

# 基于SMC-PHDF的部分可分辨的群目标跟踪算法

连峰<sup>1</sup> 韩崇昭<sup>1</sup> 刘伟峰<sup>2</sup> 元向辉<sup>1</sup>

**摘要** 本文提出一种基于粒子概率假设密度滤波器(Sequential Monte Carlo probability hypothesis density filter, SMC-PHDF)的部分可分辨的群目标跟踪算法.该算法可直接获得群而非个体的个数和状态估计.这里群的状态包括群的质心状态和形状.为了估计群的个数和状态,该算法利用高斯混合模型(Gaussian mixture models, GMM)拟合SMC-PHDF中经重采样后的粒子分布,这里混合模型的元素个数和参数分别对应于群的个数和状态.期望最大化(expectation maximum, EM)算法和马尔科夫链蒙特卡罗(Markov chain Monte Carlo, MCMC)算法分别被用于估计混合模型的参数.混合模型的元素个数可通过删除、合并及分裂算法得到.100次蒙特卡罗(Monte Carlo, MC)仿真试验表明该算法可有效跟踪部分可分辨的群目标.并且相比EM算法, MCMC算法能够更好地提取群的个数和状态,但它的计算量要大于EM算法.

**关键词** 群目标跟踪,粒子概率假设密度滤波器,高斯混合模型,期望最大化算法,马尔科夫链蒙特卡罗算法  
**中图分类号** TP274

## Tracking Partly Resolvable Group Targets Using SMC-PHDF

LIAN Feng<sup>1</sup> HAN Chong-Zhao<sup>1</sup> LIU Wei-Feng<sup>2</sup> Yuan Xiang-Hui<sup>1</sup>

**Abstract** This paper proposes to track the partly resolvable groups using sequential Monte Carlo probability hypothesis density filter (SMC-PHDF). The estimate of the number and the states of the groups, rather than the individuals, is directly derived by the algorithm. The state of a group here consists of its centroid state and shape. In order to estimate the number and the states of the groups, the proposed algorithm fits the distribution of the resampled particles of the SMC-PHDF via Gaussian mixture models (GMM), whose component number and parameters correspond to the number and the states of the groups. Expectation maximum (EM) and Markov chain Monte Carlo (MCMC) algorithms are respectively used to estimate the parameters of the mixture. The component number of the mixture is derived by the strategy of pruning, merging and splitting. 100 Monte Carlo (MC) simulations show that the proposed approach can track the partly resolvable groups effectively. Besides, the MCMC algorithm outperforms the EM algorithm significantly in extracting the number and the states of the groups, although its computational requirement is larger than the EM algorithm.

**Key words** group targets tracking (GTT); sequential Monte Carlo probability hypothesis density filter (SMC-PHDF); Gaussian mixture models (GMM); expectation maximum (EM); Markov chain Monte Carlo (MCMC)

随着传感器分辨率的不断提高,群目标跟踪(Group targets tracking, GTT)问题<sup>[1]</sup>在近几年受到了国内外学者的广泛关注,它在地面或海面目标监控,多目标编队运动,人群或兽群跟踪等领域<sup>[2]</sup>有巨大的应用价值.通常在大多数的实际应用中,由于群内的个体目标较密集,而传感器的分辨率往往又不够充分,它使得群内的个体目标是部分可分辨的<sup>[3]</sup>(即每个群所产生的测量个数大于1,但又小于群内的个体目标数).在这种情况下再试图对群内的所

有个体进行跟踪显然是不现实的<sup>[4]</sup>,并且在很多应用中也是不必要的<sup>[2]</sup>.相反,这时我们可以直接对群的整体进行跟踪.根据这一思想, Koch等人<sup>[4]</sup>提出了一种群目标贝叶斯递推算法.该算法可直接获得群的质心状态和形状估计.但它目前仅限于跟踪无杂波条件下的单个群目标.

近年来基于随机有限集(Random finite set, RFS)的多目标跟踪算法<sup>[5]</sup>,例如概率假设密度滤波器(Probability hypothesis density filter, PHDF)<sup>[6]</sup>和势概率假设密度滤波器(Cardinalized PHDF)<sup>[7]</sup>等,受到了广泛的关注.Zajic, Sidenbladh和Vo等给出了PHDF的粒子滤波实现: SMC-PHDF(Sequential Monte Carlo PHDF,也称为Particle PHDF)<sup>[8]</sup>.Ma和Vo等在线性运动模型和测量模型的假设条件下得到了PHDF封闭的递推形式: GM-PHDF (Gaussian mixture PHDF)<sup>[9]</sup>.事实上Mahler等人最初提出PHDF的目的是为了解决非传统条件下的密集多目标跟踪问题,故它尤其适用于群目标跟踪<sup>[10]</sup>.但目前PHDF仍主要应

收稿日期 2009-03-05 收修改稿日期 2009-5-15  
Received March 05, 2009; in revised form May 15, 2009  
国家重点基础研究发展计划(973计划)(2007CB311006),国家自然科学基金(60574033)资助  
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2007CB311006) and National Natural Science Foundation of China (60574033)  
1. 西安交通大学电子与信息工程学院综合自动化研究所 西安 710049  
2. 杭州电子科技大学自动化学院 杭州 310018  
1. Institute of Integrated Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049 2. School of Automation, HANGZHOU DIANZI University, Hang Zhou 310018  
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.xxxxx

用于传统的多个个体(或点)目标的跟踪<sup>[11, 12]</sup>, 而利用PHDF进行群目标跟踪的文献和资料并不多见. Clark等首先将GM-PHDF 应用于线性条件下的群目标跟踪问题<sup>[13]</sup>, 但该算法仍着眼于群内个体目标的估计, 而并不是直接对群的整体进行估计, 因此它很难适用于部分可分辨时的群目标跟踪问题.

综上, 本文提出一种基于SMC-PHDF的部分可分辨的群目标跟踪算法. 与传统的基于SMC-PHDF的个体目标跟踪算法以及文献<sup>[13]</sup>的主要区别在于: 首先, 该算法将每个群视为一个整体单元, 其中群的状态可由它质心状态和形状描述. 通过对群的状态演化方程和测量方程进行建模, 可直接获得群而非个体的个数和状态估计. 第二, 由于每个群在每个时刻可能产生不止一个测量, 故这时群目标的个数估计不能再直接由PHD 的积分获得<sup>[10]</sup>. 第三, 由于每个群所产生的测量较密集以及传感器分辨率不充分等因素的影响, 使得群目标SMC-PHDF 中经重采样后的粒子分布相对于传统的个体目标SMC-PHDF 变得更加复杂. 相应地状态提取步的难度也显著增加. 因此, 为了从群目标SMC-PHDF 中提取群的个数和状态, 本算法利用高斯混合模型(Gaussian mixture model, GMM)<sup>[14]</sup>拟合重采样后的粒子分布, 这里混合模型的元素个数和参数分别对应于群的个数和状态. 期望最大化(Expectation maximum, EM)算法<sup>[14]</sup>和马尔科夫链蒙特卡洛(Markov chain Monte Carlo, MCMC)算法<sup>[15]</sup>分别用于估计混合模型的元素参数. 混合模型的元素个数可通过删除, 合并及分裂算法获得. 本文算法可适用于杂波环境, 群的个数和群内的个体目标数随时间变化, 群的运动模型和测量模型非线性, 以及群内的个体目标部分可分辨时的群目标跟踪问题. 100次蒙特卡洛(Monte Carlo, MC)仿真试验表明本文算法在上述条件下可有效跟踪群目标. 并且相比EM算法, MCMC算法能够更好地提取群的个数和状态. 但MCMC算法的计算量要大于EM算法.

## 1 问题描述

### 1.1 群目标状态

假设在所监控的时间段内, 由于个体目标的出生, 消亡以及群的分裂, 合并等原因, 监控区域内群目标的个数, 群所包含的个体目标数, 以及群的形状均随时间变化. 记 $k$ 时刻监控区域内群目标的个数为 $G_k$ , 单个群目标的状态为 $\mathbf{g}_k$ , 它包括群的质心状态和形状. 类似文献<sup>[4]</sup>, 本文我们也采用椭圆(或椭圆)近似描述群的形状. 因此 $\mathbf{g}_k$ 可定义为

$$\mathbf{g}_k = (\mathbf{x}_k, X_k) \quad (1)$$

上式中 $\mathbf{x}_k$ 为 $n_x$ 维列向量, 它表示群的质心状

态.  $X_k$ 为 $n_x \times n_x$ 维的对称正定随机矩阵, 它用于描述群的椭圆(或椭圆)形状, 其中 $n_x = 2$ 或 $3$ 分别对应于2维或3维空间.

本文的目的是根据直到 $k$ 时刻的传感器测量, 估计群目标的个数 $G_k$ 和群的状态集合 $\mathcal{G}_k = \{\mathbf{g}_k^g\}_{g=1}^{G_k}$ .

### 1.2 群目标状态的时间演化模型

我们假设 $k$ 时刻第 $g$ 个( $g = 1, \dots, G_k$ )群目标状态的时间演化模型满足马尔科夫性, 它可描述为<sup>[4]</sup>

$$f_{k|k-1}(\mathbf{g}_k^g | \mathbf{g}_{k-1}^g) = f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k^g | \mathbf{x}_{k-1}^g) f_{k|k-1}(X_k^g | X_{k-1}^g) \quad (2)$$

上式中 $f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k^g | \mathbf{x}_{k-1}^g)$ 为群的质心状态转移概率密度, 它描述了群的运动行为.  $f_{k|k-1}(X_k^g | X_{k-1}^g)$ 为群的形状转移概率密度, 它描述了群的形状变化.

