计方法是分布式的, 但在分析其收敛性时, 我们将其转化为等价的集总式状态估计形式. 借助于集总式算法收敛性分析的结果, 可以得到本文算法收敛的一个充要条件. 具体表述如下.

定理 1. 在 $1 \leq p \leq p_m - 1$ 时, 定义矩阵 $R_1(t, p, p + 1)$ 、 $A^s(t, p, p + 1)$ 、 $Q^s(t, p, p + 1)$ 、 $M(P(t|t - 1))$

和 $N(P(t|t - 1))$ 分别为,

$$\begin{aligned} R_1(t, p, p + 1) = & F(t, p, p + 1)R(t, p, p + 1)F^T(t, p, p + 1) \\ & + D(t, p, p + 1)Q(t, p, p + 1)D^T(t, p, p + 1) \\ A^s(t, p, p + 1) = & A(t, p, p + 1) - B(t, p, p + 1) \\ & \times Q(t, p, p + 1)D^T(t, p, p + 1) \\ & \times R_1^{-1}(t, p, p + 1)C(t, p, p + 1) \\ Q^s(t, p, p + 1) = & Q(t, p, p + 1) - Q(t, p, p + 1) \\ & \times D^T(t, p, p + 1)R_1^{-1}(t, p, p + 1) \\ & \times D(t, p, p + 1)Q^T(t, p, p + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(P(t|t - 1)) = & (A(t) + E(t)H_1(t))E_5 \\ & \left((E_1P_1(t)E_1^T)^{-1} + (E_2P_2(t)E_2^T)^{-1} \right)^{-1} \\ & \times \left((E_1P_1(t)E_1^T)^{-1}E_3 + (E_1P_1(t)E_1^T)^{-1}E_4 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} N(P(t|t - 1)) = & (A(t) + E(t)H_1(t))E_5 \\ & \left((E_1P_1(t)E_1^T)^{-1} + (E_2P_2(t)E_2^T)^{-1} \right)^{-1} \\ & \times \left((E_1P_1(t)E_1^T)^{-1}E_3 + (E_1P_1(t)E_1^T)^{-1}E_4 \right) \\ & \times K_f(t) + (B(t) + E(t)H_2(t))E_5 \\ & \left((E_1P_{u,1}(t)E_1^T)^{-1} + (E_2P_{u,2}(t)E_2^T)^{-1} \right)^{-1} \\ & \times \left((E_1P_{u,1}(t)E_1^T)^{-1}E_3 + (E_1P_{u,1}(t)E_1^T)^{-1}E_4 \right) \\ & \times Q(t)D(t)R_e^{-1}(t) \end{aligned} \quad (19)$$

假设式 (1) 中的参数不依赖于时间, 则 2.1 节所描述的分分布式状态估计算法是收敛的, 当且仅当以下条件都得到满足.

(1) 矩阵对 $\{A(t, p, p + 1), C(t, p, p + 1)\}$, $1 \leq p \leq p_m - 1$, 是可检测的;

(2) 矩阵对 $\{A^s(t, p, p + 1), B(t, p, p + 1)(Q^s(t, p, p + 1))^{\frac{1}{2}}\}$, $1 \leq p \leq p_m - 1$, 是可镇定的; 并且如果 $A^s(t, p, p + 1)$ 存在单位圆上的特征根时, 此矩阵对对于该特征根是可控的;

(3) $M(P(t|t - 1)) - N(P(t|t - 1))C(t)$ 是稳定的.

其中 $C(t)$ 的定义参见式 (A.10); $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $D(t)$ 、 $E(t)$ 、 $F(t)$ 、 $Q(t)$ 和 $R(t)$ 在附录 A 中也做了相应的定义, 具体形式与 $C(t)$ 类似; $H_1(t)$ 和 $H_2(t)$ 的定义参见式 (A.33); $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 的定义参见式 (A.14) 和 (A.15); $P_{u,1}(t)$ 和 $P_{u,2}(t)$ 的定义参见式 (A.22) 和 (A.23); $K_f(t)$ 和 $R_e(t)$ 的定义参见式 (A.11); E_1 、 E_2 、 E_3 、 E_4 和 E_5

的定义分别参见式 (A.16)、(A.17)、(A.18)、(A.19) 和 (A.25).

证明: 见附录 A.

