# 多丢包不确定离散系统的鲁棒 Kalman 滤波

郭 戈 [1] 王宝凤 [1]

**摘 要** 研究了同时具有不确定性和多丢包情况下的离散时变系统的鲁棒滤波问题, 其中的不确定性是时变的, 范数有界的, 且存在于系统的状态矩阵和输出矩阵中. 通过把多丢包问题建模成具有随机参数的系统模型, 在允许的不确定性情况下, 给出了估计误差方差的上界, 并进一步基于矩阵范数的意义最小化该上界. 结果表明, 通过求解两个 Riccati 差分方程, 可以设计鲁棒滤波器. 最后, 提出适合在线计算的鲁棒滤波算法, 并通过仿真实例表明所提算法的有效性和实用性.

**关键词** 参数不确定性, 多丢包, 鲁棒估计, 网络化控制系统 (NCSs)
**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2008.xxxxx

# Robust Kalman Filtering for Uncertain Discrete-Time Systems with Multiple Packet Dropouts

GUO Ge[1] WANG Bao-Feng[1]

**Abstract** This paper is concerned with the robust filtering problem for a class of discrete time-varying systems with uncertainties and multiple packet dropouts. The system under consideration is subjected to time-varying norm-bounded parameter uncertainties in both the state and output matrices. Based on a model of multiple packet dropouts, the system is modeled to one with stochastic parameter. An upper bound on the variance of the state estimation error is first found under admissible parameter uncertainties. Then, a robust filter is derived by minimizing the prescribed upper bound in the sense of the matrix norm. It is shown that the desired filter can be obtained in terms of the solutions to two discrete Riccati difference equations. Eventually, a robust filtering algorithm suitable for online computation is summarized and a simulation example is presented to demonstrate the effectiveness and practicable of the proposed algorithm.

**Key words** robust estimation, parameter uncertainties, multiple packet dropouts, Networked Control Systems(NCSs)

随着 MEMS、DSP 和通信技术的飞速发展, 分布式网络控制系统 (NCSs) 被广泛应用于工业控制、通信等领域, 它通过共享网络实现了空间分布设备的连接, 从而使得系统结构更具柔性, 且能减少装置、降低维护费用等. 然而, 由于网络的承载能力和通信带宽有限, 网络系统中不可避免地引入了两类不确定性因素: 一类是系统中存在网络时延 [1, 2]、数据丢包 [2, 3]、量化失真 [4] 等问题, 这类问题通常被称为媒介不确定性; 另一类是系统模型中存在的参数不确定性, 常被描述为范数有界不确定性 [5, 6] 或凸多面体不确定性 [7]. 上述所有不确定性问题不仅大大降低了系统的性能而且也增加了滤波估计的难度. 因此, 不确定性系统的估计技术具有十分重要的实际意义, 成为国内外备受关注的研究热点 [1-13]. 例如, 文 [9][10] 中考虑了具有 i.i.d 丢包过程的不确定性离散系统的鲁棒状态估计问题, 文 [11] 研究了系统同时具有两类不确定性的鲁棒 $H_\infty$ 估计, 其中的媒介不确定性包括时延、丢包及量化失真, 参数不确定性描述为凸多面体不确定性.

在实际应用中, 由于受到网络所采用的通信协议、负荷情况、网络传输速率及信息包大小等诸多因素的影响, 连续丢包问题逐渐突显. 特别地, 随着无线通信网络快速代替有线通信网络, 多丢包问题尤为突出. 然而, 已有文献对具有多丢包网络控制系统的滤波问题研究相对较少. 对具有多丢包的线性离散随机系统, S.L.Sun 做过相关的研究: 文 [14] 中通过把系统转换成具有时延和有色噪声的方法给出了的最优无偏滤波器; 文 [15] 基于多丢包模型研究了最优线性估计器, 包括滤波器、预估器和平滑器; 文 [16] 则研究了最优全阶及最优降阶估计器. 此外, M.Sahebsar 分别在文 [17] 和 [18] 中, 研究了具有多丢包网络控制系统的最优 $H_2$ 滤波器和最优 $H_\infty$ 滤波器, 且在文献 [19] 中考虑了具有随机延迟、多丢包或不确定性量测时的最优滤波器. 上述文献虽然考虑了多丢包问题, 但所得结论仍具有一定的局限性, 他们研究的前提假设均是系统模型精确已知, 且完全忽略系统模型中的参数不确定性因素影响, 而这些不确定性往往是不容忽视的. 同时, 由于统计特性的复杂性, 同时考虑多丢包和不确定性的网络系统状态估计问题仍没有得到很好的解决.

本文主要研究了具有多丢包不确定离散系统的鲁棒滤波问题, 其中的参数不确定性为范数有界的, 不仅存在于系统的状态矩阵中, 并且存在于系统的输出矩阵. 基于一个新的多丢包模型, 把连续丢包概率转化为系统模型中的随机参数, 在容许的两类不确定性情况下给出估计误差方差的上界, 并通过求解两个 Riccati 差分方程, 设计了相应的最优鲁棒滤波器. 最后针对科学计算的特点, 给出适合在线递归计算的鲁棒滤波算法, 并用仿真实例验证算法的实用性.

本文的组织结构如下, 第 1 部分对所研究问题进行数学描述, 把具有多丢包的离散不确定系统建模成具有随机参数的不确定系统, 并在第 2 部分给出相应的估计误差方差上界, 本文的主要结论及算法在第 3 部分给出, 并在第 4 部分进行实例仿真. 最后, 第 5 部分进行总结.

## 1 问题定义

考虑如下具有多丢包的线性离散时变不确定系统:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = (\tilde{A}_k + \Delta\tilde{A}_k)\tilde{x}_k + \tilde{B}_k\tilde{w}_k \\ z_k = (\tilde{C}_k + \Delta\tilde{C}_k)\tilde{x}_k + \tilde{v}_k \\ y_k = \gamma_k z_k + (1-\gamma_k) y_{k-1} \end{cases} \quad (1)$$

这里, $\tilde{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态, $z_k \in \mathbf{R}^m$ 是系统量测输出, $y_k \in \mathbf{R}^m$ 是估计器端的量测输入, $\tilde{w}_k$ 和 $\tilde{v}_k$ 都是噪声向量. 不失一般性, 对系统的初始值及噪声的统计特性做如下假设.