### 1.3 传感器测量模型

令 $n_z$ 维列向量 $\mathbf{z}_k$ 表示 $k$ 时刻的单个传感器测量,  $\mathcal{Z}_k = \{\mathbf{z}_k^m\}_{m=1}^{M_k}$ 为 $k$ 时刻的传感器测量集合, 这里 $M_k$ 为 $k$ 时刻的测量个数. 传感器测量数据通常包括两部分: 源于群目标的量测和杂波(或虚警), 并且两者是不可区分的. 在未进行特别说明时, 通常认为各个时刻的传感器测量互相独立<sup>[5]</sup>.

#### 1.3.1 源于群目标的测量

记 $M_k^g$ 表示 $k$ 时刻第 $g$ 个群所产生的测量个数. 本文假设群内的个体目标是部分可分辨的, 故 $M_k^g \leq N_k^g$ , 这里 $N_k^g$ 表示 $k$ 时刻第 $g$ 个群所包含的个体目标数. 如果 $k$ 时刻第 $m$ 个测量 $\mathbf{z}_k^m$ 由第 $g$ 个群产生, 则测量似然函数 $f_{k|k}(\mathbf{z}_k^m | \mathbf{g}_k^g)$ 可描述为<sup>[16]</sup>

$$f_{k|k}(\mathbf{z}_k^m | \mathbf{g}_k^g) = \int f_{k|k}(\mathbf{z}_k^m | \mathbf{p}_k^g) f_{k|k}(\mathbf{p}_k^g | \mathbf{g}_k^g) d\mathbf{p}_k^g \quad (3)$$

上式中 $\mathbf{p}_k^g$ 表示第 $g$ 个群目标在 $k$ 时刻产生量测的反射点(包括可分辨的和不可分辨的个体目标)的位置.  $f_{k|k}(\mathbf{p}_k^g | \mathbf{g}_k^g)$ 描述了 $\mathbf{p}_k^g$ 的分布. 对于传统的点目标,  $f_{k|k}(\mathbf{p}_k^g | \mathbf{g}_k^g)$ 退化为质心状态 $\mathbf{x}_k^g$ 处的 $\delta$ 函数.  $f_{k|k}(\mathbf{z}_k^m | \mathbf{p}_k^g)$ 表示传统的单传感器单目标(此处指点目标)测量似然函数, 它依赖于传感器的特性. 由于(3)式与群的形状矩阵 $X_k^g$ 有关, 故 $X_k^g$ 可由传感器测量估计得到.

#### 1.3.2 源于杂波的测量

假设杂波为泊松点过程, 强度为

$$\kappa_k(\mathbf{z}_k) = \lambda c(\mathbf{z}_k) \quad (4)$$

上式中 $\lambda$ 为监控区域内平均每个时刻的杂波个数,  $c(\cdot)$ 为杂波空间分布的概率密度. 若第 $m$ 个测量由杂波产生, 则它满足 $\mathbf{z}_k^m \sim c(\cdot)$ .

## 2 基于SMC-PHDF 的部分可分辨的群目标跟踪算法

### 2.1 群目标PHDF 的粒子滤波实现

类似于传统的多个个体(或点)目标PHD, Mahler 将多个群目标的运动过程建模为泊松点过程,从而得到了群目标的PHD 为<sup>[10]</sup>

$$D_{k|k}(\mathbf{g}_k | \mathcal{Z}_{1:k}) = \int_{\mathbf{g}_k \in \mathcal{G}_k} f_{k|k}(\mathbf{G}_k | \mathcal{Z}_{1:k}) \delta \mathcal{G}_k \quad (5)$$

上式中  $f_{k|k}(\mathbf{G}_k | \mathcal{Z}_{1:k})$  表示RFS 框架下的多个群目标状态集合的后验概率密度.  $\int \cdot \delta \mathcal{G}_k$  表示集合积分.

相应的群目标PHDF 的递推公式如下<sup>[10]</sup>:

$$D_{k|k-1}(\mathbf{g}_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}) = \gamma_k(\mathbf{g}_k) + \int [p_{S,k|k-1}(\mathbf{g}_{k-1}) f_{k|k-1}(\mathbf{g}_k | \mathbf{g}_{k-1}) + \beta_{k|k-1}(\mathbf{g}_k | \mathbf{g}_{k-1})] D_{k-1|k-1}(\mathbf{g}_{k-1} | \mathcal{Z}_{1:k-1}) d\mathbf{g}_{k-1} \quad (6)$$

$$D_{k|k}(\mathbf{g}_k | \mathcal{Z}_{1:k}) = (1 - p_{D,k}(\mathbf{g}_k)) D_{k|k-1}(\mathbf{g}_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}) + \sum_{\mathbf{z}_k \in \mathcal{Z}_k} \frac{p_{D,k}(\mathbf{g}_k) f_{k|k}(\mathbf{z}_k | \mathbf{g}_k) D_{k|k-1}(\mathbf{g}_k | \mathcal{Z}_{1:k-1})}{\kappa_k(\mathbf{z}_k) + \int p_{D,k}(\mathbf{g}_k) f_{k|k}(\mathbf{z}_k | \mathbf{g}_k) D_{k|k-1}(\mathbf{g}_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}) d\mathbf{g}_k} \quad (7)$$

上式中  $\gamma_k(\mathbf{g}_k)$  为群目标出生强度,  $\beta_{k|k-1}(\mathbf{g}_k | \mathbf{g}_{k-1})$  为群目标它生(或分裂)强度,  $p_{S,k|k-1}(\mathbf{g}_{k-1})$  为群目标存活概率,  $p_{D,k}(\mathbf{g}_k)$  为传感器对群目标的检测概率.

由于(6)(7)式中含有多个积分,因此在非线性非高斯条件下该群目标PHDF 没有解析形式.下面本文给出它的粒子滤波实现.

需要说明的是,与传统的个体目标PHDF 不同,对于部分可分辨的群目标跟踪问题,由于单个群目标在每个时刻可产生多个传感器测量,因此群目标的个数估计不能再直接通过群目标PHD 的积分获得.故在  $k$  时刻我们需要从群目标SMC-PHDF 的重采样后的粒子集合中同时提取群目标的个数和状态.

群目标SMC-PHDF 的具体算法流程可见表1.其中上标“ $\sim$ ”表示采样值.此外,在表1中

1. 建议分布可取为群的状态转移概率密度.
2. 在重采样步后可加入MCMC 移动步以增加粒子多样性.

3. 对于群目标SMC-PHDF,由于每个群所产生的测量较密集,群的交叉,合并及分裂,群的形状变化,传感器分辨率不充分,测量噪声和杂波等因素的影响,使得重采样后的粒子分布相对于传统的个体目标SMC-PHDF 变得更加复杂.相应地表1中状态提取步的难度也显著增加.这时如果仍采用以往的  $k$  均值算法<sup>[17]</sup>,群目标的个数和状态提取效果将严重变差.这是由于  $k$  均值属于“硬聚类”方法,即它只能将数据中的一个元素分配给一个类别.因此当数据所包含的类别中有重叠的边界时,  $k$  均值算法的

性能将明显下降.相反,GMM 属于“软聚类”方法,它可以根据一定的概率将数据中的一个元素分配给多个类别.故它尤其适用于聚类有重叠边界的数据.因此,下面本文采用未知元素个数的GMM提取群目标的个数和状态.

表1. 群目标SMC-PHDF 算法

Tab.1 The proposed group SMC-PHDF

<p><b>输入:</b> <math>k-1</math>时刻重采样后的粒子和权重集合 <math>\{\tilde{w}_{k-1}^j, \tilde{\mathbf{g}}_{k-1}^j\}_{j=1}^{J_{k-1}}</math>.</p> <p><b>预测步:</b> 从建议分布 <math>q_k(\cdot   \tilde{\mathbf{g}}_{k-1}^j, \mathcal{Z}_k)</math>, <math>p_k(\cdot   \mathcal{Z}_k)</math> 中采样预测粒子并计算相应权重,可得集合 <math>\{\tilde{w}_{k k-1}^j, \tilde{\mathbf{g}}_{k k-1}^j\}_{j=1}^{J_{k k-1}}</math></p> $\tilde{\mathbf{g}}_{k k-1}^j \sim \begin{cases} q_k(\cdot   \tilde{\mathbf{g}}_{k-1}^j, \mathcal{Z}_k), \text{ for } j = 1, \dots, J_{k-1} \\ p_k(\cdot   \mathcal{Z}_k), \text{ for } j = J_{k-1} + 1, \dots, J_{k k-1} \end{cases}$ $\tilde{w}_{k k-1}^j \sim \begin{cases} \frac{f_{k k-1}(\tilde{\mathbf{g}}_{k k-1}^j   \tilde{\mathbf{g}}_{k-1}^j) \tilde{w}_{k-1}^j}{q_k(\tilde{\mathbf{g}}_{k k-1}^j   \tilde{\mathbf{g}}_{k-1}^j, \mathcal{Z}_k)} \tilde{w}_{k-1}^j, \text{ for } j = 1, \dots, J_{k-1} \\ \frac{\gamma_k(\tilde{\mathbf{g}}_{k k-1}^j)}{(J_{k k-1} - J_{k-1}) p_k(\tilde{\mathbf{g}}_{k k-1}^j   \mathcal{Z}_k)}, \text{ for } j = J_{k-1} + 1, \dots, J_{k k-1} \end{cases}$ <p><b>更新步:</b> 根据 <math>\mathcal{Z}_k</math> 更新预测粒子权重,可得 <math>\{\tilde{w}_{k k}^j, \tilde{\mathbf{g}}_{k k}^j\}_{j=1}^{J_{k k}}</math>.</p> $\tilde{w}_{k k}^j = 1 - p_{D,k}(\tilde{\mathbf{g}}_{k k-1}^j) \tilde{w}_{k k-1}^j + \sum_{\mathbf{z}_k \in \mathcal{Z}_k} \frac{p_{D,k}(\tilde{\mathbf{g}}_{k k-1}^j) f_{k k}(\mathbf{z}_k   \tilde{\mathbf{g}}_{k k-1}^j) \tilde{w}_{k k-1}^j}{\kappa_k(\mathbf{z}_k) + \sum_{j=1}^{J_{k k-1}} p_{D,k}(\tilde{\mathbf{g}}_{k k-1}^j) f_{k k}(\mathbf{z}_k   \tilde{\mathbf{g}}_{k k-1}^j) \tilde{w}_{k k-1}^j}$ <p><b>重采样步:</b> 重采样 <math>\{\frac{\tilde{w}_{k k}^j}{W_k}, \tilde{\mathbf{g}}_{k k}^j\}_{j=1}^{J_{k k}}</math>, 可得 <math>\{\frac{\tilde{w}_{k k}^j}{W_k}, \tilde{\mathbf{g}}_{k k}^j\}_{j=1}^{J_{k k}}</math>, 其中 <math>W_k = \sum_{j=1}^{J_{k k}} \tilde{w}_{k k}^j</math></p> <p><b>状态提取步:</b> 通过聚类重采样后的粒子集合 <math>\{\tilde{\mathbf{g}}_{k k}^j\}_{j=1}^{J_{k k}}</math>, 提取群目标的个数估计 <math>\hat{G}_k</math> 和状态估计 <math>\{\hat{\mathbf{g}}_{k k}^g\}_{g=1}^{\hat{G}_k}</math>, 算法细节可见2.2,2.3,2.4节.</p> <p><b>输出:</b> 重采样后的粒子和权重集合 <math>\{\tilde{w}_{k k}^j, \tilde{\mathbf{g}}_{k k}^j\}_{j=1}^{J_{k k}}</math>, 群目标个数估计 <math>\hat{G}_k</math>, 群目标状态估计 <math>\{\hat{\mathbf{g}}_{k k}^g\}_{g=1}^{\hat{G}_k}</math></p>
---