下面, 我们分析上述状态估计算法的计算复杂度, 并与集总式 Kalman 滤波进行比较. 根据问题的描述可知每个子系统的维数都是 n , 输入维数为 m . 根据子系统个数为 p_m 的假设可知, 整体系统可以用一个高维的状态空间方程来描述, 其状态维数为 np_m . 注意到 Kalman 滤波的计算复杂度主要取决于估计误差方差阵的求逆运算. 若对此系统运用集总式 Kalman 滤波进行状态估计, 则计算复杂度为 $O((np_m)^a)$, 其中 a 根据已有的不同的矩阵求逆算法取 2 到 3 之间的一个值.

在本文所提分布式状态估计算法中, 相邻两子系统用一个状态空间方程来描述, 状态维数为 $2n$. 此分布式算法包括 Kalman 滤波算法和迭代算法两部分. 分布式 Kalman 滤波需要计算 $p_m - 1$ 次, 总体计算复杂度为 $O(n^a) \times (p_m - 1)$, 其中 a 的取值同集总式 Kalman 滤波. 迭代算法需要计算 $v(t, p)$. 设 $v(t, p)$ 维数为 s . 迭代算法的计算复杂度主要取决于式 (13)、(14)、(16) 和 (17) 的计算. 其中式 (13) 和 (14) 的计算复杂度为 $O(p_m s^2)$; 式 (16) 需要求得 $\Phi(t, p_m - 1, j), 0 \leq i \leq p_m - 2$, 其计算复杂度为 $O((p_m - 1)s^3)$; 式 (17) 的计算复杂度为 $O((p_m - 1)s(s + m + n) + s^3)$. 综合考虑以上因素可知, 该迭代算法的计算复杂度为,

$$O(p_m s^2) + O((p_m - 1)s(s + m + n) + s^3) + O((p_m - 1)s^3) = O(p_m s(s^2 + m + n))$$

由此可知, 分布式滤波总体计算复杂度为 $O((p_m - 1)n^a) + O(p_m s(s^2 + m + n))$.

综上所述, 集总式 Kalman 滤波算法的计算复杂度随着 p_m 的增加以 p_m^a 的速度增加, 而分布式滤波算法的计算复杂度随着 p_m 的增加而线性增加. 这一分析结果将在下一节的数值仿真中得到验证.

对两种算法的内存占用量, 我们也可做类似的理论分析, 并得到类似的结果. 由于篇幅关系, 在此不再详述.

3 仿真实验

为了考察本文算法的状态估计性能, 我们将其与集总式 Kalman 滤波进行比较. 利用计算机群, 我们随机选择了 400 个不同的仿真例进行了数值仿真实验. 本节选择了其中比较典型的一例仿真实验进行说明. 主要讨论两方面, 一是状态估计精度; 二是计算复杂度. 所用系统模型的参数矩阵如下.

$$A_{TT}(t, p) = \text{diag}\left(\frac{p}{p+2}, -\frac{p+1}{p+4}, -\frac{p+1}{p+7}, \frac{2p-1}{2p+2}\right)$$

$$B_T(t, p) = \frac{6}{p+4} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \\ -5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_{PT}(t, p) = \frac{1}{5p+5} \begin{bmatrix} 10 & -4 & 12 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & -10 \end{bmatrix}$$

$$A_{PP}(t, p) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -13 \end{bmatrix}$$

$$B_P(t, p) = k \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$C_T(t, p) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 & 5 \\ 3 & -8 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C_P(t, p) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A_{TP}(t, p) = \frac{1}{5p+15} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 6 \\ 2 & -3 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$D(t, p) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$u(t, p)$ 和 $d(t, p)$ 都假设是方差为 1 的白噪声, 而 k 是一个待选参数. 这一设定可使我们探讨外部干扰强度对状态估计精度的影响. 本节所报告的结果是 k 分别取值 0.1 和 0.5 时的数值仿真结果.

本节所报告的数值仿真实验采用以下设置. 仿真时间: $T = 1000$; 独立实验次数: $Num = 500$; 子系统个数: $p_m = 200$. 另外, 状态估计精度的评价由系统总体滤波误差 $Terr(t)$ 和单个子系统的滤波误差 $Serr(t, p)$ 两个指标构成, 其定义分别为,

$$Terr(t) \triangleq \frac{1}{Num} \sum_{n=1}^{Num} \sum_{p=1}^{p_m} \|\hat{\mathbf{x}}(t, p) - \mathbf{x}(t, p)\|_2^2$$

$$Serr(t, p) \triangleq \frac{1}{Num} \sum_{n=1}^{Num} \|\hat{\mathbf{x}}(t, p) - \mathbf{x}(t, p)\|_2^2$$

在上述仿真实验设置下, 得到的仿真结果如图 2 和图 3 所示.