**假设1.** 设初始值 $\tilde{x}_0, \tilde{w}_k, \tilde{v}_k$ 两两相互独立, 且满足

1) $\mathrm{E}\{\tilde{x}_0\} = \mathrm{E}\{\tilde{w}_k\} = \mathrm{E}\{\tilde{v}_k\} = 0$

2) $\mathrm{E}\{\tilde{x}_0\tilde{x}_0^{\mathrm{T}}\} = \tilde{P}_0$

3) $\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix} \tilde{w}_k \\ \tilde{v}_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{w}_l^{\mathrm{T}} & \tilde{v}_l^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\right\} = \begin{cases} I_{n+m} & for\ k=l \\ 0 & for\ k \neq l \end{cases}$

假设 1 意味着 $\tilde{w}_k$ 和 $\tilde{v}_k$ 为相互独立的白噪声. $\tilde{A}_k, \tilde{B}_k, \tilde{C}_k$ 为具有适当维数的时变矩阵. $\Delta\tilde{A}_k, \Delta\tilde{C}_k$ 分别表示系统状态转移矩阵和观测矩阵的范数有界不确定参数,

收稿日期 XXXX-XX-XX 收修改稿日期 XXXX-XX-XX
Received Month Date, Year; in revised form Month Date, Year
国家自然科学基金 (60974013), 新世纪优秀人才支持计划项目 (NCET-04-0982), 霍英东教育基金 (111066) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60974013), Program for New Century Excellent Talents in University (NCET-04-0982) and Fok Ying Tong Education Foundation (111066)
1. 大连海事大学信息科学技术学院 大连 1160260
1. School of Information Science and Technology, Dalian Maritime University, Dalian 116026

且具有结构

$$\begin{bmatrix} \Delta\tilde{A}_k \\ \Delta\tilde{C}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{1,k} \\ \tilde{H}_{2,k} \end{bmatrix} F_k\tilde{E}_k \tag{2}$$

这里 $F_k$ 为不确定时变矩阵, 满足

$$F_kF_k^{\mathrm{T}} \le I,\ \forall k \in [0, N] \tag{3}$$

$\tilde{H}_{1,k}, \tilde{H}_{2,k}, \tilde{E}_k$ 为适当维数的已知时变矩阵. 通常称满足式 (3) 的不确定矩阵 $F_k$ 为可容许不确定性. $\gamma_k \in \mathbf{R}$ 为取值 0 或 1 的随机变量, 且统计特性满足假设 2.

**假设2.** 设 $\gamma_k \in \mathbf{R}$ 是取值为 0 或 1 的贝努力分布序列, 其统计特性为 $\mathrm{Prob}\{\gamma_k = 1\} = \mathrm{E}\{\gamma_k\} := \bar{\gamma}_k$

显然，由假设 2 可得

1) $\mathrm{Prob}\{\gamma_k = 0\} = 1 - \mathrm{E}\{\gamma_k\} := 1 - \bar{\gamma}_k$
2) $\mathrm{E}\{(\gamma_k - \bar{\gamma}_k)\} = 0$
3) $\mathrm{E}\{(\gamma_k - \bar{\gamma}_k)^2\} = (1 - \bar{\gamma}_k)\bar{\gamma}_k := \sigma_\gamma^2$
4) $\mathrm{E}\{\gamma_k^2\} = \bar{\gamma}_k$

**注1.** 对于 (1) 中的多丢包模型, 最早在文献 [17] 中出现, 用来研究简单线性系统多丢包问题. 基于假设 2 可知, 估计器端的量测输入 $y_k$ 以概率 $\bar{\gamma}_k$ 接收量测值 $z_k$, 当量测值发生丢失时, 前一时刻的测量输入 $y_{k-1}$ 将以概率 $1 - \bar{\gamma}_k$ 做为估计器的输入值. 进一步, $y_k$ 可记为

$$\begin{aligned} y_k = &\gamma_k z_k + (1 - \gamma_k)\gamma_{k-1}z_{k-1} \\ &+ (1 - \gamma_k)(1 - \gamma_{k-1})\cdots(1 - \gamma_{k-i+1})\gamma_{k-i}z_{k-i} + \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

由上式知, 当 $\gamma_k = 0$, $\gamma_{k-1} = 1$ 时, 量测值 $z_k$ 丢失, $y_k = z_{k-1}$. 同理, 当 $\gamma_k = \gamma_{k-1} = 0$, $\gamma_{k-2} = 1$ 时, 量测值 $z_k$ 和 $z_{k-1}$ 均丢失, $y_k = z_{k-2}$, 即发生了连续丢包. 以此类推, 可知 (4) 式可以很好地描述多丢包问题.

定义 $x_k = [\ \tilde{x}_k^{\mathrm{T}} \quad y_{k-1}^{\mathrm{T}}\ ]^{\mathrm{T}}$, 则系统 (1) 可描述如下

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A_k + H_{1,k}F_kE_k)x_k + B_kw_k \\ y_k = (C_k + H_{2,k}F_kE_k)x_k + v_k \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$A_k = \begin{bmatrix} \tilde{A}_k & 0 \\ \gamma_k\tilde{C}_k & (1 - \gamma_k)I_m \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} \tilde{B}_k & 0 \\ 0 & \gamma_k I_m \end{bmatrix}$$

$$E_k = [\ \tilde{E}_k \quad 0\ ], \quad C_k = [\ \gamma_k\tilde{C}_k \quad (1 - \gamma_k)\, I_m\ ]$$

$$H_{1,k} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{1,k} \\ \gamma_k\tilde{H}_{2,k} \end{bmatrix}, H_{2,k} = \gamma_k\tilde{H}_{2,k}$$

$$w_k = \begin{bmatrix} \tilde{w}_k \\ \tilde{v}_k \end{bmatrix}, \quad v_k = \gamma_k\tilde{v}_k \tag{6}$$

对于系统 (5) 中的 $w_k$ 和 $v_k$, 由假设 1 可得其统计特性为

1) $\mathrm{E}\{w_k\} = \mathrm{E}\{v_k\} = 0$

2) $\mathrm{E}\{w_kw_k^{\mathrm{T}}\} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_k \\ \tilde{v}_k \end{bmatrix} [\ \tilde{w}_k^{\mathrm{T}} \quad \tilde{v}_k^{\mathrm{T}}\ ]$

$$= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} := I_{n+m}$$

3) $\mathrm{E}\{w_kv_k^{\mathrm{T}}\} = \gamma_k \begin{bmatrix} \tilde{w}_k \\ \tilde{v}_k \end{bmatrix} \tilde{v}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\gamma}_k I_m \end{bmatrix} := S_k$

4) $\mathrm{E}\{v_kv_k^{\mathrm{T}}\} = \gamma_k^2\tilde{v}_k\tilde{v}_k^{\mathrm{T}} = \bar{\gamma}_k I_m$

对于矩阵 $A_k, B_k, C_k, H_{1,k}, H_{2,k}$, 由于含有随机参数 $\gamma_k$, 根据假设 2, 显然下列结果成立

$$\begin{aligned} &\bar{A}_k = \mathrm{E}\{A_k\} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_k & 0 \\ \bar{\gamma}_k\tilde{C}_k & (1 - \bar{\gamma}_k)I_m \end{bmatrix} \\ &\bar{B}_k = \mathrm{E}\{B_k\} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_k & 0 \\ 0 & \bar{\gamma}_k I_m \end{bmatrix} \\ &\bar{H}_{1,k} = \mathrm{E}\{H_{1,k}\} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{1,k} \\ \bar{\gamma}_k\tilde{H}_{2,k} \end{bmatrix} \\ &\bar{H}_{2,k} = \mathrm{E}\{H_{2,k}\} = \bar{\gamma}_k\tilde{H}_{2,k} \\ &\bar{C}_k = \mathrm{E}\{C_k\} = [\ \bar{\gamma}_k\tilde{C}_k \quad (1 - \bar{\gamma}_k)\, I_m\ ] \end{aligned} \tag{7}$$