### 2.2 利用GMM 提取群目标个数和状态

令  $\tilde{\mathbf{g}}_k$  表示  $k$  时刻群目标SMC-PHDF 中经重采样后的粒子变量. 它可记为如下列向量的形式

$$\tilde{\mathbf{g}}_k = [(\tilde{\mathbf{x}}_k)^T, \tilde{X}_k(1, :), \dots, \tilde{X}_k(n_X, :)]^T \quad (8)$$

上式中  $\tilde{X}_k(i, :)$  表示矩阵  $\tilde{X}_k$  的第  $i$  行 ( $i = 1, \dots, n_X$ ).

我们用  $L_k$  个元素的GMM拟合  $\tilde{\mathbf{g}}_k$  的分布

$$f_k(\tilde{\mathbf{g}}_k | \psi_k) = \sum_{l=1}^{L_k} \pi_k^l \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{g}}_k | \boldsymbol{\mu}_k^l, \Sigma_k^l), \text{ with } \sum_{l=1}^{L_k} \pi_k^l = 1 \quad (9)$$

上式中  $\psi_k = \{\pi_k^l, \boldsymbol{\mu}_k^l, \Sigma_k^l\}_{l=1}^{L_k}$  为混合模型的参数集合.  $\pi_k^l$ ,  $\boldsymbol{\mu}_k^l$  和  $\Sigma_k^l$  分别为混合模型中第  $l$  个元素的权重, 均值和协方差. 我们用一个正态分布模型拟合由一个群目标所产生的测量而引起的粒子分布. 这样, 混合模型中正态元素的个数和均值即对应于观测区域中群目标的个数和状态.

给定  $k$  时刻的粒子集合  $\tilde{\mathcal{G}}_k = \{\tilde{\mathbf{g}}_k^j\}_{j=1}^{J_k}$  并假设集

合中的粒子满足独立性条件,可得 $\psi_k$ 的似然函数为

$$f_k(\tilde{\mathcal{G}}_k|\psi_k) = \prod_{j=1}^{J_k} f_k(\tilde{\mathbf{g}}_k^j|\psi_k) = \prod_{j=1}^{J_k} \sum_{l=1}^{L_k} \pi_k^l \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{g}}_k^j|\boldsymbol{\mu}_k^l, \Sigma_k^l) \quad (10)$$

那么, $\psi_k$  的极大似然(Maximum likelihood, ML)估计为

$$\hat{\psi}_k^{\text{ML}} = \arg \max_{\psi_k} \{\log f_k(\tilde{\mathcal{G}}_k|\psi_k)\} \quad (11)$$

若给定先验密度 $f_k(\psi_k)$ , $\psi_k$ 的最大后验(Maximum a posterior, MAP)估计为

$$\hat{\psi}_k^{\text{MAP}} = \arg \max_{\psi_k} \{\log f_k(\tilde{\mathcal{G}}_k|\psi_k) + \log f_k(\psi_k)\} \quad (12)$$

最终,由混合模型的参数估计 $\hat{\psi}_k$ 可得 $k$ 时刻群目标的个数和状态估计为

$$\hat{G}_k = \hat{L}_k, \hat{\mathcal{G}}_k = \{\hat{\boldsymbol{\mu}}_k^l\}_{l=1}^{\hat{L}_k} \quad (13)$$

### 2.3 利用EM算法估计混合模型的参数

表2.混合模型的元素管理技术

Tab.2 Strategy for managing the components of the mixture

---

**输入:** 正态元素集合 $\{\pi_k^i, \boldsymbol{\mu}_k^i, \Sigma_k^i\}_{i=1}^{L_k}$ , 删除门限 $\eta_T$ , 合并门限 $\eta_M$ , 分裂门限 $\eta_S$ .

**删除步:** for  $l = 1, \dots, L_k$ , if  $\pi_k^l > \eta_T$ , let  $l \in \mathcal{I}_k$ . end if; end for  $l$ .

**合并步:** 令  $m := 0$ , **重复执行:**

$m := m + 1, j := \arg \max_{i \in \mathcal{I}_k} \pi_k^i$ ,

$\mathcal{L}_k := \{i \in \mathcal{I}_k | |(\boldsymbol{\mu}_k^i - \boldsymbol{\mu}_k^j)^T (\Sigma_k^i)^{-1} (\boldsymbol{\mu}_k^i - \boldsymbol{\mu}_k^j)| < \eta_M\}$

$\hat{\pi}_k^m = \sum_{i \in \mathcal{L}_k} \pi_k^i, \hat{\boldsymbol{\mu}}_k^m = \frac{1}{\hat{\pi}_k^m} \sum_{i \in \mathcal{L}_k} \pi_k^i \boldsymbol{\mu}_k^i$ ,

$\hat{\Sigma}_k^m = \frac{1}{\hat{\pi}_k^m} \sum_{i \in \mathcal{L}_k} \pi_k^i (\Sigma_k^i + (\boldsymbol{\mu}_k^m - \boldsymbol{\mu}_k^i)(\boldsymbol{\mu}_k^m - \boldsymbol{\mu}_k^i)^T)$

令  $\mathcal{I}_k := \mathcal{I}_k - \mathcal{L}_k$ , 直到  $\mathcal{I}_k = \emptyset$ . 令  $\hat{L}_k := m$ .

**分裂步:** 令  $m := 0$ , for  $l = 1, \dots, \hat{L}_k$ , if  $\text{cond}(\hat{\Sigma}_k^l) > \eta_S$ ,

$m := m + 1, u_1 \sim \mathcal{B}(\cdot|2, 2), u_2 \sim \mathcal{B}(\cdot|2, 2), u_3 \sim \mathcal{B}(\cdot|1, 1)$ ,

$\hat{\pi}_k^m = \hat{\pi}_k^l u_1, \hat{\pi}_k^{m+1} = \hat{\pi}_k^l (1 - u_1)$ ,

$\hat{\boldsymbol{\mu}}_k^m = \hat{\boldsymbol{\mu}}_k^l - u_2 \sqrt{\hat{\Sigma}_k^l \frac{1-u_1}{u_1}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_k^{m+1} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_k^l - u_2 \sqrt{\hat{\Sigma}_k^l \frac{u_1}{1-u_1}}$ ,

$\hat{\Sigma}_k^m = \frac{u_3(1-u_2^2)}{u_1} \hat{\Sigma}_k^l, \hat{\Sigma}_k^{m+1} = \frac{(1-u_3)(1-u_2^2)}{1-u_1} \hat{\Sigma}_k^l, m := m + 1$ ,

else

$m := m + 1, \hat{\pi}_k^m = \hat{\pi}_k^l, \hat{\boldsymbol{\mu}}_k^m = \hat{\boldsymbol{\mu}}_k^l, \hat{\Sigma}_k^m = \hat{\Sigma}_k^l$ ,

end if; end for  $l$ ; 令  $\hat{L}_k := m$

**输出:** 经管理后的正态元素集合 $\{\hat{\pi}_k^l, \hat{\boldsymbol{\mu}}_k^l, \hat{\Sigma}_k^l\}_{l=1}^{\hat{L}_k}$ .

---

给定 $k$ 时刻重采样后的粒子集合 $\tilde{\mathcal{G}}_k = \{\tilde{\mathbf{g}}_k^j\}_{j=1}^{J_k}$ ,本节通过EM算法得到 $\psi_k$ 的ML估计.令EM算法的缺失数据为混合模型的元素标识集合 $\mathcal{E}_k = \{\mathbf{e}_k^j\}_{j=1}^{J_k}$  [14]. 其中 $\mathbf{e}_k^j$ 为 $L_k$ 维列向量, $e_k^{lj} = 1$ 或0对应于粒子 $\tilde{\mathbf{g}}_k^j$ 是或不是由混合

模型的第 $l$ 个元素产生. 因此,完整数据集可记为 $\mathcal{C}_k = \{\tilde{\mathcal{G}}_k, \mathcal{E}_k\}$ .

