

Wiener 过程性能退化产品可靠性评估的 Bayes 方法

彭宝华, 周经伦, 潘正强

(国防科技大学 信息系统与管理学院, 长沙 410073)

摘要 在分析性能退化数据模型的基础上, 针对 Wiener 过程性能退化产品提出了一种可靠性评估的 Bayes 方法, 给出了参数的递推估计. 该方法计算简单, 并且能随着性能退化试验进行不断更新可靠性评估结果, 而不需要重新处理历史数据, 因而也适合于实时可靠性评估. 最后通过金属化膜电容器可靠性评估实例分析验证了该方法的适用性, 并进行了相关讨论.

关键词 可靠性评估; 性能退化数据; Wiener 过程; Bayes 方法; 金属化膜电容器

Bayesian method for reliability assessment of products with Wiener process degradation

PENG Bao-hua, ZHOU Jing-lun, PAN Zheng-qiang

(College of Information System and Management, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract This paper presents a Bayesian method for reliability assessment of products whose performance degradation process are modeled by Wiener process. A recursive method for parameter estimation is proposed. Compared with existing maximum likelihood estimate procedure, the calculation of parameter estimation in this method is simple. Further more, the proposed method can update the reliability assessment result with new degradation test data without any consideration of old data. So the method is also suitable for real time reliability assessment. An example, the reliability assessment of metallized film capacitor, is given to show the validity. Some discussions are made and conclusion drawn.

Keywords reliability assessment; degradation data; Wiener process; Bayesian method; metallized film capacitor

1 引言

可靠性是产品的重要质量属性. 经典的可靠性评估方法是基于产品寿命数据的, 而要得到足够的寿命数据, 通常需要对产品进行大量试验. 随着科学技术的进步, 现代航天航空、国防、电子工业、通信工程等领域中许多产品都具有高可靠、长寿命、小子样的特点, 由于试验时间、费用等约束, 难以获得足够的寿命数据. 除产品的寿命数据外, 性能退化数据对于可靠性评估来说也是一个丰富的信息源^[1]. 近年来, 很多学者致力于通过产品性能退化数据进行可靠性分析的理论 and 工程应用研究.

基于性能退化数据的可靠性评估中一个重要的步骤是产品性能退化过程建模. 产品性能退化通常是在外力不断作用下内部材料逐渐变化的结果, 由于环境外力、内部材料的随机性, 产品在某一时刻的性能退化量也是随机的, 因此, 通常采用随机过程模型来描述产品的性能退化, Wiener 过程是产品性能退化过程建模中一种常用的模型^[2-5]. 产品的性能退化数据通常是在离散时间点上测量得到的. 按照测量时间点的间隔, 通常分为等间隔测量和不等间隔测量. 现有文献主要针对等时间间隔测量数据, 其中 Wiener 过程参数采用极大似然方法进行估计, 而对不等间隔测量数据难以处理. 针对这一问题, 论文提出了一种 Wiener 过程性能退化产品可靠性评估的 Bayes 方法, 给出了基于 Bayes 方法的参数递推估计. 该方法计算简单, 并且随着性能退化试验的进行, 该方法能够不断更新可靠性评估结果, 而不需要重新处理历史数据, 因而也非常适合于

收稿日期: 2008-11-13

资助项目: 国家高技术研究发展计划 (863 计划)(2006AA804806); 国家自然科学基金 (60701006, 60804054)

作者简介: 彭宝华 (1981-), 湖北武汉人, 博士研究生, 研究方向为装备系统工程, E-mail: darkbluesss@163.com.

实时可靠性评估. 论文首先分析了性能退化数据模型, 然后给出了 Wiener 过程性能退化产品可靠性评估的 Bayes 方法, 最后通过金属化膜电容器可靠性评估实例分析验证了该方法的适用性, 并进行了相关讨论.