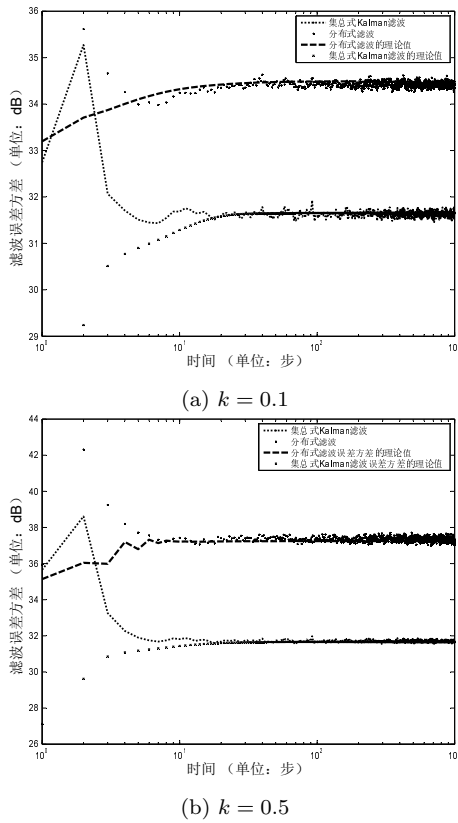


图2 总体滤波误差

Fig.2 Overall estimation error

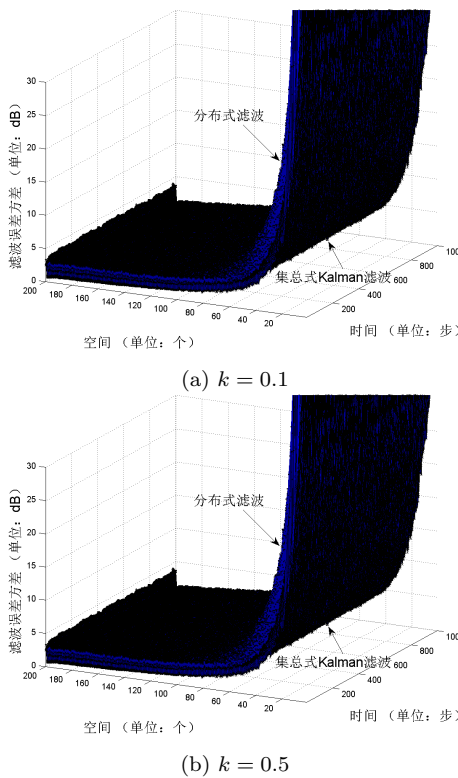


图3 单个子系统的滤波误差

Fig.3 Estimation error of a single subsystem

由图2和图3可以看出,在系统总体滤波误差和单个子系统的滤波误差两个指标上,分布式算法都要稍逊于集总式算法,但这种性能劣化不是很大.另外,这两种滤波算法在时间轴和空间轴上都有一个相似的渐近稳定的过程.同时,图2还表明,分布式滤波算法估计误差的理论值和 Monte Carlo 仿真的计算值有很好的 consistency. 这从另一个侧面验证了算法的正确性和仿真实验的合理性.

为了比较本文算法和 Kalman 滤波算法的计算速度,我们还做了如下的数值仿真实验. 即当 p_m 取 3 到 200 之间的整数值时,分别对系统进行分布式滤波和集总式 Kalman 滤波,并记录下两种滤波所占用的 CPU 时间. 实验结果如图4所示.

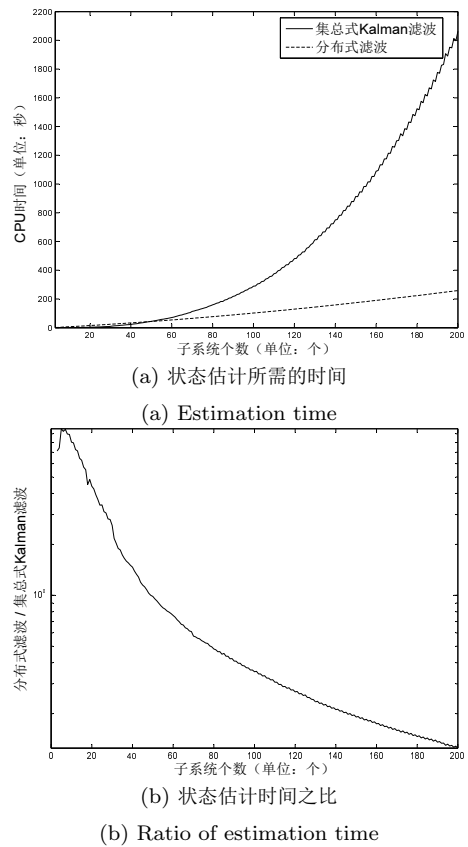


图4 分布式和集总式状态估计的计算效率比较

Fig.4 Comparison of computational efficiency

图4a给出了 p_m 从 3 到 200 变化时,分布式滤波和集总式 Kalman 滤波所用的 CPU 时间的变化,其结果与第 3.2 节中的理论结果吻合.