在群目标跟踪问题中,由于群的个数未知,相应地混合模型的元素个数 $L_k$ 也未知. 本文通过删除,合并及分裂算法来管理混合模型的元素,算法细节见表2. 表2中 $\text{cond}(\cdot)$ 表示矩阵的条件数, $\mathcal{B}(\cdot|b_1, b_2)$ 为贝塔分布的概率密度, $b_1, b_2$ 为其参数.

最终,EM算法通过求期望步,最大化步和元素管理步交替迭代更新参数估计. EM算法的完整描述见表3. 其中, $\text{round}(\cdot)$ 表示取整运算, $\text{trace}(\cdot)$ 表示矩阵的迹, $\mathbf{I}_{n_g}$ 为 $n_g \times n_g$ 维单位阵, $n_g$ 为向量 $\mathbf{g}_k$ 的维数.

表3.EM算法

Tab.3 The EM algorithm

---

**输入:** 重采样后的粒子集合 $\tilde{\mathcal{G}}_k = \{\tilde{\mathbf{g}}_k^j\}_{j=1}^{J_k}$ , 收敛门限 $\varepsilon$ .

**初始化步:** 初始化参数集 $\psi_k(0)$ .

for  $l = 1, \dots, L_k(0)$  do,

$\pi_k^l(0) = \frac{1}{L_k(0)}; \boldsymbol{\mu}_k^l(0) = \tilde{\mathbf{g}}_k^i$ , 其中  $i = \text{round}(\frac{L_k - j}{L_k(0)})$ ,

$\Sigma_k^l(0) = \frac{1}{10n_g} \text{trace}(\frac{1}{J_k} \sum_{j=1}^{J_k} (\tilde{\mathbf{g}}_k^j - \tilde{\mathbf{g}}_k^l)(\tilde{\mathbf{g}}_k^j - \tilde{\mathbf{g}}_k^l)^T) \cdot \mathbf{I}_{n_g}$ ,

其中  $\tilde{\mathbf{g}}_k = \frac{1}{J_k} \sum_{j=1}^{J_k} \tilde{\mathbf{g}}_k^j$ , end for  $l$ ; 令  $t := 0$ .

**重复执行:**

**期望步:** 计算缺失数据的条件期望 $\hat{\mathcal{E}}_k(t) = \{\hat{\mathbf{e}}_k^i(t)\}_{i=1}^{J_k}$

for  $l = 1, \dots, L_k(t)$  do, for  $j = 1, \dots, J_k$  do,

$\hat{e}_k^{lj}(t) = \text{E}[e_k^{lj} | \tilde{\mathcal{G}}_k, \psi_k(t)] = \frac{\pi_k^l(t) \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{g}}_k^j | \boldsymbol{\mu}_k^l(t), \Sigma_k^l(t))}{\sum_{l=1}^{L_k(t)} \pi_k^l(t) \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{g}}_k^j | \boldsymbol{\mu}_k^l(t), \Sigma_k^l(t))}$ ;

end for  $j$ ; end for  $l$ ;

给定 $\tilde{\mathcal{G}}_k$ 和 $\psi_k(t)$ ,计算完整数据对数似然函数的条件期望.

$\mathcal{Q}_k(\psi_k, \psi_k(t)) = \text{E}\{\log f_k(\mathcal{C}_k | \psi_k) | \tilde{\mathcal{G}}_k, \psi_k(t)\}$

$= \sum_{j=1}^{J_k} \sum_{l=1}^{L_k(t)} \hat{e}_k^{lj}(t) \log \pi_k^l(t) \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{g}}_k^j | \boldsymbol{\mu}_k^l(t), \Sigma_k^l(t))$

**最大化步:** 全局最大化 $\mathcal{Q}_k(\psi_k, \psi_k(t))$ 以更新参数 $\psi_k(t)$ .

for  $l = 1, \dots, L_k(t)$  do,

$\hat{\pi}_k^l(t) = \frac{1}{J_k} \sum_{j=1}^{J_k} \hat{e}_k^{lj}(t), \hat{\boldsymbol{\mu}}_k^l(t) = \frac{\sum_{j=1}^{J_k} \hat{e}_k^{lj}(t) \tilde{\mathbf{g}}_k^j}{\sum_{j=1}^{J_k} \hat{e}_k^{lj}(t)}$ ,

$\hat{\Sigma}_k^l(t) = \frac{\sum_{j=1}^{J_k} \hat{e}_k^{lj}(t) (\tilde{\mathbf{g}}_k^j - \hat{\boldsymbol{\mu}}_k^l(t)) (\tilde{\mathbf{g}}_k^j - \hat{\boldsymbol{\mu}}_k^l(t))^T}{\sum_{j=1}^{J_k} \hat{e}_k^{lj}(t)}$ , end for  $l$ ;

**元素管理步:**详细算法可见表2.

$\hat{\psi}_k(t) = \{\hat{\pi}_k^l(t), \hat{\boldsymbol{\mu}}_k^l(t), \hat{\Sigma}_k^l(t)\}_{l=1}^{L_k(t)}$  **Prune, Merge, Split**

$\psi_k(t+1) = \{\pi_k^l(t+1), \boldsymbol{\mu}_k^l(t+1), \Sigma_k^l(t+1)\}_{l=1}^{L_k(t+1)}$ .

令  $t := t + 1$ .

**直到**  $|\mathcal{Q}_k(\psi_k, \psi_k(t+1)) - \mathcal{Q}_k(\psi_k, \psi_k(t))| < \varepsilon \mathcal{Q}_k(\psi_k, \psi_k(t))$

**输出:** 估计的参数集合 $\hat{\psi}_k = \psi_k(t+1)$ .

---

众所周知EM算法有两个缺点:第一,对初始化敏感;第二,当似然函数分布相对较复杂时,参数估计容易收敛到局部极值点.因此,对于EM算法,混合模型的初始化元素个数应尽量多,以便于初始点能够尽可能地覆盖数据域.根据经验, $k$ 时刻的初始化元素个数通常选择 $L_k(0) > \log \varepsilon / \log(1 - \pi_k^{\min})$  [14],这里 $\pi_k^{\min}$ 是设定的最小混合权重, $\varepsilon$ 为迭代收敛门限.

## 2.4 利用MCMC 算法估计混合模型的元素参数

本节采用MCMC 算法估计混合模型的参数集合 $\psi_k$ <sup>[18]</sup>. 常用的MCMC 算法有Gibbs 采样算法和Metropolis-Hastings (M-H)采样算法<sup>[15]</sup>. 相比于EM 算法,MCMC 算法属于随机性算法,它对初始值不敏感,并且对于较复杂的参数分布,MCMC 算法更容易收敛到全局最小(大)点. 缺点是它的计算量大于EM算法,并且需要预先给定参数的先验分布.

若 $k$ 时刻 $\psi_k$ 的先验概率密度为 $f_k(\psi_k)$ ,根据贝叶斯公式,其后验概率密度为

$$f_k(\psi_k|\tilde{\mathcal{G}}_k) = \frac{\sum_{\mathcal{E}_k} f_k(\mathcal{C}_k|\psi_k)f_k(\mathcal{E}_k|\psi_k)f_k(\psi_k)}{\int \sum_{\mathcal{E}_k} f_k(\mathcal{C}_k|\psi_k)f_k(\mathcal{E}_k|\psi_k)f_k(\psi_k)d\psi_k} \quad (14)$$

上式中 $f_k(\mathcal{E}_k|\psi_k)$ 为给定 $\psi_k$ 时缺失数据 $\mathcal{E}_k$ 的条件密度, $f_k(\mathcal{C}_k|\psi_k)$ 为完整数据似然函数. MCMC算法通过迭代,可近似获得参数 $\psi_k$ 的后验概率密度 $f_k(\psi_k|\tilde{\mathcal{G}}_k)$ ,进而可得到 $\psi_k$ 的MAP估计.