此外, 为了问题分析过程中表述方便, 定义下列符号表示

$$\begin{aligned} &\bar{\bar{A}}_k := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{C}_k & -I_m \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{B}}_k := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \\ &\bar{\bar{C}}_k := [\ \tilde{C}_k \quad -I_m\ ], \quad \bar{\bar{H}}_{1,k} := \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{H}_{2,k} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

**注2.** 根据 (8) 中的符号定义, 显然下列式子成立:

1) $A_k - \bar{A}_k = (\gamma_k - \bar{\gamma}_k)\bar{\bar{A}}_k$,
2) $B_k - \bar{B}_k = (\gamma_k - \bar{\gamma}_k)\bar{\bar{B}}_k$,
3) $H_{1,k} - \bar{H}_{1,k} = (\gamma_k - \bar{\gamma}_k)\bar{\bar{H}}_{1,k}$,
4) $H_{2,k} - \bar{H}_{2,k} = (\gamma_k - \bar{\gamma}_k)\tilde{H}_{2,k}$,
5) $C_k - \bar{C}_k = (\gamma_k - \bar{\gamma}_k)\bar{\bar{C}}_k$.

对系统 (5), 如果采用如下形式的滤波器:

$$\hat{x}_{k+1} = G_k\hat{x}_k + K_k(y_k - \bar{C}_k\hat{x}_k) \tag{9}$$

则本文的问题可描述为: 对系统 (5) 设计滤波器 (9), 选择参数 $G_k$ 和 $K_k$, 使得系统对所有可容许不确定性和多丢包问题, 估计误差方差具有上界, 即存在正定矩阵序列 $Q_k(0 < k \le N)$ 满足

$$\mathrm{E}[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^{\mathrm{T}}] \le Q_k \tag{10}$$

## 2 误差方差的上界

本节的主要目标是给出时变不确定系统 (5) 的估计误差方差上界. 由上节可以看出, 系统 (5) 既具有不确定性又含有随机参数 $\gamma_k$, 因此, 精确求出误差方差的上界是一个复杂的过程. 下面, 首先定义

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \tag{11}$$

则

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} \\ &= (G_k - K_k\bar{C}_k)e_k + B_kw_k - K_kv_k \\ &\quad + (A_k - G_k + \Delta A_k - K_k\Delta C_k - K_k(C_k - \bar{C}_k))x_k \end{aligned} \tag{12}$$

考虑扩展系统状态 $\eta_k = [\ x_k^{\mathrm{T}} \quad e_k^{\mathrm{T}}\ ]^{\mathrm{T}}$, 则由系统 (5) 及 (12) 有

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_{k+1} = (\breve{A}_k + \breve{H}_k F_k \hat{E}_k)\eta_k + \breve{B}_k \hat{w}_k \\ \quad e_k = [\ 0 \quad I_{m+n}\ ]\eta_k \end{array}\right. \tag{13}$$

其中

$$\breve{A}_k = \left[\begin{array}{cc} A_k & 0 \\ A_k - G_k - K_k(C_k - \bar{C}_k) & G_k - K_k\bar{C}_k \end{array}\right]$$

$$\breve{B}_k = \left[\begin{array}{cc} B_k & 0 \\ B_k & -K_k \end{array}\right], \quad \breve{H}_k = \left[\begin{array}{c} H_{1,k} \\ H_{1,k} - H_{2,k} \end{array}\right]$$

$$\hat{E}_k = [\ E_k \quad 0\ ], \quad \hat{w}_k = \left[\begin{array}{c} w_k \\ v_k \end{array}\right] \tag{14}$$

扩展状态系统 (13) 中除了含有不确定性约束 $F_k$ 外, 在矩阵 $\breve{A}_k$, $\breve{B}_k$ 及 $\breve{H}_k$ 中还包含随机矩阵 $A_k$, $B_k$, $C_k$, $H_{1,k}$ 及 $H_{2,k}$. 由于其统计特性的复杂性, 很少文献中涉及具有多丢包不确定系统的鲁棒滤波器设计问题. 下面以引理形式给出扩展系统 (13) 的状态 $\eta_k$ 的方差矩阵的线性迭代方程.

**引理1.** 令扩展系统状态 $\eta_k$ 的方差阵 $\mathrm{E}\{\eta_k\eta_k^{\mathrm{T}}\} = \hat{\Sigma}_k$, 则 $\hat{\Sigma}_k$ 的线性迭代方程为

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{k+1} = & (\hat{A}_k + \hat{H}_k F_k \hat{E}_k)\hat{\Sigma}_k(\hat{A}_k + \hat{H}_k F_k \hat{E}_k)^{\mathrm{T}} \\ & + \bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)(\hat{\Phi}_k + \hat{M}_k F_k \hat{E}_k)\hat{\Sigma}_k \times \\ & (\hat{\Phi}_k + \hat{M}_k F_k \hat{E}_k)^{\mathrm{T}} \\ & + \hat{B}_k W_k \hat{B}_k^{\mathrm{T}} + \bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)\hat{\Gamma}_k W_k \hat{\Gamma}_k^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$\hat{A}_k = \left[\begin{array}{cc} \bar{A}_k & 0 \\ \bar{A}_k - G_k & G_k - K_k\bar{C}_k \end{array}\right], \hat{B}_k = \left[\begin{array}{cc} \bar{B}_k & 0 \\ \bar{B}_k & -K_k \end{array}\right]$$

$$\hat{H}_k = \left[\begin{array}{c} \bar{H}_{1,k} \\ \bar{H}_{1,k} - K_k\bar{H}_{2,k} \end{array}\right], \quad \hat{\Phi}_k = \left[\begin{array}{cc} \bar{\bar{A}}_k & 0 \\ \bar{\bar{A}}_k - K\bar{\bar{C}}_k & 0 \end{array}\right]$$

$$\hat{M}_k = \left[\begin{array}{c} \bar{\bar{H}}_{1,k} \\ \bar{\bar{H}}_{1,k} - K_k\tilde{H}_{2,k} \end{array}\right], \hat{\Gamma}_k = \left[\begin{array}{cc} \bar{\bar{B}}_k & 0 \\ \bar{\bar{B}}_k & 0 \end{array}\right]$$

$$W_k = \left[\begin{array}{cc} I_{n+m} & S_k \\ S_k^{T} & I_m \end{array}\right] \tag{16}$$

$\bar{\bar{A}}_k$, $\bar{\bar{B}}_k$, $\bar{\bar{C}}_k$, $\bar{\bar{H}}_{1,k}$ 如注 2 定义.