图4b描述的是 p_m 从 3 到 200 变化时,分布式滤波和集总式 Kalman 滤波所用的 CPU 时间之比. 由该图可以看出,当 p_m 较小时,集总式 Kalman 滤波计算效率较高. 但随着 p_m 的增加,两者的比值迅速下降. 这是因为当 p_m 较小时,系统的总状态个数较少,而此时分布式滤波要进行迭代运算,所以其计

算效率较低. 但当 p_m 增加到一定程度时, 集总式 Kalman 滤波中需进行高维矩阵运算的劣势就明显表现出来, 而分布式滤波中由于一般不会出现高维矩阵运算的情况, 故可以避免其影响, 所以其计算效率较高.

另外, 在子系统个数为 200 时, 集总式 Kalman 滤波需要的内存最低大约为 4MB, 而分布式滤波只需大约 96KB 即可. 由此可以看出, 本文所给出的分布式状态估计算法极大地降低了对计算机内存的要求, 使其具有良好的移植性.

4 总结

针对一类一维空间分布系统, 本文提出了一种分布式状态估计算法, 并得到了该算法收敛的一个充要条件. 与集总式 Kalman 滤波算法相比, 在子系统个数较多时, 该算法大幅度降低了计算复杂度和对数据存储容量的要求, 并能实现分布式计算, 而在估计精度上与最优估计相比并没有十分明显的损失.

本文所提算法可以推广到多维空间连接系统, 得到针对多维空间连接系统的状态估计算法. 该算法同样由一步 Kalman 滤波算法和一步迭代算法组成. 其中的 Kalman 滤波算法可以由本文所提的相应算法直接推广, 迭代算法可以转化为大型稀疏线性方程组的求解问题. 后一问题可以借助于已有的方法加以解决, 具体参见文献 [16]. 推广后的算法收敛性证明与本文算法没有实质性区别, 在此不再详述.

References

- 1 Raza H, Ioannou P. Vehicle following control design for automated highway systems. *IEEE Control Systems*, 1996, **16**(6): 43–60
- 2 Chichka D F, Speyer J L. Solar-powered formation-enhanced aerial vehicle system for sustained endurance. **In: Proceedings of the American Control Conference**. Philadelphia, USA: American Automatic Control Council, 1998. 684–688
- 3 Keviczky T, Borrelli F, Fregene K, Godbole D. Decentralized receding horizon control and coordination of autonomous vehicle formations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2008, **16**(1): 1063–6536
- 4 Stewart G E. Two-Dimensional Loop Shaping Controller Design for Paper Machine Cross-Directional Processes[Ph. D. Dissertation], Columbia University, 2000
- 5 Andrea R D, Dullerud G E. Distributed control design for spatially interconnected systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2003, **44**(9): 1478–1495
rd28@cornell.edu
- 6 Recht B, Andrea R D. Distributed control of systems over discrete groups. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1446–1452
- 7 Massioni P, Verhaegen M. Distributed control for identical dynamically coupled systems: a decomposition approach.

IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, **54**(1): 124–135

- 8 Massioni P, Verhaegen M. Distributed control: a sequentially semi-separable approach for spatially heterogeneous linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(6): 1270–1283
- 9 Chandra R S, Langbort C, Andrea R D. Distributed control design with robustness to small time delays. *Systems and Control Letters*, 2009, **58**(4): 296–303
- 10 Franco E, Magni L, Parisini T, Polycarpou M M, Raimondo D M. Cooperative constrained control of distributed agents with nonlinear dynamics and delayed information exchange: a stabilizing receding-horizon approach. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2008, **53**(1): 324–338
- 11 Chandra R S, Andrea R D. A scaled small gain theorem with applications to spatially interconnected systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(3): 465–469
- 12 Zhou T. On the stability of spatially distributed systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(10): 2385–2391
- 13 Zou Y, Sheng M, Zhong N F, Xu S Y. A generalized Kalman filter for 2-D discrete systems. **In: Proceedings of the 47th IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems**. New York, USA: IEEE, 2004. II–545–II–548.
- 14 Porter W A, Aravena J L. State estimation in discrete m-D systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, **31**(3): 280–283
- 15 Du C, Xie L. *H_∞ Control and Filtering of Two-Dimensional Systems*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2002
- 16 Wu Jian-Ping, Wang Zheng-Hua, Li Xiao-Mei. *Efficient Solving and Parallel Computing of Sparse Linear Equations*. Changsha: Hunan Science and Technology Press, 2004 (in chinese)
(吴建平, 王正华, 李晓梅. 稀疏线性方程组的高效求解与并行计算. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2004)
- 17 Kailath T, Sayed A H, Hassibi B. *Linear Estimation*. NJ: Prentice-Hall, 2000
sayed@ee.ucla.edu