表4. Gibbs采样算法

Tab.4 The Gibbs sampler

---

<b>输入:</b> 重采样后的粒子集合 $\tilde{\mathcal{G}}_k = \{\tilde{\mathbf{g}}_k^j\}_{j=1}^{J_k}$ , 迭代次数 $t_m$
<b>初始化步:</b> 除 $L_k(0)$ 外与表3相同. 令 $t := 0$
for $t = 1, \dots, t_m$ do, for $l = 1, \dots, L_k(t)$ do,
<b>采样步:</b> 根据下述条件分布,采样混合模型的权重,均值和协方差
$(\tilde{\pi}_k^l(t), \dots, \tilde{\pi}_k^{L_k(t)}(t)) \sim \mathcal{D}(\cdot n_k^l(t), \dots, n_k^{L_k(t)}(t))$ ,
$\tilde{\Sigma}_k^l(t)^{-1} \sim \mathcal{W}(\cdot n_k^l(t) + r^l, \frac{\tilde{\Sigma}_k^l(t)^{-1}}{n_k^l(t) + r^l})$ ,
$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_k^l(t) \sim \mathcal{N}(\cdot \boldsymbol{\mu}_k^l(t), \frac{\tilde{\Sigma}_k^l(t)}{n_k^l(t) + \kappa^l})$ , 其中
$n_k^l(t) = \pi_k^l(t)J_k = \sum_{j=1}^{J_k} e_k^{lj}(t)$ 表示属于第 $l$ 个元素的粒子数.
计算缺失数据的条件期望 $\hat{\mathcal{E}}_k(t) = \{\hat{\mathbf{e}}_k^j(t)\}_{j=1}^{J_k}$ .
for $j = 1, \dots, J_k$ do, $\hat{e}_k^j(t) = \frac{\tilde{\pi}_k^l(t)\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{g}}_k^j \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k^l(t), \tilde{\Sigma}_k^l(t))}{\sum_{l=1}^{L_k(t)} \tilde{\pi}_k^l(t)\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{g}}_k^j \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k^l(t), \tilde{\Sigma}_k^l(t))}$ ; end for $j$ ;
根据 $\hat{\mathcal{E}}_k(t) = \{\hat{\mathbf{e}}_k^j(t)\}_{j=1}^{J_k}$ 采样得到 $\tilde{\mathcal{E}}_k(t) = \{\tilde{\mathbf{e}}_k^j(t)\}_{j=1}^{J_k}$ .
for $j = 1, \dots, J_k$ do,
$\tau \sim \text{Mult}_{L_k(t)}(1, \hat{\mathbf{e}}_k^j(t))$ , 其中 $\hat{\mathbf{e}}_k^j(t) = [e_k^{1j}(t), \dots, e_k^{L_k(t)j}(t)]^T$ .
令 $\tilde{\mathbf{e}}_k^j(t) := \underbrace{[0, \dots, 1, 0, \dots, 0]^T}_{L_k(t)}$ ; end for $j$ ;
<b>更新步:</b> 根据 $\tilde{\mathcal{E}}_k(t)$ 和 $\tilde{\mathcal{G}}_k$ 更新混合模型的权重,均值和协方差.
$\hat{\pi}_k^l(t) = \frac{1}{J_k} \sum_{j=1}^{J_k} \tilde{e}_k^{lj}(t)$ , $\hat{\boldsymbol{\mu}}_k^l(t) = \frac{\sum_{j=1}^{J_k} \tilde{e}_k^{lj}(t)\tilde{\mathbf{g}}_k^j}{\sum_{j=1}^{J_k} \tilde{e}_k^{lj}(t)}$ ,
$\hat{\Sigma}_k^l(t) = \frac{\sum_{j=1}^{J_k} \tilde{e}_k^{lj}(t)(\tilde{\mathbf{g}}_k^j - \hat{\boldsymbol{\mu}}_k^l(t))(\tilde{\mathbf{g}}_k^j - \hat{\boldsymbol{\mu}}_k^l(t))^T}{\sum_{j=1}^{J_k} \tilde{e}_k^{lj}(t)}$ ;
<b>元素管理步:</b> 详细算法可见表2.
$\hat{\psi}_k(t) = \{\hat{\pi}_k^l(t), \hat{\boldsymbol{\mu}}_k^l(t), \hat{\Sigma}_k^l(t)\}_{l=1}^{L_k(t)} \xrightarrow{\text{Prune, Merge, Split}}$
$\psi_k(t+1) = \{\pi_k^l(t+1), \boldsymbol{\mu}_k^l(t+1), \Sigma_k^l(t+1)\}_{l=1}^{L_k(t+1)}$ .
令 $t := t + 1$ . end for $l$ ; end for $t$ ;
<b>输出:</b> 估计的参数集合 $\hat{\psi}_k = \psi_k(t+1)$ .

---

我们分别采用Dirichlet 分布, 正态分布和Wishart分布作为混合模型的权重,均值和协方差矩阵的逆的先验分布<sup>[14]</sup>. 记 $\mathcal{D}(\cdot|n^1, \dots, n^l)$ 表

示Dirichlet分布的概率密度, $n^1, \dots, n^l$ 为其参数. 记 $\mathcal{W}(\cdot|r, \Sigma)$ 表示Wishart分布的概率密度, $r, \Sigma$ 为其参数.

当混合模型的元素个数未知时,逆跳变的MCMC 算法可用于联合地估计未知的元素个数和其余参数<sup>[19]</sup>, 但它的计算量通常较大. 因此本文仍采用上节中的删除,合并与分裂算法管理混合模型的元素个数. 本节Gibbs 采样器被用于估计 $\psi_k$ . 表4给出了Gibbs 采样算法的完整描述,其中上标“ $\sim$ ”表示采样值. 此外,在表4中,

1. 迭代次数 $t_m$ 理论上应根据Markov链收敛到稳态的速率来确定<sup>[15]</sup>, 但通常可根据经验选择.

2.  $r^l$ 和 $\kappa^l$ 分别为Wishart分布和正态分布的辅助参数, 它们是为了使参数估计对先验分布的合理变化不敏感. 根据经验, 本文我们选择 $r^l = 5, \kappa^l = 1 (l = 1, \dots, L_k(t))$ ;

3. 不同于EM 算法,MCMC 算法对初始化不敏感. 因此, $k$ 时刻初始化的元素个数可选为 $L_k(0) = G^{\max}$ , 其中 $G^{\max}$ 为区域内群目标个数的最大可能值.

## 3 仿真实验

### 3.1 仿真场景设置

考虑一个杂波环境下的2维群目标运动场景. 设在所监控时间段内群目标个数及群内个体目标个数均未知且随时间变化. 监控区域范围为 $[-1000, 1000] \times [-1000, 1000] \text{m}^2$ . 监控时间长度 $T = 45\text{s}$ , 传感器采样间隔 $\Delta t = 1\text{s}$ . 记 $k$ 时刻第 $g$ 个群的质心状态为 $\mathbf{x}_k^g = [x_k^g, y_k^g, \dot{x}_k^g, \dot{y}_k^g, \ddot{x}_k^g, \ddot{y}_k^g]^T (g = 1, \dots, G_k)$ . 根据公式(2), 可知群目标的质心状态演化模型与形状矩阵演化模型相独立. 设 $k$ 时刻第 $g$ 个群的质心状态转移概率密度为

$$f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k^g|\mathbf{g}_{k-1}^g) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k^g|\Phi_{k|k-1}^g \mathbf{x}_{k-1}^g, \Delta_{k|k-1}^g) \quad (15)$$

上式中 $\Phi_{k|k-1}^g$ 为质心状态转移矩阵, $\Delta_{k|k-1}^g$ 为质心状态转移协方差阵. 假设过程噪声 $\boldsymbol{\omega}_{k|k-1}^g$ 为独立同分布的零均值高斯白噪声, 协方差阵为 $Q_{k|k-1}^g$ . 则 $\Phi_{k|k-1}^g, \Delta_{k|k-1}^g$ 及 $Q_{k|k-1}^g$ 满足关系<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned} \Phi_{k|k-1}^g &= F_{k|k-1}^g \otimes I_2, \Delta_{k|k-1}^g = D_{k|k-1}^g \otimes X_{k-1}^g, \\ Q_{k|k-1}^g &= D_{k|k-1}^g \otimes I_2, I_2 = \text{diag}(1, 1) \end{aligned} \quad (16)$$

上式中 $\otimes$ 表示Kronecker 乘积,  $\text{diag}(\cdot)$ 表示对角矩阵. 注意到在(16)式中, 群质心状态转移协方差阵 $\Delta_{k|k-1}^g$ 正比于群的形状矩阵 $X_{k-1}^g$ . 它说明群的形状越大, 群的运动不确定性也越大, 群的行为越难以预测. 令群质心状态演化过程满足匀加速模型<sup>[20]</sup>, 则

$$F_{k|k-1}^g = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} \\ & 1 & \Delta t \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{k|k-1}^g = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t \\ \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t & 1 \end{bmatrix}$$

上式中 $\sigma_w$ 为过程噪声 $\omega_k^g$ 的标准差,本仿真中令 $\sigma_w = 0.05\text{m/s}^2$ .其它的模型例如Singer模型,当前统计模型等<sup>[20]</sup>也可用于描述群质心状态的演化过程.

$k$ 时刻第 $g$ 个群的形状矩阵 $X_k^g$ 的转移概率密度可建模为<sup>[4]</sup>

$$f_{k|k-1}(X_k^g|X_{k-1}^g) = \mathcal{W}(X_k^g|\delta_{k|k-1}, \frac{X_{k-1}^g}{\delta_{k|k-1}}) \quad (17)$$

上式中 $\delta_{k|k-1} = \delta e^{-\Delta t/\tau}$ ,其中 $\delta$ 和 $\tau$ 为形状演化参数,本仿真中令 $\delta = 50, \tau = 5$ .

群内个体目标的真实航迹可根据leader-follower模型<sup>[2]</sup>或Cucker-Smale Flocking模型<sup>[21]</sup>等仿真生成.由于篇幅限制此处不再详述.群形状的真实拟合椭圆可由该群内所有个体目标的实际位置拟合得到.

令传感器位于 $[0, 0]^T$ 点,它可获得群目标的距离和角度测量, $\mathbf{z}_k = [r_k, \theta_k]^T$ .假设传感器测量噪声 $\mathbf{v}_k$ 为独立同分布的零均值高斯白噪声.下面我们采用传感器分辨率模型<sup>[3]</sup>模拟部分可分辨时的群目标测量.

若 $k$ 时刻第 $i$ 个和第 $j$ 个个体目标分别位于极坐标系下的 $[r_k^i, \theta_k^i]^T, [r_k^j, \theta_k^j]^T$ 点,则它俩不可分辨的概率 $P_u$ 满足

$$P_u(\Delta r_k^{ij}, \Delta \theta_k^{ij}) = e^{-(\frac{\Delta r_k^{ij}}{\sqrt{2}\lambda_r})^2} e^{-(\frac{\Delta \theta_k^{ij}}{\sqrt{2}\lambda_\theta})^2} \quad (18)$$

上式中 $\Delta r_k^{ij} = r_k^i - r_k^j, \Delta \theta_k^{ij} = \theta_k^i - \theta_k^j$ . $\lambda_r$ 和 $\lambda_\theta$ 分别为传感器距离和角度分辨率.本仿真中令 $\lambda_r = 10\text{m}, \lambda_\theta = 0.02\text{rad}$ .