**证明.** 扩展系统 (13) 可表示为

$$\begin{aligned} \eta_{k+1} = & (\hat{A}_k + \hat{H}_k F_k \hat{E}_k)\eta_k + (\Phi_k + M_k F_k \hat{E}_k)\eta_k \\ & + \hat{B}_k \hat{w}_k + \Gamma_k \hat{w}_k \end{aligned}$$

其中,$\hat{A}_k$, $\hat{H}_k$, $\hat{E}_k$ 分别如 (14)(16), 由式 (8) 及注 2 可知,

$$\begin{aligned} \Phi_k = & \left[\begin{array}{cc} A_k - \bar{A}_k & 0 \\ A_k - \bar{A}_k - K_k(C_k - \bar{C}_k) & 0 \end{array}\right] \\ = & (\gamma_k - \bar{\gamma}_k)\hat{\Phi}_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_k = & \left[\begin{array}{c} H_{1,k} - \bar{H}_{1,k} \\ H_{1,k} - \bar{H}_{1,k} - K_k(H_{2,k} - \bar{H}_{2,k}) \end{array}\right] \\ = & (\gamma_k - \bar{\gamma}_k)\hat{M}_k \end{aligned}$$

$$\Gamma_k = \left[\begin{array}{cc} B_k - \bar{B}_k & 0 \\ B_k - \bar{B}_k & 0 \end{array}\right] = (\gamma_k - \bar{\gamma}_k)\hat{\Gamma}_k$$

由假设 2 知, $\Phi_k$, $M_k$, $\Gamma_k$ 是均值为 0 的随机矩阵序列, 因此, 由式 (7)(8) 及假设 2 知

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}\{(\Phi_k + M_k F_k \hat{E}_k)\hat{\Sigma}_k(\Phi_k + M_k F_k \hat{E}_k)^{\mathrm{T}}\} \\ = & \bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)(\hat{\Phi}_k + \hat{M}_k F_k \hat{E}_k)\hat{\Sigma}_k(\hat{\Phi}_k + \hat{M}_k F_k \hat{E}_k)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

$$\mathrm{E}\{\Gamma_k\hat{\Sigma}_k\Gamma_k^{\mathrm{T}}\} = \bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)\hat{\Gamma}_k W_k \hat{\Gamma}_k^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{aligned} W_k = & \mathrm{E}\{\hat{w}_k\hat{w}_k^{\mathrm{T}}\} = \mathrm{E}\left\{\left[\begin{array}{c} w_k \\ v_k \end{array}\right][\ w_k^{\mathrm{T}} \quad v_k^{\mathrm{T}}\ ]\right\} \\ = & \left[\begin{array}{cc} I_{n+m} & S_k \\ S_k^{\mathrm{T}} & I_m \end{array}\right] \end{aligned}$$

因此 (15) 式成立. □

**引理2**[20]**.** 设 $A$, $H$, $E$, $F$ 及 $\Sigma$ 是适当维数的实矩阵, 其中 $FF^{\mathrm{T}} \le I$, $\Sigma > 0$ 且 $\Sigma = \Sigma^{\mathrm{T}}$. 对任意 $\alpha > 0$ 且满足 $\alpha^{-1}I - E\Sigma E^{\mathrm{T}} > 0$, 有

$$\begin{aligned} & (A + HFE)\Sigma(A + HFE)^{\mathrm{T}} \\ & \le A(\Sigma^{-1} - \alpha E^{\mathrm{T}}E)^{-1}A^{\mathrm{T}} + \alpha^{-1}HH^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{17}$$

**引理3**[21]**.** 设 $f_k(\cdot), g_k(\cdot)$ : $\mathbf{R}^{2(n+m)\times 2(n+m)} \to \mathbf{R}^{2(n+m)\times 2(n+m)}$,$0 \le k < N$ 是矩阵函数序列, 且满足

$$f_k(A) = f_k^{\mathrm{T}}(A), \forall A = A^{\mathrm{T}} > 0$$

$$f_k(B) \ge f_k(A)\ \forall B = B^{\mathrm{T}} > A = A^{\mathrm{T}} > 0$$

及

$$g_k(A) = g_k^{\mathrm{T}}(A) \ge f_k(A), \forall A = A^{\mathrm{T}} > 0$$

则方程 $A_{k+1} = f_k(A_k)$, $B_{k+1} = g_k(B_k)$, $A_0 = B_0 > 0$ 的解 $\{A_k\}_{0\le k<N}$ 和 $\{B_k\}_{0\le k<N}$ 满足 $A_k \le B_k$, 其中 $0 \le k < N$.

**定义1.** 如果对给定正数序列 $\alpha_k$ 和 $\beta_k$,$0 \le k \le N$, 存在对称正定矩阵 $\Sigma_k = \Sigma_k^{\mathrm{T}} \ge 0$, $(0 \le k \le N)$, 对所有满足式 (3) 的不确定性矩阵 $F_k$ 有下列关系成立：

$$\begin{aligned} \Sigma_{k+1} = & \hat{A}_k(\Sigma_k^{-1} - \alpha_k\hat{E}_k^{\mathrm{T}}\hat{E}_k)^{-1}\hat{A}_k^{\mathrm{T}} + \alpha_k^{-1}\hat{H}_k\hat{H}_k^{\mathrm{T}} \\ & + \bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)\hat{\Phi}_k(\Sigma_k^{-1} - \beta_k\hat{E}_k^{\mathrm{T}}\hat{E}_k)^{-1}\hat{\Phi}_k^{\mathrm{T}} \\ & + (1-\bar{\gamma}_k)\bar{\gamma}_k\beta_k^{-1}\hat{M}_k\hat{M}_k^{\mathrm{T}} + \hat{B}_k W_k \hat{B}_k^{\mathrm{T}} \\ & + \bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)\hat{\Gamma}_k W_k \hat{\Gamma}_k^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{18}$$

$$\alpha_k^{-1}I - \hat{E}_k X_k \hat{E}_k^{\mathrm{T}} > 0 \tag{19}$$

$$\beta_k^{-1}I - \hat{E}_k X_k \hat{E}_k^{\mathrm{T}} > 0 \tag{20}$$

则称滤波器 (9) 是与矩阵序列 $\Sigma_k$ 二次一致的滤波器.

**定理1.** 如果存在两个分别满足式 (19) 和 (20) 的正数序列 $\alpha_k$ 和 $\beta_k$,$0 \le k \le N$, 则扩展系统 (13) 的状态方差有上界：

$$\hat{\Sigma}_k \le \Sigma_k \tag{21}$$

这里 $\Sigma_k$ 满足式 (18), 且 $\Sigma_0 = \hat{\Sigma}_0$.