梁化勇 清华大学自动化系博士研究生. 主要研究方向为多维系统中的鲁棒滤波. 本文通信作者.

E-mail: lianghy07@mails.tsinghua.edu.cn

(LIANG Hua-Yong Ph. D. candidate at Department of Automation, Tsinghua University. His main research interest is robust filtering in multidimensional systems. Corresponding author of this paper.)

周彤 分别于 1984 年和 1989 年在成都电子科技大学获得学士和硕士学位, 1994 年在日本大阪大学获得博士学位, 目前为清华大学自动化系教授. 主要研究方向为鲁棒控制, 系统辨识, 信号处理, 混合系统和通讯系统及其在实际中的应用.

E-mail: tzhou@mail.tsinghua.edu.cn

(ZHOU Tong Professor at Department of Automation, Tsinghua University. He received his bachelor and master degrees from University of Electronic Science and Technology of China in 1984 and 1989, respectively, and the Ph. D. degree from Osaka University, Osaka, Japan, in 1994. His research interest covers robust control, system identification, signal processing, hybrid systems, communication systems, and their applications to real-world problems.)

附录 A

在证明定理 1 之前先给出两个有用的引理. 设线性定常系统的状态空间模型为,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t+1) &= \Psi \boldsymbol{x}(t) + G\boldsymbol{\mu}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= H\boldsymbol{x}(t) + \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

其中 $\boldsymbol{\mu}(t)$ 和 $\varepsilon(t)$ 分别是均值为零协方差阵为 $Q(t)$ 和 $R(t)$ 的白噪声随机过程, 且二者是相关的, 互协方差矩阵为 $S(t)$. 对此模型可以应用标准 Kalman 滤波进行状态估计. 下面的引理 1 给出了 Kalman 滤波的收敛条件 [17]. 为此引入以下变量.

$$\Psi^s = \Psi - GSR^{-1}H, \quad Q^s = Q - SR^{-1}S^T$$

引理 1. 对式 (A.1) 所描述的模型, Kalman 滤波算法是收敛的, 当且仅当以下条件都得到满足.

- (1) 矩阵对 $\{\Psi, H\}$ 是可检测的;
- (2) 矩阵对 $\{\Psi^s, GQ^{s/2}\}$ 是可镇定的; 并且如果 Ψ^s 存在单位圆上的特征根时, 此矩阵对于该特征根是可控的.

引理 2. 考虑如下矩阵递推式

$$P_{i+1} = F^T P_i F + Q, \quad Q > 0 \quad (\text{A.2})$$

如果 F 是稳定的, 即 F 的特征值都在单位圆内, 则 P_i 收敛于一常值正定阵 P .

证明: 因为 F 是稳定的, 则 Lyapunov 方程

$$P = F^T P F + Q, \quad Q > 0 \quad (\text{A.3})$$

有唯一的正定解 P . 由式 (A.2) 和式 (A.3) 可得,

$$P_{i+1} - P = F^T (P_i - P) F$$

由此递推关系可得,

$$P_i - P = (F^T)^i (P_0 - P) F^i$$

根据 F 是稳定的条件, 有 $\lim_{i \rightarrow \infty} F^i = 0$. 因此 $\lim_{i \rightarrow \infty} (P_i - P) = 0$. 即 P_i 收敛于常值矩阵 P , 且 P 是满足方程 (A.3) 的唯一的正定阵. \square

根据上述引理, 下面我们利用本文算法的等价集总式形式来证明其收敛性. 为此, 首先推导本算法的等价集总式算法表达式. 该推导由以下步骤构成,

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t|t-1) \rightarrow \hat{\boldsymbol{x}}(t|t) \rightarrow \hat{\boldsymbol{x}}^w(t|t) \rightarrow \hat{\boldsymbol{x}}(t+1|t)$$