2 性能退化数据模型

设从同一批产品中抽取 N 个样本进行性能退化试验, 对样本 i , 分别在时刻 $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{im_i}$ 对其进行 m_i 次测量, 其中 $1 \leq i \leq N$, 得到如下性能退化量测量数据:

$$\begin{matrix} X(t_{11}), & X(t_{12}), & \cdots & X(t_{1m_1}) \\ X(t_{21}), & X(t_{22}), & \cdots & X(t_{2m_2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X(t_{N1}), & X(t_{N2}), & \cdots & X(t_{Nm_N}) \end{matrix} \quad (1)$$

有些情况下, 我们更关心产品性能在两次测量之间的变化情况. 对上面的测量数据, 记 $\Delta x_{ij} = X(t_{ij}) - X(t_{i(j-1)})$, 则 Δx_{ij} 为样品 i 在时刻 t_{ij} 到 $t_{i(j+1)}$ 之间的退化量, 从而得到如下的数据:

$$\begin{matrix} \Delta x_{11}, & \Delta x_{12}, & \cdots & \Delta x_{1(m_1-1)} \\ \Delta x_{21}, & \Delta x_{22}, & \cdots & \Delta x_{2(m_2-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta x_{N1}, & \Delta x_{N2}, & \cdots & \Delta x_{1(m_N-1)} \end{matrix} \quad (2)$$

3 基于 Wiener 过程的性能退化产品可靠性评估

假设时刻 t 产品性能退化量的真实值为 $X(t)$, 在实际问题中, 由于存在测量误差等因素, 退化量实际测量值 $Z(t)$ 往往与真实值 $X(t)$ 之间存在一定的差异, 即有如下的测量方程:

$$Z(t) = X(t) + \varepsilon,$$

其中, ε 为测量误差, 本文中, 假设测量误差可以忽略, 则有

$$Z(t) = X(t).$$

假设产品的性能退化过程为 Wiener 过程, 即

$$X(t; \mu, \sigma^2) = \mu t + \sigma W(t),$$

其中 $X(t; \mu, \sigma^2)$ 为产品在时刻 t 的性能退化量, μ, σ^2 为未知参数, $W(t)$ 为标准布朗运动, $E[W(t)] = 0$, $E[W(t_1)W(t_2)] = \min(t_1, t_2)$.

假设 l 为产品的失效阈值, 即当产品的性能退化量达到 l 时产品失效, 则产品的失效时间为性能退化量首次达到失效阈值 l 的时间:

$$T = \inf\{t | X(t) \geq l, t \geq 0\} \quad (3)$$

文献 [8] 给出了 T 的分布为逆高斯分布:

$$F(t) = \Phi\left(\frac{\mu t - l}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{2\mu l/\sigma^2} \Phi\left(\frac{-\mu t - l}{\sigma\sqrt{t}}\right) \quad (4)$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 概率密度函数为

$$f(t) = \sqrt{l^2/(2\pi\sigma^2 t^3)} e^{-(l-\mu t)^2/(2\sigma^2 t)} \quad (5)$$

4 未知参数 μ, σ^2 的 Bayes 估计方法

记 $\sigma^2 = D$, 未知参数 μ, D 的验前分布为 $\pi(\mu, D)$, 由 Bayes 公式, μ, D 的验后分布为

$$\pi(\mu, D | \Delta x) \propto \pi(\Delta x | \mu, D) \cdot \pi(\mu, D) \quad (6)$$

上式中, Δx 为式 (2) 形式的性能退化数据. 记样品 i ($1 \leq i \leq N$) 的两次性能测量时间 $t_{ij}, t_{i(j+1)}$ ($t_{ij} < t_{i(j+1)}, j = 1, 2, \dots, m_i - 1$) 之间的间隔为 $\tau_{ij} = t_{i(j+1)} - t_{ij}$, 由 Wiener 过程的性质可知

$$\Delta x_{ij} \sim N(\mu\tau_{ij}, D\tau_{ij}) \quad (7)$$

由式 (7) 可知, 由于时间间隔 τ_{ij} 并不相同, Δx 并不是来源于同一分布的样本, 采用传统的极大似然方法进行参数估计时计算比较复杂, 这里给出下面的 Bayes 估计方法.

假设 τ_{ij} ($i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, m_i - 1$) 中包括 $B(1 \leq B \leq Q)$ 种不相同的时间间隔, 据此将 Δx_{ij} 分为 B 组:

$\Delta x = [\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_B] = [\Delta x_{11}, \Delta x_{12}, \dots, \Delta x_{1n_1}, \Delta x_{21}, \Delta x_{22}, \dots, \Delta x_{2n_2}, \dots, \Delta x_{B1}, \Delta x_{B2}, \dots, \Delta x_{Bn_B}]$. 对应的测量时间间隔记为 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_B$, $Q = \sum_{i=1}^B n_i = \sum_{i=1}^N (m_i - 1)$, 即 Q 为 Δx 中元素的个数. $\Delta x_b = [\Delta x_{b1}, \Delta x_{b2}, \dots, \Delta x_{bn_b}]$, $1 \leq b \leq B$ 为来源于 $N(\mu\tau_b, D\tau_b)$ 的独立样本.