**证明.** 由引理 1 知 $\{\hat{\Sigma}_k\}$满足如下递归算法:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{k+1} = & f(\hat{\Sigma}_k) \\ \underline{\Delta} & (\hat{A}_k + \hat{H}_k F_k \hat{E}_k)\hat{\Sigma}_k(\hat{A}_k + \hat{H}_k F_k \hat{E}_k)^{\mathrm{T}} \\ & + \bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)(\hat{\Phi}_k + \hat{M}_k F_k \hat{E}_k)\hat{\Sigma}_k \times \\ & (\hat{\Phi}_k + \hat{M}_k F_k \hat{E}_k)^{\mathrm{T}} \\ & + \hat{B}_k W_k \hat{B}_k^{\mathrm{T}} + \bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)\hat{\Gamma}_k W_k \hat{\Gamma}_k^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

根据引理 2, 对 $f(\hat{\Sigma}_k)$ 式右边的第一项及第二项, 如果存在两个正数 $\alpha_k$ 和 $\beta_k$, $0 \le k \le N$ 满足 (19)(20), 则有

$$\begin{aligned}&(\hat{A}_k+\hat{H}_kF_k\hat{E}_k)\hat{\Sigma}_k(\hat{A}_k+\hat{H}_kF_k\hat{E}_k)^{\mathrm{T}}\\ \le\ &\hat{A}_k(\Sigma_k^{-1}-\alpha_k\hat{E}_k^{\mathrm{T}}\hat{E}_k)^{-1}\hat{A}_k^{\mathrm{T}}+\alpha_k^{-1}\hat{H}_k\hat{H}_k^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}&(\hat{\Phi}_k+\hat{M}_kF_k\hat{E}_k)\hat{\Sigma}_k(\hat{\Phi}_k+\hat{M}_kF_k\hat{E}_k)^{\mathrm{T}}\\ \le\ &\hat{\Phi}_k(\Sigma_k^{-1}-\beta_k\hat{E}_k^{\mathrm{T}}\hat{E}_k)^{-1}\hat{\Phi}_k^{\mathrm{T}}+\beta_k^{-1}\hat{M}_k\hat{M}_k^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

另外,$\Sigma_0=\hat{\Sigma}_0$, 则由引理 3 得 $\hat{\Sigma}_k \le \Sigma_k$. □

## 3 鲁棒滤波器设计

本文的主要结论以定理 2 的形式给出, 包括状态估计误差方差上界 $Q_k$ 的存在条件, 以及使该上界达到最小值时, 滤波器结构 (9) 中参数 $G_k$ 和 $K_k$ 的值.

**定理2.** 给定正数序列 $\alpha_k,\beta_k>0$ 满足不等式 $\alpha_k^{-1}I-E_kP_kE_k^{\mathrm{T}}>0$ 及 $\beta_k^{-1}I-E_kP_kE_k^{\mathrm{T}}>0$, 如果下列两个 Riccati 方程

$$\begin{aligned}P_{k+1}=\ &\bar{A}_k(P_k^{-1}-\alpha_kE_k^{\mathrm{T}}E_k)^{-1}\bar{A}_k^{\mathrm{T}}\\&+\alpha_k^{-1}\bar{H}_{1,k}\bar{H}_{1,k}^{\mathrm{T}}+\bar{B}_k\bar{B}_k^{\mathrm{T}}\\&+\bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)(\bar{\bar{A}}_k(P_k^{-1}-\beta_kE_k^{\mathrm{T}}E_k)^{-1}\bar{\bar{A}}_k^{\mathrm{T}}\\&+\beta_k^{-1}\bar{\bar{H}}_{1,k}\bar{\bar{H}}_{1,k}^{\mathrm{T}}+\bar{\bar{B}}_k\bar{\bar{B}}_k^{\mathrm{T}}),P_0\ge Q_0\end{aligned}\tag{22}$$

和

$$\begin{aligned}Q_{k+1}=&-(N_k+\bar{B}_kS_k)R_k^{-1}(N_k+\bar{B}_kS_k)^{\mathrm{T}}\\&+\bar{A}_k(Q_k^{-1}-\alpha_kE_k^{\mathrm{T}}E_k)^{-1}\bar{A}_k^{\mathrm{T}}\\&+\alpha_k^{-1}\bar{H}_{1,k}\bar{H}_{1,k}^{\mathrm{T}}+\bar{B}_k\bar{B}_k^{\mathrm{T}}\\&+\bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)(\bar{\bar{A}}_k(Q_k^{-1}-\beta_kE_k^{\mathrm{T}}E_k)^{-1}\bar{\bar{A}}_k^{\mathrm{T}}\\&+\beta_k^{-1}\bar{\bar{H}}_{1,k}\bar{\bar{H}}_{1,k}^{\mathrm{T}}+\bar{\bar{B}}_k\bar{\bar{B}}_k^{\mathrm{T}})\end{aligned}\tag{23}$$

有正定解 $P_k$ 和 $Q_k$, 那么

$$\Sigma_n=\begin{bmatrix}\Sigma_{1,\mathrm{n}} & \Sigma_{2,\mathrm{n}}\\ \Sigma_{2,\mathrm{n}} & \Sigma_{2,\mathrm{n}}\end{bmatrix}, n\in[0,N]\tag{24}$$

且存在二次一致滤波器 (9) 使得状态估计误差方差有上界 $Q_k$, 其中滤波器的待定参数 $G_k$ 和 $K_k$ 分别为

$$G_k=\bar{A}_k+(\bar{A}_k-K_k\bar{C}_k)Q_kE_k^{\mathrm{T}}(\alpha_k^{-1}I-E_kQ_kE_k^{\mathrm{T}})^{-1}E_k\tag{25}$$

及

$$K_k=(N_k+\bar{B}_kS_k)R_k^{-1}\tag{26}$$

其中, 矩阵 $\bar{A}_k$, $\bar{B}_k$, $\bar{C}_k$, $\bar{H}_{1,k}$, $\bar{H}_{2,k}$, $\bar{\bar{A}}_k$, $\bar{\bar{B}}_k$, $\bar{\bar{C}}_k$, $\bar{\bar{H}}_{1,k}$ 满足式 (7)(8) 中定义, 且

$$\begin{aligned}N_k=\ &\bar{A}_k(Q_k^{-1}-\alpha_kE_k^{\mathrm{T}}E_k)^{-1}\bar{C}_k^{\mathrm{T}}+\alpha_k^{-1}\bar{H}_{1,k}\bar{H}_{2,k}^{\mathrm{T}}\\&+\bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)(\bar{\bar{A}}_k(P_k^{-1}-\beta_kE_k^{\mathrm{T}}E_k)^{-1}\bar{\bar{C}}_k\\&+\beta_k^{-1}\bar{\bar{H}}_{1,k}\tilde{H}_{2,k}^{\mathrm{T}})\end{aligned}\tag{27}$$

$$\begin{aligned}R_k=\ &I+\bar{C}_k(Q_k^{-1}-\alpha_kE_k^{\mathrm{T}}E_k)^{-1}\bar{C}_k^{\mathrm{T}}\\&+\bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)(\bar{\bar{C}}_k(P_k^{-1}-\beta_kE_k^{\mathrm{T}}E_k)^{-1}\bar{\bar{C}}_k^{\mathrm{T}}\\&+\beta_k^{-1}\tilde{H}_{2,k}\tilde{H}_{2,k}^{\mathrm{T}})+\alpha_k^{-1}\bar{H}_{2,k}\bar{H}_{2,k}^{\mathrm{T}}\end{aligned}\tag{28}$$

**证明**. 当 $n=0$ 时,(24) 式显然成立, 即

$$\Sigma_0=\begin{bmatrix}\Sigma_{1,0} & \Sigma_{2,0}\\ \Sigma_{2,0} & \Sigma_{2,0}\end{bmatrix}=\hat{\Sigma}_0=\begin{bmatrix}P_0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

假设当 $n=k$ 时, 式 (24) 成立. 那么, 下面来证明当 $n=k+1$ 时, 式 (24) 仍然成立.