其中,

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t|t-1) = \text{col}(\hat{\boldsymbol{x}}(t|t-1, p, p+1)|_{p=1}^{p=p_m-1}) \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t|t) = \text{col}(\hat{\boldsymbol{x}}(t|t, p, p+1)|_{p=1}^{p=p_m-1}) \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}^w(t|t) &= \text{col}(\hat{\boldsymbol{x}}(t|t, p)|_{p=1, 2, 2, 3, 3, \\ &\quad \dots, p_{m-1}, p_{m-1}, p_m}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

这种分法的实质是把分布式算法分成 Kalman 滤波的测量更新算法、状态估计加权算法和 Kalman 滤波一步预测算法等三个步骤. 下面具体给出每一步的推导过程, 并最终得到其等价的集总式形式.

$$(1) \hat{\boldsymbol{x}}(t|t-1) \rightarrow \hat{\boldsymbol{x}}(t|t)$$

对式 (9) 和式 (10) 应用 Kalman 滤波算法中的测量更新算法, 把预测值 $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t-1, p+1, p)$ 更新为滤波值 $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t, p+1, p)$, 同时得到 $\hat{\boldsymbol{u}}(t|t, p+1, p)$. 其等价集总式形式为,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}(t|t) &= \hat{\boldsymbol{x}}(t|t-1) + K_f(t)e(t) \\ \hat{\boldsymbol{u}}(t|t) &= Q(t)D^T(t)R_e^{-1}(t)e(t) \\ e(t) &= \bar{\boldsymbol{y}}(t) - C(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t|t-1) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

其中,

$$\hat{\boldsymbol{u}}(t|t) = \text{col}(\hat{\boldsymbol{x}}(t|t, p, p+1)|_{p=1}^{p=p_m-1}) \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}(t) = \text{col}(\boldsymbol{y}(t, p, p+1)|_{p=1}^{p=p_m-1}) \quad (\text{A.9})$$

$$C(t) = \text{diag}(C(t, p, p+1)|_{p=1}^{p=p_m-1}) \quad (\text{A.10})$$

$D(t)$ 和 $Q(t)$ 的定义与上述 $C(t)$ 的定义类似. 增益矩阵 $K_f(t)$ 由下式求出,

$$\begin{aligned} R_e(t) &= D(t)Q(t)D^T(t) + F(t)R(t)F^T(t) \\ &\quad + C(t)P(t|t-1)C^T(t) \\ K_f(t) &= P(t|t-1)C(t)R_e^{-1}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

这里,

$$P(t|t-1) = \text{diag}(P(t|t-1, p, p+1)|_{p=1}^{p=p_m-1})$$

$F(t)$ 和 $R(t)$ 的定义与 $C(t)$ 的定义式 (A.10) 类似.

$$(2) \hat{\boldsymbol{x}}(t|t) \rightarrow \hat{\boldsymbol{x}}^w(t|t).$$

式 (9) 是单个子系统的加权形式, 由此可推出等价的集总式加权形式为,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}_1^w(t|t) &= \left((E_1 P_1(t) E_1^T)^{-1} + (E_2 P_2(t) E_2^T)^{-1} \right)^{-1} \\ &\quad \times \left((E_1 P_1(t) E_1^T)^{-1} E_3 + (E_2 P_2(t) E_2^T)^{-1} E_4 \right) \\ &\quad \times \hat{\boldsymbol{x}}(t|t) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

其中,

$$\hat{\boldsymbol{x}}_1^w(t|t) = \text{col}(\hat{\boldsymbol{x}}(t|t, p)|_{p=1}^{p=p_m}) \quad (\text{A.13})$$

$$P_1(t) = \text{diag}(P(t|t, 1, 2), \text{diag}(P(t|t, p, p+1)|_{p=1}^{p=p_m-1})) \quad (\text{A.14})$$

$$P_2(t) = \text{diag}(\text{diag}(P(t|t, p, p+1)|_{p=1}^{p=p_m-1}), P(t|t, p_m-1, p_m)) \quad (\text{A.15})$$

$$E_1 = \text{diag} \left(\left[\begin{array}{cc} \sqrt{2}I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_{n \times n} \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \sqrt{2}I_{n \times n} \end{array} \right] \right) \quad (\text{A.16})$$

$$E_2 = \text{diag} \left(\left[\begin{array}{cc} \sqrt{2}I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \sqrt{2}I_{n \times n} \end{array} \right] \right) \quad (\text{A.17})$$

$$E_3 = \text{diag} \left(I_{n \times n}, \left[\begin{array}{cc} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{cc} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{array} \right], I_{n \times n} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$E_4 = \text{diag} \left(I_{n \times n}, \left[\begin{array}{cc} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_{n \times n} \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{cc} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_{n \times n} \end{array} \right], I_{n \times n} \right) \quad (\text{A.19})$$