当个体目标未发生分辨率冲突时,测量噪声协方差为 $R_k = \text{diag}(\sigma_r^2, \sigma_\theta^2)$ ,其中 $\sigma_r$ 和 $\sigma_\theta$ 分别为距离和角度测量标准差.本仿真中令 $\sigma_r = 5\text{m}, \sigma_\theta = 0.005\text{rad}$ .

如果 $n_k^u$ 个个体目标发生分辨率冲突,则它们可用位于其质心位置的不可分辨的单个目标取代

$$r_k^u = \frac{1}{n_k^u} \sum_{i \in \mathcal{P}_k} r_k^i, \quad \theta_k^u = \frac{1}{n_k^u} \sum_{i \in \mathcal{P}_k} \theta_k^i \quad (19)$$

上式中 $[r_k^u, \theta_k^u]^T$ 表示该不可分辨的个体目标位置, $\mathcal{P}_k$ 表示这 $n_k^u$ 个发生分辨率冲突的个体目标集合.此时该不可分辨的个体目标的测量噪声标准差变为

$$\sigma_{r,k}^u = \min(n_k^u \sigma_r, \lambda_r), \quad \sigma_{\theta,k}^u = \min(n_k^u \sigma_\theta, \lambda_\theta) \quad (20)$$

尽管如此,观测者无法区分第 $m$ 个测量 $\mathbf{z}_k^m$ 由可分辨的还是不可分辨的个体目标产生.即使已

知 $\mathbf{z}_k^m$ 源于不可分辨的个体目标,由于相应的不可分辨的个体目标数 $n_k^u$ 未知,因此该测量的方差仍未知.对此,文献<sup>[3]</sup>通过多假设法来判断测量源及相应的测量方差,以获取部分可分辨条件下的测量似然函数.但该方法仅适用于个体目标数较少(文献<sup>[3]</sup>中仅为2个)且已知的情况,并且计算复杂,因此它不适用于本文场景.

综上,为了给出1.3.1节中部分可分辨的群目标测量似然函数 $f_{k|k}(\mathbf{z}_k^m|\mathbf{g}_k^g)$ 的具体形式,我们需要做如下近似:

1.设群目标的反射点(此处即指可分辨的或不可分辨的个体目标)在笛卡尔坐标系下的位置 $\mathbf{p}_k^g = [p_{x,k}^g, p_{y,k}^g]^T$ 满足以群质心位置 $H_k \mathbf{x}_k^g$ 为中心,以群形状矩阵 $X_k^g$ 为方差的正态分布. $\mathbf{p}_k^g \sim \mathcal{N}(\cdot|H_k \mathbf{x}_k^g, X_k^g)$ ,其中 $H_k$ 为系数矩阵,

$$H_k = \begin{bmatrix} 1, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

2.记 $R_k^e$ 为等效测量噪声协方差阵, $R_k^e = \text{diag}((\kappa_r \sigma_r)^2, (\kappa_\theta \sigma_\theta)^2)$ ,其中参数 $\kappa_r, \kappa_\theta$ 分别满足 $1 \leq \kappa_r \leq \lambda_r/\sigma_r, 1 \leq \kappa_\theta \leq \lambda_\theta/\sigma_\theta$ . $R_k^e$ 用于折中可分辨的和不可分辨的测量噪声协方差.根据经验,在本仿真中令 $\kappa_r = 1.5, \kappa_\theta = 2$ .

最终, $f_{k|k}(\mathbf{z}_k^m|\mathbf{g}_k^g)$ 可近似建模如下

$$f_{k|k}(\mathbf{z}_k^m|\mathbf{g}_k^g) \approx \int \mathcal{N}(\mathbf{z}_k^m|h_k(\mathbf{p}_k^g), R_k^e) \mathcal{N}(\mathbf{p}_k^g|H_k \mathbf{x}_k^g, X_k^g) d\mathbf{p}_k^g \quad (22)$$

上式中 $h_k(\cdot)$ 为传感器测量模型.

$$h_k(\mathbf{p}_k^g) = \begin{bmatrix} \sqrt{(p_{x,k}^g)^2 + (p_{y,k}^g)^2} \\ \arctan(p_{y,k}^g/p_{x,k}^g) \end{bmatrix} \quad (23)$$

由(23)式可知传感器测量模型 $h_k(\cdot)$ 非线性,故似然函数(22)式没有解析的表达形式.因此,在建议的群目标SMC-PHDF的粒子更新步,需要采用Monte Carlo方法<sup>[15]</sup>近似计算每个粒子的似然概率,由于篇幅限制此处不再详述.

假设杂波为泊松点过程,强度为 $\kappa_k(\mathbf{z}_k) = \lambda c(\mathbf{z}_k)$ .本文仿真中令 $\lambda = 100$ ,它表示平均每个时刻监控区域内有100个杂波点.令 $c(\mathbf{z}_k) = \mathcal{U}(\mathbf{z}_k)$ ,它表示杂波在监控区域内满足均匀分布.

设单个群内的个体目标数为8~14个,在本仿真所给定的分辨率条件下,单个群在每个时刻只能产生4~6个传感器测量.显然在这种条件下很难对群内的所有个体分别进行跟踪.故本文只关注于群的整体行为.

既然将每个群目标视为一个整体单元,那么传感器对群目标的检测概率可定义为单个群目标在每个

时刻至少产生一个传感器测量的概率.因此,根据上述定义,在部分可分辨的群目标跟踪问题中,尽管传感器对于群内个体目标的检测概率较低,但它对于群的整体检测概率通常较高.本仿真中令传感器对群目标的检测概率为 $p_{D,k}(\mathbf{g}_k) = 0.95$ .

群目标质心的真实航迹和每个时刻群的真实形状如图1所示:

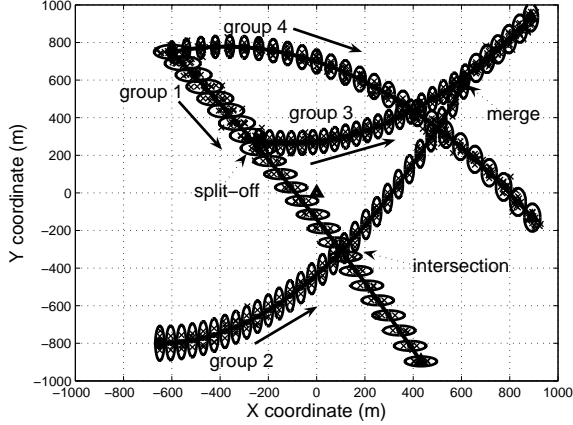


图1 群目标的真实质心航迹和形状

Fig. 1 True centroid trajectories and shapes of groups

在图1中, $\Delta$ 表示传感器位置, $\circ$ 表示群目标起点, $\square$ 表示群目标终点, $\times$ 表示群内个体目标的实际位置.箭头表示群目标运动方向.群1产生于第1秒,消亡于第25秒;群2产生于第1秒,在第18秒左右与群1相交,在第30秒时并入群3;群3在第10秒时从群1中分裂产生,在第30秒时与群2相合并,在第35秒时消亡;群4产生于第20秒,消亡于第45秒.

### 3.2 群目标SMC-PHDF 以及EM 和MCMC 状态提取算法的性能分析

在群目标PHDF中, $k$ 时刻群目标出生强度为

$$\gamma_k(\mathbf{g}_k) = \gamma_k(\mathbf{x}_k)\gamma_k(X_k) \quad (24)$$

上式中 $\gamma_k(\mathbf{x}_k)$  和 $\gamma_k(X_k)$ 分别为群质心状态和形状矩阵出生强度.在本仿真中两者分别建模为

$$\begin{cases} \gamma_k(\mathbf{x}_k) = 0.5\mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\mu}_\gamma^1, \Sigma_\gamma^1) + 0.5\mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\mu}_\gamma^2, \Sigma_\gamma^2), \\ \gamma_k(X_k) = 0.1\mathcal{W}(X_k|\delta_\gamma, \frac{X_\gamma}{\delta_\gamma}) \end{cases} \quad (25)$$

相应的参数为 $\boldsymbol{\mu}_\gamma^1 = [-600, 750, 0, 0, 0, 0]^T$ ,  $\boldsymbol{\mu}_\gamma^2 = [-650, -800, 0, 0, 0, 0]^T$ ,  $\Sigma_\gamma^1 = \Sigma_\gamma^2 = \text{diag}(900, 900, 2500, 2500, 25, 25)$ ,  $\delta_\gamma = 20$ ,  $X_\gamma = \text{diag}(400, 400)$ .

$k$ 时刻群目标它生(分裂)强度为

$$\beta_{k|k-1}(\mathbf{g}_k|\mathbf{g}_{k-1}) = \beta_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathbf{g}_{k-1})\beta_{k|k-1}(X_k|X_{k-1}) \quad (26)$$

上式中 $\beta_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathbf{g}_{k-1})$  和 $\beta_{k|k-1}(X_k|X_{k-1})$ 分别为群质心状态和形状矩阵它生强度.在本仿真中两者分别建模为

$$\begin{cases} \beta_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathbf{g}_{k-1}) = 0.25\mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, X_{k-1}), \\ \beta_{k|k-1}(X_k|X_{k-1}) = 0.25\mathcal{W}(X_k|\delta_\beta, \frac{X_{k-1}}{\delta_\beta}) \end{cases} \quad (27)$$

参数 $\delta_\beta = 25$ .