首先, 假设

$$\Sigma_{k+1}=\begin{bmatrix}\Sigma_{1,k+1} & \Sigma_{12,k+1}\\ \Sigma_{12,k+1}^{T} & \Sigma_{2,k+1}\end{bmatrix}$$

根据 (18) 将 $\Sigma_k$ 按上式展开, 显然 $P_{k+1}=\Sigma_{1,k+1}$ 满足式 (22), 并且可得

$$\begin{aligned}\Sigma_{12,k+1}=\ &\bar{A}_kP_k(\bar{A}_k-G_k)^{\mathrm{T}}\\&+\bar{A}_k\Sigma_{12,k}(G_k-K_k\bar{C}_k)^{\mathrm{T}}\\&+\bar{A}_kP_kE_k^{\mathrm{T}}(\alpha_k^{-1}I-E_kP_kE_k^{\mathrm{T}})^{-1}\times\\&E_kP_k(\bar{A}_k-G_k)^{\mathrm{T}}\\&+\bar{A}_kP_kE_k^{\mathrm{T}}(\alpha_k^{-1}I-E_kP_kE_k^{\mathrm{T}})^{-1}\times\\&E_k\Sigma_{12,k}(G_k-K_k\bar{C}_k)^{\mathrm{T}}\\&+\alpha_k^{-1}\bar{H}_{1,k}(\bar{H}_{1,k}-K_k\bar{H}_{2,k})^{\mathrm{T}}+\bar{B}_k\bar{B}_k^{\mathrm{T}}\\&+\gamma_k(1-\gamma_k)[\bar{\bar{A}}_kP_k(\bar{\bar{A}}_k-K_k\bar{\bar{C}}_k)^{\mathrm{T}}\\&+\bar{\bar{A}}_kP_kE_k^{\mathrm{T}}(\beta_k^{-1}I-E_kP_kE_k^{\mathrm{T}})^{-1}\times\\&E_kP_k(\bar{\bar{A}}_k-K_k\bar{\bar{C}})^{\mathrm{T}}\\&+\beta_k^{-1}\bar{\bar{H}}_{1,k}(\bar{\bar{H}}_{1,k}-K_k\tilde{H}_{2,k})^{\mathrm{T}}+\bar{\bar{B}}_k\bar{\bar{B}}_k^{\mathrm{T}}]\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{2,k+1}=Q_{k+1}=\ &[\ 0\quad I\ ]\Sigma_{k+1}[\ 0\quad I\ ]^{\mathrm{T}}\\=\ &[\ \bar{A}_k-G_k\quad G_k-K_k\bar{C}_k\ ]\times\\&(\Sigma_k^{-1}-\alpha_k\hat{E}_k^{\mathrm{T}}\hat{E}_k)^{-1}[\ \bar{A}_k-G_k\quad G_k-K_k\bar{C}_k\ ]^{\mathrm{T}}\\&+\alpha_k^{-1}(\bar{H}_{1,k}-K_k\bar{H}_{2,k})(\bar{H}_{1,k}-K_k\bar{H}_{2,k})^{\mathrm{T}}\\&+\bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)[\ \bar{\bar{A}}_k-K_k\bar{\bar{C}}_k\quad 0\ ]\times\\&(\Sigma_k^{-1}-\beta_k\hat{E}_k^{\mathrm{T}}\hat{E}_k)^{-1}[\ \bar{\bar{A}}_k-K_k\bar{\bar{C}}_k\quad 0\ ]^{\mathrm{T}}\\&+\bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)\beta_k^{-1}(\bar{\bar{H}}_{1,k}-K_k\tilde{H}_{2,k})\times\\&(\bar{\bar{H}}_{1,k}-K_k\tilde{H}_{2,k})^{\mathrm{T}}\\&+\bar{B}_k\bar{B}_k^{\mathrm{T}}-K_kS_k^{\mathrm{T}}\bar{B}_k^{\mathrm{T}}-\bar{B}_kS_kK_k\\&+K_kK_k^{\mathrm{T}}+\bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)\bar{\bar{B}}_k\bar{\bar{B}}_k^{\mathrm{T}}\end{aligned}\tag{30}$$

现在, 对 $Q_{k+1}$ 分别关于参数 $G_k$ 和 $K_k$ 求偏微分, 并令其值等于 0, 即

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_{k+1}}{\partial G_k}=\ &[\ \bar{A}_k-G_k\quad G_k-K_k\bar{C}_k\ ]\times\\&(\Sigma_k^{-1}-\alpha_k\hat{E}_k^{\mathrm{T}}\hat{E}_k)^{-1}[\ -I\quad I\ ]^{\mathrm{T}}\\=\ &0\end{aligned}\tag{31}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_{k+1}}{\partial K_k}=\ &[\ \bar{A}_k-G_k\quad G_k-K_k\bar{C}_k\ ]\times\\&(\Sigma_k^{-1}-\alpha_k\hat{E}_k^{\mathrm{T}}\hat{E}_k)^{-1}[\ 0\quad \bar{C}_k\ ]^{\mathrm{T}}\\&-\alpha^{-1}(\bar{H}_{1,k}-K_k\bar{H}_{2,k})\bar{H}_{2,k}^{\mathrm{T}}\\&+\bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)([\ \bar{\bar{A}}_k-K_k\bar{\bar{C}}_k\quad 0\ ]\times\\&(\Sigma_k^{-1}-\beta_k\hat{E}_k^{\mathrm{T}}\hat{E}_k)^{-1}[\ \bar{\bar{C}}_k\quad 0\ ]^{\mathrm{T}}\\&-\beta_k^{-1}(\bar{\bar{H}}_{1,k}-K_k\tilde{H}_{2,k})\tilde{H}_{2.k}^{\mathrm{T}})\\&-\bar{B}_kS_k+K_k\\=\ &0\end{aligned}\tag{32}$$

对式 (31) 及 (32) 中的 $(\Sigma_k^{-1}-\alpha_k\hat{E}_k^{\mathrm{T}}\hat{E}_k)^{-1}$ 由矩阵逆理论知

$$(\Sigma_k^{-1}-\alpha_k\hat{E}_k^{\mathrm{T}}\hat{E}_k)^{-1}=\Sigma_k+\Sigma_k\hat{E}_k^{\mathrm{T}}(\alpha_k^{-1}I-\hat{E}_k\Sigma_k\hat{E}_k^{\mathrm{T}})\hat{E}_k\Sigma_k$$

进一步, 把 $\Sigma_k$ 及 $\hat{E}_k$ 代入上式, 通过矩阵运算, 可得最小化 $Q_{k+1}$ 时, 最优滤波器参数 $G_k$ 和 $K_k$ 的值分别为 (25),(26).