同样对于 $\mathbf{u}(t, p)$ 也有,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_1^w(t|t) &= \left((E_1 P_{u,1}(t) E_1^T)^{-1} \right. \\ &+ (E_2 P_{u,2}(t) E_2^T)^{-1} \left. \right)^{-1} \left((E_1 P_{u,1}(t) E_1^T)^{-1} E_3 \right. \\ &+ (E_2 P_{u,2}(t) E_2^T)^{-1} E_4 \left. \right) \hat{\mathbf{u}}(t|t) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

其中,

$$\hat{\mathbf{u}}_1^w(t|t) = \text{col}(\hat{\mathbf{u}}^w(t|t, p)|_{p=1}^{p_m}) \quad (\text{A.21})$$

$$P_{u,1}(t) = \text{diag}(P_u(t|t, 1, 2), \text{diag}(P_u(t|t, p, p+1)|_{p=1}^{p_m-1})) \quad (\text{A.22})$$

$$P_{u,2}(t) = \text{diag}(\text{diag}(P_u(t|t, p, p+1)|_{p=1}^{p_m-1}), P_u(t|t, p_m-1, p_m)) \quad (\text{A.23})$$

参照 $\hat{\mathbf{x}}^w(t)$ 的定义式 (A.6), 可以定义 $\hat{\mathbf{u}}^w(t)$. 由此可得,

$$\hat{\mathbf{x}}^w(t|t) = E_5 \hat{\mathbf{x}}_1^w(t|t), \hat{\mathbf{u}}^w(t|t) = E_5 \hat{\mathbf{u}}_1^w(t|t) \quad (\text{A.24})$$

其中,

$$E_5 = \text{diag} \left(I_{n \times n}, \left[\begin{array}{c} I_{n \times n} \\ I_{n \times n} \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{c} I_{n \times n} \\ I_{n \times n} \end{array} \right], I_{n \times n} \right) \quad (\text{A.25})$$

把式 (A.12) 和式 (A.20) 分别代入式 (A.24) 的两式中, 可得,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^w(t|t) &= E_5 \left((E_1 P_1(t) E_1^T)^{-1} \right. \\ &+ (E_2 P_2(t) E_2^T)^{-1} \left. \right)^{-1} \left((E_1 P_1(t) E_1^T)^{-1} E_3 \right. \\ &+ (E_2 P_2(t) E_2^T)^{-1} E_4 \left. \right) \hat{\mathbf{x}}(t|t) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}^w(t|t) &= E_5 \left((E_1 P_{u,1}(t) E_1^T)^{-1} \right. \\ &+ (E_2 P_{u,2}(t) E_2^T)^{-1} \left. \right)^{-1} \left((E_1 P_{u,1}(t) E_1^T)^{-1} E_3 \right. \\ &+ (E_2 P_{u,2}(t) E_2^T)^{-1} E_4 \left. \right) \hat{\mathbf{u}}(t|t) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

(3) $\hat{\mathbf{x}}^w(t|t) \rightarrow \hat{\mathbf{x}}(t+1|t)$

在 $\hat{\mathbf{x}}^w(t, p)$ 和 $\hat{\mathbf{u}}^w(t, p)$ 已知的情况下, 由式 (1) 的第二个方程可以求得 $\hat{\mathbf{v}}(t, p)$, 其等价集总式形式为,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}(t) &= (\mathbf{T}(t) - A_{PP}(t))^{-1} A_{PT}(t) \hat{\mathbf{x}}^w(t|t) \\ &+ (\mathbf{T}(t) - A_{PP}(t))^{-1} B_P(t) \hat{\mathbf{u}}^w(t|t) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

其中,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}(t) &= \text{col}(\hat{\mathbf{v}}(t, p) | p = 1, 2, 2, 3, 3, \\ &\dots, p_m - 1, p_m - 1, p_m) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} A_{PP}(t) &= \text{diag}(A_{PP}(t, p) | p = 1, 2, 2, 3, 3, \\ &\dots, p_m - 1, p_m - 1, p_m) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$B_P(t)$ 和 $A_{PT}(t)$ 的定义与 $A_{PP}(t)$ 的定义式 (a.30) 类似. 矩阵 $\mathbf{T}(t)$ 表示相邻子系统之间的连接关系, 且满足关系式 $\hat{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{T}(t) \hat{\mathbf{v}}(t)$. 而 $\mathbf{T}(t) - A_{PP}(t)$ 的逆的存在性可以由空间连接系统的适定性得到保证, 具体参见文献 [1].