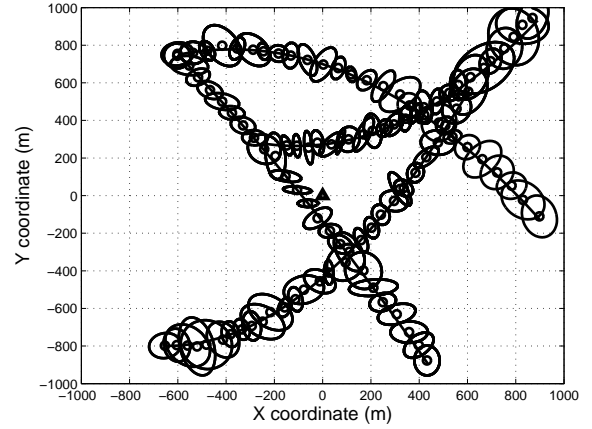


图2(a) 由EM 算法提取的群质心位置及形状估计

Fig. 2(a) Estimates of group centroid positions and shapes extracted by EM

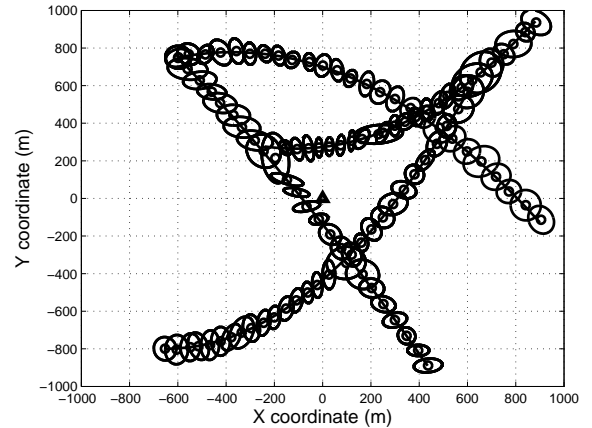


图2(b) 由MCMC 算法提取的群质心位置及形状估计  
Fig. 2(b) Estimates of group centroid positions and shapes extracted by MCMC

图2 群质心位置及形状估计(单次实验):(a)EM算法  
(b)MCMC算法

Fig. 2 Estimates of group centroid positions and shapes in one trial for group SMC-PHDF with (a)EM extraction  
(b)MCMC extraction

在本文建议的群目标SMC-PHDF 中,每个群平均采用1000个粒子点进行跟踪. EM 算法和MCMC 算法分别被用于从群目标SMC-PHDF 的重采样后

的粒子点中提取群的个数和状态. 令元素删除门限为 $\eta_T = 0.01$ ,合并门限为 $\eta_M = 5$ ,分裂门限为 $\eta_S = 20$ .在EM算法中, $k$ 时刻混合模型的初始元素个数设为 $L_k(0) = 15$ ,收敛门限为 $\varepsilon = 10^{-5}$ .在MCMC算法中,设 $L_k(0) = 4$ ,Gibbs采样器的迭代次数设为 $t_m = 25$ .分别进行100次MC仿真实验.

首先,图2展示了其中一次仿真实验得到的群的质心位置及形状估计.

在图2(a)和图2(b)中, $\Delta$ 为传感器位置, $\circ$ 为群质心位置估计,椭圆为群的形状估计,实线为群质心的真实航迹.由上两图可以看出当群相距较远时,两算法的群质心位置估计和形状估计接近于真实值.然而,当群正在分裂,合并,或交叉时,由于群相距太近甚至重叠,故这时两算法均不能正确估计出群目标的个数,质心位置和形状.这一现象与传统的用于多个个体目标跟踪的PHDF不同.这是由于在群目标SMC-PHDF中,群目标个数由元素管理技术获得,而在传统的个体目标SMC-PHDF中,个体目标个数可直接由PHD积分得到.

尽管如此,通过比较图2(a)与图2(b),我们可以清楚地看到MCMC算法相比于EM算法能够更好地提取群目标的个数,质心位置及形状.尤其在群相距较近时,前者明显优于后者.原因是MCMC算法相比EM算法更适于拟和复杂的分布.

图3展示了经100次MC仿真实验平均后得到的群目标个数估计随时间变化曲线.

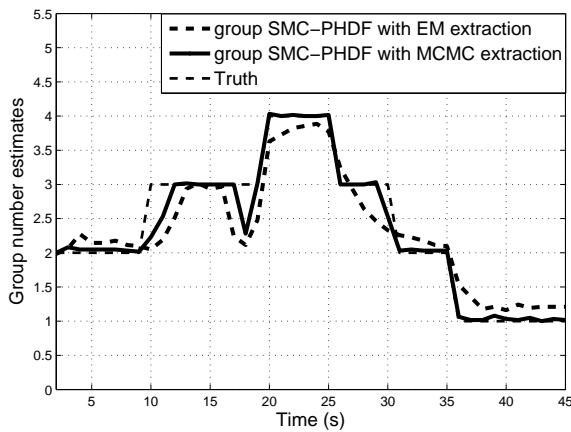


图3 群目标的个数估计随时间变化曲线(经100次MC平均)  
Fig. 3 100 MC run average of group number estimates for both methods versus time

由图3可见,当群相距较远时,两算法的群目标个数估计接近真实值.但是在群出现交叉,分裂和合并时,两算法的群目标个数估计会出现偏差.由上图还可进一步看出,由于MCMC算法在拟合较复杂的分布时通常比EM算法更加有效,因而它的群目标个数估计要优于EM算法.尤其在群相距较近时,MCMC

算法比EM算法更容易分辨出群的个数.

下面我们通过Wasserstein距离(Wasserstein distance, WD)<sup>[8]</sup>和椭圆位置误差概率(Circular position error probability,CPEP)<sup>[9]</sup>来定量地分析两算法的估计误差.

由群的椭圆形状矩阵 $X_k$ 可得该椭圆的轴为 $\mathbf{d}_k = [d_k^{\text{maj}}, d_k^{\text{min}}]^T$ ,方向角为 $\varphi_k$ .其中 $d_k^{\text{maj}}, d_k^{\text{min}}$ 分别为椭圆的长轴和短轴;方向角定义为椭圆长轴与坐标X方向之间的夹角( $0^\circ \leq \varphi_k \leq 90^\circ$ ).则给定实际的和估计的群目标状态集合 $\mathcal{G}_k$ 和 $\hat{\mathcal{G}}_k$ ,可得 $k$ 时刻群的质心状态估计以及形状估计的轴和方向角的WD为

$$\left\{ \begin{aligned} D_k^x(\hat{\mathcal{G}}_k, \mathcal{G}_k) &= \min_{C_k} \sqrt{\sum_{i=1}^{\hat{G}_k} \sum_{j=1}^{G_k} C_k^{ij} \|\hat{\mathbf{x}}_k^i - \mathbf{x}_k^j\|_2^2} \\ D_k^d(\hat{\mathcal{G}}_k, \mathcal{G}_k) &= \min_{C_k} \sqrt{\sum_{i=1}^{\hat{G}_k} \sum_{j=1}^{G_k} C_k^{ij} \|\hat{\mathbf{d}}_k^i - \mathbf{d}_k^j\|_2^2} \\ D_k^\varphi(\hat{\mathcal{G}}_k, \mathcal{G}_k) &= \min_{C_k} \sqrt{\sum_{i=1}^{\hat{G}_k} \sum_{j=1}^{G_k} C_k^{ij} \|\hat{\varphi}_k^i - \varphi_k^j\|_2^2} \end{aligned} \right. \quad (28)$$

上式中 $G_k$ 和 $\hat{G}_k$ 分别为实际的和估计的群目标个数.矩阵 $C_k$ 满足 $C_k^{ij} > 0, \sum_{j=1}^{G_k} C_k^{ij} = 1/\hat{G}_k, \sum_{i=1}^{\hat{G}_k} C_k^{ij} = 1/G_k$ . $\|\cdot\|_2$ 表示2范数. WD惩罚目标个数估计错误时的结果.

图4,图5,图6分别展示了经100次MC仿真实验平均后得到的群目标质心位置估计以及形状估计的轴和方向角的WD.

在图4,图5,图6中,虽然两者的WD在群目标个数估计错误的时刻均出现峰值,但在整个监控时间内,可以看到由MCMC算法提取的群质心位置和形状矩阵的WD明显小于由EM算法提取的结果.这是由于:首先,MCMC算法的群目标个数估计优于EM算法;第二,MCMC算法对较复杂的分布拟合效果更好,因此它在抽取群的状态时,抗杂波干扰的能力强于EM算法,所得到的群质心位置和形状估计相对更精确.此外,正如图6所示,两算法群目标形状的方向角 $\varphi_k$ 的估计精度都不高,MCMC算法的估计误差为20度左右,EM算法更差,为30度左右.这可能是由于每个群所产生的测量个数较少,以至于不能充分反映出群目标形状的方向角.

$k$ 时刻群目标的CPEP定义为

$$\begin{aligned} \text{CPEP}_k(r) &= \frac{1}{G_k} \sum_{\mathbf{x}_k \in \mathcal{G}_k} \text{Prob}\{\|H_k \hat{\mathbf{x}}_k - H_k \mathbf{x}_k\|_2 > r, \forall \hat{\mathbf{x}}_k \in \hat{\mathcal{G}}_k\} \end{aligned} \quad (29)$$

上式中 $r$ 为椭圆半径, $H_k \mathbf{x}_k, H_k \hat{\mathbf{x}}_k$ 分别表示笛卡尔坐标系下真实目标和估计目标的位置向量.本仿真中选择半径 $r = 25\text{m}$ .