设

$$\Omega_k=E_k^{\mathrm{T}}(\xi_k^{-1}I-E_kP_kE_k^{\mathrm{T}})^{-1}$$
$$\Xi_k=E_k^{\mathrm{T}}(\xi_k^{-1}I-E_kQ_kE_k^{\mathrm{T}})^{-1}$$

可以得出如下关系式

$$\Xi_k=(I+\Omega_k(P_k-Q_k))^{-1}\Omega_k \tag{33}$$

把 (25)-(28) 分别代入 (29)(30), 并利用 (33) 式中 $\Omega_k$ 与 $\Xi_k$ 的转换关系, 可以得出

$$\begin{aligned}\Sigma_{12,k+1}=\Sigma_{2,k}=Q_k\\ &=(N_k+\bar{B}_kS_k)R_k^{-1}(N_k+\bar{B}_kS_k)^{\mathrm{T}}\\ &+\alpha_k^{-1}\bar{H}_{1,k}\bar{H}_{1,k}^{\mathrm{T}}+\bar{B}_k\bar{B}_k^{\mathrm{T}}\\ &+\bar{A}_k(Q_k^{-1}-\alpha_kE_k^{\mathrm{T}}E_k)^{-1}\bar{A}_k^{\mathrm{T}}\\ &+\bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)(\bar{\bar{A}}_k(Q_k^{-1}-\beta_kE_k^{\mathrm{T}}E_k)^{-1}\bar{\bar{A}}_k^{\mathrm{T}}\\ &+\beta_k^{-1}\bar{\bar{H}}_{1,k}\bar{\bar{H}}_{1,k}^{\mathrm{T}}+\bar{\bar{B}}_k\bar{\bar{B}}_k^{\mathrm{T}})\end{aligned} \tag{34}$$

其中 $N_k$ 满足式 (27). 因此, 可知

$$\Sigma_{k+1}=\begin{bmatrix}\Sigma_{1,k+1} & \Sigma_{2,k+1}\\ \Sigma_{2,k+1} & \Sigma_{2,k+1}\end{bmatrix}$$

从而得出 (23) 且 (24) 式成立. □

通过最小化估计误差方差的上界 $Q_k$, 定理 2 给出了最优鲁棒滤波器的设计方法. 已知著名的卡尔曼滤波不仅是最优线性估计器, 并且具有适合科学计算的算法结构. 同样, 这里给出适合科学计算的鲁棒滤波器递归算法.

1) $\hat{x}_k^1=(I+Q_kE_k^{\mathrm{T}}(\alpha_k^{-1}I-E_kQ_kE_k^{\mathrm{T}})^{-1}E_k)\hat{x}_k$

2) $\hat{x}_k=\bar{A}_k\hat{x}_k^1+K_k(y_k-\bar{C}_k\hat{x}_k^1)$

3) $K_k=(N_k+\bar{B}_kS_k)R_k^{-1}$, 其中,$N_k$ 和 $R_k$ 分别满足 (27) 和 (28)

4) $$\begin{aligned}P_{k+1}=&\bar{A}_k(P_k^{-1}-\alpha_kE_k^{\mathrm{T}}E_k)^{-1}\bar{A}_k^{\mathrm{T}}\\ &+\alpha_k^{-1}\bar{H}_{1,k}\bar{H}_{1,k}^{\mathrm{T}}+\bar{B}_k\bar{B}_k^{\mathrm{T}}\\ &+\bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)[\bar{\bar{A}}_k(P_k^{-1}-\beta_kE_k^{\mathrm{T}}E_k)^{-1}\bar{\bar{A}}_k^{\mathrm{T}}\\ &+\beta_k^{-1}\bar{\bar{H}}_{1,k}\bar{\bar{H}}_{1,k}^{\mathrm{T}}+\bar{\bar{B}}_k\bar{\bar{B}}_k^{\mathrm{T}}]\end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned}Q_{k+1}=&-(N_k+\bar{B}_kS_k)R_k^{-1}(N_k+\bar{B}_kS_k)^{\mathrm{T}}\\ &+\bar{A}_k(Q_k^{-1}-\alpha_kE_k^{\mathrm{T}}E_k)^{-1}\bar{A}_k^{\mathrm{T}}\\ &+\alpha_k^{-1}\bar{H}_{1,k}\bar{H}_{1,k}^{\mathrm{T}}+\bar{B}_k\bar{B}_k^{\mathrm{T}}\\ &+\bar{\gamma}_k(1-\bar{\gamma}_k)(\bar{\bar{A}}_k(Q_k^{-1}-\beta_kE_k^{\mathrm{T}}E_k)^{-1}\bar{\bar{A}}_k^{\mathrm{T}}\\ &+\beta_k^{-1}\bar{\bar{H}}_{1,k}\bar{\bar{H}}_{1,k}^{\mathrm{T}}+\bar{\bar{B}}_k\bar{\bar{B}}_k^{\mathrm{T}})\end{aligned}$$

其中,$N_k$ 和 $R_k$ 分别满足 (27) 和 (28).

## 4　数值算例

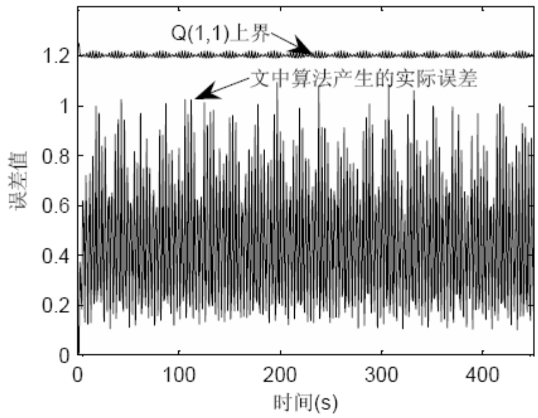
本节通过一个仿真算例来证明文中所提算法的有效性及实用性. 考虑具有多丢包问题的离散不确定系统 (1) 如下:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_k=&(\begin{bmatrix}0 & 0.2\sin 2k\\ 0.3 & 0.3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.2\\ 0.1\end{bmatrix}F_k[\ 0.1 \quad 0.3\ ])\tilde{x}_{k+1}\\ &+\begin{bmatrix}1\\ 0.6\end{bmatrix}\tilde{w}_k\end{aligned}$$

$$z_k=([\ 0.7+0.5\sin 2k \quad 1\ ]+0.2F_k[\ 0.1 \quad 0.3\ ])\tilde{x}_k+\tilde{v}_k$$
$$y_k=\gamma_kz_k+(1-\gamma_k)y_{k-1}$$

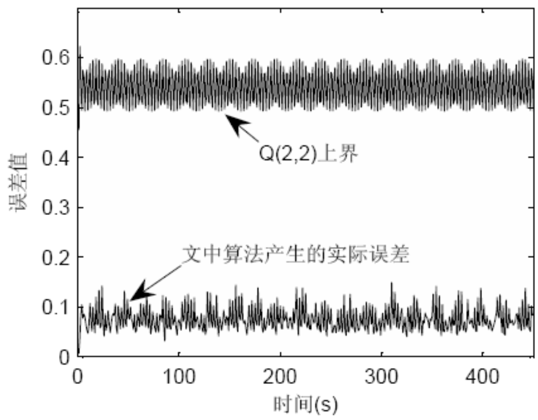
其中, $\tilde{w}_k$, $\tilde{v}_k$, $\gamma_k$ 的统计特性满足假设 1 和假设 2, 并且取 $\bar{\gamma}_k=0.6$. 设 $F_k=\sin 3k$, 则满足 $F_kF_k^{\mathrm{T}}\le I$, $\forall k\in[0,N]$.