由 Kalman 滤波一步预测算法可得,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= A(t) \hat{\mathbf{x}}^w(t|t) + B(t) \hat{\mathbf{u}}^w(t|t) \\ &+ E(t) \hat{\mathbf{v}}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

其中 $A(t)$ 、 $B(t)$ 和 $E(t)$ 的定义与 $C(t)$ 的定义式 (A.10) 类似. 将式 (A.28) 代入式 (A.31), 得,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= (A(t) + E(t)H_1(t)) \hat{\mathbf{x}}^w(t|t) \\ &+ (B(t) + E(t)H_2(t)) \hat{\mathbf{u}}^w(t|t) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

其中:

$$\begin{aligned} H_1(t) &= (\mathbf{T}(t) - A_{PP}(t))^{-1} A_{PT}(t) \\ H_2(t) &= (\mathbf{T}(t) - A_{PP}(t))^{-1} B_P(t) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

综合式 (A.7)、(A.26)、(A.27) 和 (A.32) 可得,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= M(P(t|t-1)) \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) \\ &+ N(P(t|t-1)) (\bar{\mathbf{y}}(t) - C \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)) \end{aligned}$$

其中 $M((t|t-1))$ 和 $N(P(t|t-1))$ 如式 (18) 和 (19) 所示. 由此得到与分布式滤波器等价的集总式滤波器, 如下所示,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= M(P(t|t-1)) \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) \\ &+ N(P(t|t-1)) (\bar{\mathbf{y}}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t|t-1) &= C(t) \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) \end{aligned}$$

令 $\tilde{\mathbf{x}}(t+1) = \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) - \bar{\mathbf{x}}(t+1)$, 则得到分布式状态估计误差方程的等价集总式形式为,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t+1|t) &= f(P(t|t-1))\tilde{\mathbf{x}}(t|t-1) \\ &+ (B(t) + E(t)H_2(t) - N(P(t|t-1))D(t))\bar{\mathbf{u}}(t) \\ &- N(P(t|t-1))F(t)\bar{\mathbf{d}}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

其中

$$f(P(t|t-1)) = M(P(t|t-1)) - N(P(t|t-1))C(t)$$

$\bar{\mathbf{u}}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{d}}(t)$ 的定义与 $\mathbf{y}(t)$ 的定义式 (A.9) 类似. 假设模型 (1) 描述的是线性定常系统, 即其系数矩阵不依赖于时间变量 t , 则以上涉及的系统参数都是常值. 当这些参数满足引理 1 中的条件 (1) 和 (2) 时, 随着 t 的增大, $P(t|t-1)$ 收敛为一常值矩阵 P . 此时式 (A.34) 变为一个常系数递推关系.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t+1|t) &= f(P)\tilde{\mathbf{x}}(t|t-1) \\ &+ (B + EH_2 - N(P)D)\bar{\mathbf{u}}(t) - N(P)F\bar{\mathbf{d}}(t) \end{aligned}$$

由 $P_{\tilde{\mathbf{x}}}(t|t-1) = \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{x}}(t|t-1)\tilde{\mathbf{x}}^T(t|t-1))$ 可得,

$$P_{\tilde{\mathbf{x}}}(t+1|t) = f(P)P_{\tilde{\mathbf{x}}}(t|t-1)f^T(P) + \Pi(P) \quad (\text{A.35})$$

其中,

$$\begin{aligned} \Pi(P) &= (B + EH_2 - N(P)D)Q \\ &\times (B + EH_2 - N(P)D)^T \\ &\times + N(P)FRF^TN^T(P) > 0 \end{aligned}$$

由引理 2 可知, 当 $M(P) - N(P)C$ 是稳定的矩阵时, $P_{\tilde{\mathbf{x}}}(t|t-1)$ 收敛到常数矩阵. 这意味着分布式算法是收敛的. 以上证明了 2.2 节的三个条件是分布式算法收敛的充分条件.

另外, 当分布式算法收敛时, 必须要求其按分布式方式进行的 Kalman 滤波是稳定的, 即必须满足定理 1 中的条件 (1) 和 (2). 除此之外, 分布式算法的收敛性还要求式 (A.35) 中的 $P_{\tilde{\mathbf{x}}}$ 收敛, 这意味着条件 (3) 也必须得到满足. 由此可知, 定理 1 中的三个条件也是分布式状态估计算法的必要条件. \square