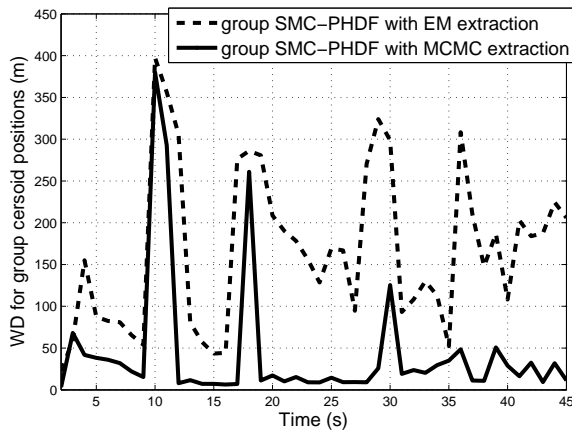


图4 群目标质心位置估计的WD(经100次MC平均)

Fig. 4 100 MC run average of WD for estimates of group centroid positions versus time

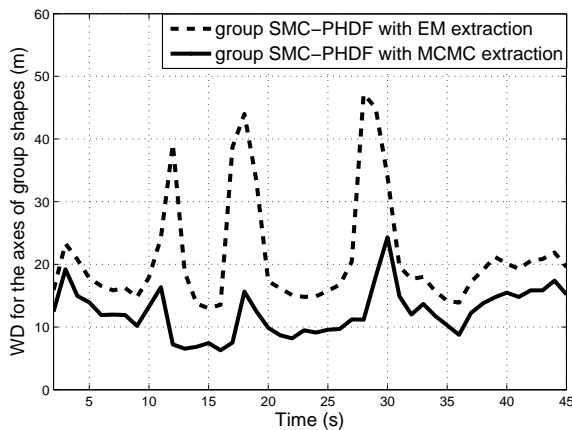


图5 群目标形状估计的轴的WD(经100次MC平均)

Fig. 5 100 MC run average of WD for estimates of major and minor axes of group shapes versus time

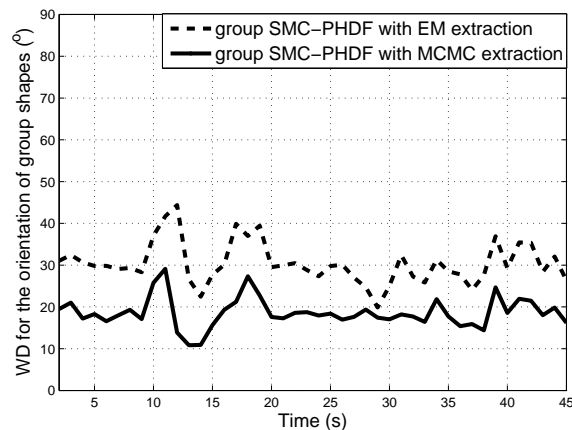


图6 群目标形状估计的方向角的WD(经100次MC平均)

Fig. 6 100 MC run average of WD for estimates of orientations of group shapes versus time

图7展示了经100次MC仿真实验平均后得到的群目标质心位置估计的CPEP.

CPEP 反映了目标估计丢失的概率. CPEP 越小说明目标估计丢失的概率越小. 由图7可清楚地看出当群目标分裂,交叉和合并时, MCMC 算法和EM算法的CPEP 都较大.它说明在这些时刻两者均容易丢失群目标估计. 然而, 正如图7所示, 在整个监控时间内MCMC 算法的CPEP 均明显小于EM算法,它说明了MCMC 算法相对于EM算法能够更精确地提取群目标的个数和状态.

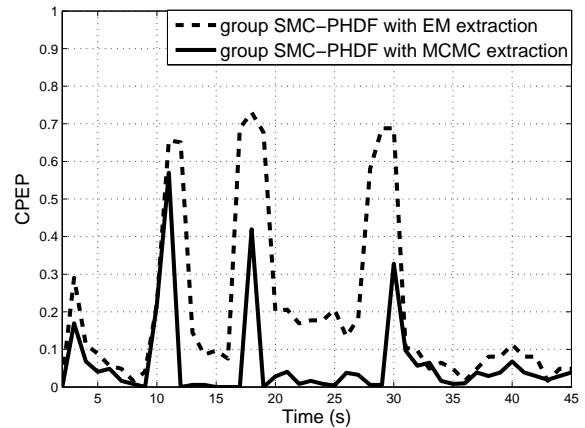


图7 群目标质心位置估计的CPEP(经100次MC平均)

Fig. 7 100 MC run average of CPEP for estimates of group centroid positions versus time

我们采用平均每步所耗费的CPU时间比较EM算法和MCMC算法在提取群目标个数和状态时的计算量大小. 用于测试算法的PC机的CPU为1.83GHz AMD Athlon (tm) XP 2500+,RAM 为512MB.通过100次MC仿真,可得EM算法平均耗时1.79秒/步;MCMC算法平均耗时6.63秒/步. 显然MCMC算法比EM算法需要耗费更多的计算时间.因此, 尽管在群相距较近时MCMC算法相比EM算法能够更好地估计群的个数, 质心状态和形状信息,但MCMC算法的计算量要大于EM算法.

#### 4 结论

本文针对杂波环境下部分可分辨的群目标跟踪问题,提出了一种基于SMC-PHDF 的群目标跟踪算法. 该算法利用GMM 拟合重采样后的粒子分布,通过估计混合模型参数可直接获得群的个数, 质心状态和形状估计.其中,EM算法和MCMC 算法分别被用于估计混合模型的参数. 混合模型的元素个数可通过删除,合并及分裂算法获得. 仿真试验表明本算法在群内个体目标部分可分辨时可有效跟踪群目标. 并且尤其在群相距较近时,用MCMC算法提取群目

标个数和状态相对于用EM算法效果更好。

## References

- 1 Waxmann M J, Drummond O E. A bibliography of cluster (group) tracking. In: Proceedings of the International Conference on Signal and Data Processing of Small Targets. Orlando, FL, USA: SPIE, 2004. 551–560
- 2 Salmond D J, Gordon N J. Group and extended object tracking. In: Proceedings of IEE Colloquium on Target Tracking. London, UK: IEE, 1999.1611–1614
- 3 Koch W, Keuk V G. Multiple hypothesis track maintenance with possibly unresolved measurements. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1997, **33**(3):883–892
- 4 Koch W. Bayesian approach to extended object and cluster tracking using random matrices. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, **44**(3):1042–1059
- 5 Mahler R. *Statistical Multisource Multitarget Information Fusion*. Norwood, MA: Artech House, 2007.
- 6 Mahler R. Multi-target Bayes filtering via first-order multi-target moments. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, **39**(4):1152–1178
- 7 Mahler R. PHD filters of higher order in target number. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(4):1523–1543
- 8 Vo B N, Singh S, Doucet A. Sequential Monte Carlo methods for multi-target filtering with random finite sets. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2005, **41**(4):1224–1245
- 9 Vo B N, Ma W K. The Gaussian mixture probability hypothesis density filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **51**(11):4091–4104
- 10 Mahler R. Detecting, tracking, and classifying group targets: a unified approach. In: Proceedings of the International Conference on Signal and Data Processing of Small Targets. Orlando, FL, USA: SPIE, 2001. 217–228
- 11 Maggio E, Taj M, Cavallaro A. Efficient multitarget visual tracking using random finite sets. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2008, **18**(8):1016–1027
- 12 Clark D E, Ruiz I T, Petillot Y, Bell J. Particle PHD filter multiple target tracking in sonar image. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(1):409–416
- 13 Clark D, Godsill S. Group target tracking with the Gaussian mixture probability hypothesis density filter. In: Proceedings of the International Conference on Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing. Melbourne, AU: ISSNIP, 2007. 149–154
- 14 McLachlan G J, Peel D. *Finite Mixture Models*. New York: Wiley, 2000.
- 15 Robert C P, Casella G. *Monte Carlo Statistical Methods*. New York: Springer-Verlag,1999.
- 16 Vermaak J, Ikoma N, Godsill S J. Sequential Monte Carlo framework for extended object tracking. *IEE Proceeding on Radar, Sonar and Navigation*, 2005, **152**(5):353–363
- 17 Clark D E, Bell J. Multi-target state estimation and track continuity for the particle PHD filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(4):1441–1453
- 18 Liu W F, Han C Z, Lian F. A clustering algorithm for multi-target state extraction based on probability hypotheses density. In: proceedings of the International Colloquium on Information Fusion. Xi'an, CN: ICIF, 2007. 22–25
- 19 Oh S, Russell S, Sastry S. Markov Chain Monte Carlo data association for multi-target tracking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009,**54**(3):481–497
- 20 Li X R, Jilkov V P. Survey of maneuvering target tracking. Part I: Dynamic models. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003,**39**(4):1333–1364
- 21 Cucker F, Smale S. Emergent behavior in flocks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(5):852–862



**连峰** 西安交通大学综合自动化研究所博士研究生。主要研究方向为为信息融合与目标跟踪。本文通信作者。

E-mail: lianfeng1981@gmail.com

(**LIAN Feng** Ph.D. candidate at the Institute of Integrated Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University. His main research interest covers information fusion and target tracking. Corresponding author of this paper.)



**韩崇昭** 西安交通大学电子与信息工程学院自动化系教授。主要研究方向为多源信息融合,随机控制与自适应控制,非线性频谱分析。

E-mail: czhan@mail.xjtu.edu.cn

(**HAN Chong-Zhao** Professor. Ph.D. at the Department of Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University. His research interest covers multisource information fusion, stochastic control and adaptive control, and nonlinear spectral analysis. )



**刘伟峰** 杭州电子科技大学自动化学院讲师。主要研究方向为为信息融合与目标跟踪。

E-mail: dashan000.liu@gmail.com

(**LIU Wei-Feng** Lectorship at the School of Automation, HANGZHOU DIANZI University. His main research interest covers information fusion and target tracking.)



**元向辉** 西安交通大学电子与信息工程学院自动化系讲师。主要研究方向为为信息融合与目标跟踪。

E-mail: xhyuan@mail.xjtu.edu.cn

(**Yuan Xiang-Hui** Lectorship at the Department of Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University. His main research interest covers information fusion and target tracking.)