另外, 设 $\alpha_k$ 和 $\beta_k$ 的值分别取为 0.2 和 0.3, 并设 $P_0=5I_3$,$Q_0=2I_3$, 则对误差方差上界, 通过 MATLAB 仿真实验, 可得状态 $x_1$ 和状态 $x_2$ 的误差方差上界 $Q(1,1)$ 和 $Q(2,2)$, 分别如图 1 中 (a) 和 (b) 所示. 此外, 使用文中所提鲁棒滤波器算法, 通过 100 次采样, 给出从时刻 $t=0$ 到时刻 $t=450$ 的实际估计误差期望, 如图 1 所示. 由图 1 可以看出实际误差方差未超出各自上界, 从而证明本文算法的有效性, 同时, 本文所提算法可递归求值, 适合科学计算, 具有一定的实用性.




(a)　状态 $x_1$

(a)　The state $x_1$




(b)　状态 $x_2$

(b)　The state $x_2$

图 1　状态 $(x_1,x_2)^T$ 的实际误差与上界

Fig. 1　Upper bound and actual error of state $(x_1,x_2)^T$

## 5　结束语

本文基于一个新的多丢包模型, 研究了离散不确定系统的状态估计问题, 设计了相应的鲁棒滤波器策略, 并给出适合在线计算的具体算法. 最后, 通过实际算例展示了算法的有效性和实用性.

基于本文的工作, 进一步的研究方向及需要考虑的问题为:1) 同时具有延迟、量化失真、多包丢失网络环境中的估计问题;2) 系统模型更复杂的情况, 如非线性系统的状态估计问题.

## References


1 Sun Shu-Li, Lv Nan. Distributed fusion filter for multi-sensor multi-delay systems with colored measurement Noises. *Acta Automatica Sinica*, 2009,**35**(1): 46−53
(孙书利, 吕楠. 带有色观测噪声多传感器多重时滞系统分布式融合滤波器. 自动化学报, 2009, **35**(1): 46−53)

2 Schenato L. Optimal estimation in networked control systems subject to random delay and packet loss. In: Proceedings of the 45th Conference on Decision & Control. United State: IEEE, 2006. 5615−5620

3 Huang M Y, Dey S. Stability of Kalman filtering with Markovian packet losses. *Automatica*, 2007, **43**(4): 598−607

4 Malyavej V, Savkin A V. The problem of optimal robust Kalman state estimation via limited capacity digital communication channels. *Systems & Control Letters*, 2005, **54**: 283−292

5 Dong Z, You Z. Finite-horizon fobust Kalman filtering for uncertain discrete time-varying systems with uncertain-convariance white noise. *IEEE Signal Processing Letters*, 2006, **13**(8): 493−496

6 Zhang Yong, Shi Zhong-Ke, Dai Guan-Zhong. A new robust minimum variance filter for uncertain discret-time systems. *Acta Automatica Sinica*, 2000, **26**(6): 782−787
(张勇, 史忠科, 戴冠中. 离散系统的鲁棒最小方差滤波新算法及分析. 自动化学报, 2000, **26**(6): 782−787)

7 Oliveira R C L F, Peres P L D. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. *System Control Letter*, 2006, **55**(1): 52−61

8 Sun Ping, Jing Yuan-Wei. Robust $H_\infty$ filtering of uncertain systems based on sampled measurements. *Control and Decision*, 2006, **21**(6): 697−704
(孙平, 井元伟. 基于采样测量值的不确定系统鲁棒 $H_\infty$ 滤波. 控制与决策, 2006, **21**(6): 697−704)

9 Wang Z D, Yang F W, Ho D W C. Robust finite-horizon filtering for stochastic system with missing measurements. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, **12**(6): 437−440

10 Wang Z D, Ho D W C, Liu X H. Variance-constrained filtering for uncertain stochastic systems with missing measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(7): 1254−1258

11 Gao H J, Chen T W. $H_\infty$ estimation for uncertain systems with limited communication capacity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(11): 1310−1314

12 Chen Li, Zhong Mai-Ying. Designing robust $H_\infty$ fault detection filter for singular time-delay systems with uncertainty. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(8): 943−949
(陈莉, 钟麦英. 不确定奇异时滞系统的鲁棒 $H_\infty$ 故障诊断滤波器设计. 自动化学报, 2008, **34**(8): 943−949)

13 Gao Hui-Jun, Wang Chang-Hong, Li Yan-Hui. Robust $l_2$−$l_\infty$ filter design for uncertain discrete-time state-delayed systems. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(5): 666−672
(高会军, 王常虹, 李艳辉. 时滞不确定离散系统的鲁棒 $l_2 - l_\infty$ 滤波. 自动化学报, 2003, **29**(5): 666-672)

14 Sun S L, Xie L H, Xiao W D, Xiao N. Optimal filtering for systems with multiple packet dropouts. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2008, **55**(7): 695−699

15 Sun S L, Xie L H, Xiao W D, Soh Y C. Optimal linear estimation for systems with multiple packet dropouts. *Automatic*, 2008, **44**: 1333−1342

16 Sun S L, Xiao W D. Optimal full-order and reduced-order estimators for discrete-time systems with multiple packet dropouts. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(8): 4031−4038

17 Sahebsara M, Chen T W, Shah S L. Optimal $H_2$ filtering in networked control systems with multiple packet dropout. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(8): 1508−1513

18 Sahebsara M, Chen T W, Shah S L. Optimal $H_\infty$ filtering in networked control systems with multiple packet dropouts. *Systems & Control Letters*, 2008, **57**: 696−702

19 Sahebsara M, Chen T W, Shah S L. Optimal $H_2$ Filtering with random sensor delay, multiple packet dropout and uncertain observations. *International Journal of Control*, 2007, **80**(2): 292−301

20 Xie L, Soh Y C, De Souza C E. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994. **39**(6): 1310−1314

21 Theodor Y, Shaked U. Robust discrete-time minimum variance filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996. **44**(2): 181−189



**郭戈** 大连海事大学教授、博士生导师.《国际系统、控制与通信杂志》主编、国家新世纪优秀人才、甘肃省十大杰出青年提名. 主要研究方向为网络化控制系统分析、移动机器人、智能车辆等. E-mail: geguo@yeah.net
(**GUO Ge** Professor in Dalian Maritime University. He is the Editor-in-Chief of International Journal of Systems, Control and Communications. He was the honoree of the New Century Excellent Talents in University, Ministry of Education, China, and was the nominee of Gansu Top Ten Excellent Youths. His research interests include networked control system theory, process control, hybrid vehicle and mobile robot control.)

**王宝凤** 大连海事大学博士研究生. 主要研究方向为网络化控制系统中状态估计、滤波器设计. E-mail: wbfdm@163.com
(**WANG Bao-Feng** Ph. D. candidate in Dalian Maritime University. Her research interests include state estimation and filtering design of Networked Control Systems.)