估计参数 μ, D 的基本步骤是: 假设在试验之前对 μ, D 是无知的, 则其验前分布可以采用无信息验前分布 $\pi_0(\mu, D)$. 由 μ, D 的验前分布 $\pi_0(\mu, D)$ 得到 $\mu\tau_1, D\tau_1$ 的验前分布 $\pi(\mu\tau_1, D\tau_1)$, 取第一组性能退化数据 $\Delta x_1 = [\Delta x_{11}, \Delta x_{12}, \dots, \Delta x_{1n_1}]$, 由于 Δx_1 是来源于 $N(\mu\tau_1, D\tau_1)$ 的独立样本, 因而可以得到 $\mu\tau_1, D\tau_1$ 的验后分布 $\pi(\mu\tau_1, D\tau_1|\Delta x_1)$, 从而得到 μ, D 的验后分布 $\pi(\mu, D|\Delta x_1)$; 然后由 $\pi(\mu, D|\Delta x_1)$ 得到 $\pi(\mu\tau_2, D\tau_2|\Delta x_1)$ 作为 $\mu\tau_2, D\tau_2$ 的验前分布, 取 Δx_2 后得到 $\mu\tau_2, D\tau_2$ 验后分布 $\pi(\mu\tau_2, D\tau_2|\Delta x_1, \Delta x_2)$, 进而得到 μ, D 的验后分布 $\pi(\mu, D|\Delta x_1, \Delta x_2)$. 依次类推, 得到 $\pi(\mu, D|\Delta x)$. 其过程可以用式 (8) 表示:

$$\begin{aligned} \pi(\mu, D|\Delta x) &= \pi_0(\mu, D)\pi(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_B|\mu, D) \\ &\propto \pi(\mu, D|\Delta x_1)\pi(\Delta x_2, \dots, \Delta x_B|\mu, D) \\ &\propto \pi(\mu, D|\Delta x_1, \Delta x_2)\pi(\Delta x_3, \dots, \Delta x_B|\mu, D) \\ &\vdots \\ &\propto \pi(\mu, D|\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{B-1})\pi(\Delta x_B|\mu, D) \end{aligned} \tag{8}$$

式 (8) 中, $\pi(\mu, D|\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_p)$, $1 \leq p \leq B$ 表示取 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_p$ 后得到的 μ, D 的验后分布. 在给出详细步骤之前, 先给出如下定理:

定理 1 如果 μ, D 的验前分布为正态-逆 Gamma 分布, 即

$$\pi(\mu, D) \propto D^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\eta_0 D}(\mu - \mu_0)^2} \cdot D^{-(\beta_0+1)} e^{-\frac{\alpha_0}{D}},$$

则取第 b 组数据 $\Delta x_b = [\Delta x_{b1}, \Delta x_{b2}, \dots, \Delta x_{bn_b}]$ 后, μ, D 的验后分布也为正态-逆 Gamma 分布:

$$\pi(\mu, D|\Delta x_b) \propto D^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\eta_1 D}(\mu - \mu_1)^2} \cdot D^{-(\beta_1+1)} e^{-\frac{\alpha_1}{D}},$$

其中

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\eta_0}{1 + n_b \eta_0 \tau_b}, \quad \mu_1 = \frac{\mu_0 + \eta_0 n_b \Delta \bar{x}_b}{1 + \eta_0 n_b \tau_b}, \\ \alpha_1 &= \alpha_0 + \frac{n_b u}{2\tau_b} + \frac{1}{2\tau_b} \cdot \frac{n_b(\Delta \bar{x}_b - \mu_0 \tau_b)^2}{n_b \eta_0 \tau_b + 1}, \quad \beta_1 = \beta_0 + \frac{1}{2} + \frac{n_b - 1}{2} = \beta_0 + \frac{n_b}{2} \end{aligned} \tag{9}$$

式中 $\Delta \bar{x}_b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_b} \Delta x_{bi}$, $u = S_b^2 = \frac{1}{n_b} \sum_{i=1}^{n_b} (\Delta x_{bi} - \Delta \bar{x}_b)^2$ 分别为样本均值和方差.

证明 令 $\mu_b = \mu\tau_b, D_b = D\tau_b$, 则 $\mu = \frac{\mu_b}{\tau_b} = \lambda_b \mu_b, D = \frac{D_b}{\tau_b} = \lambda_b D_b$, 其中 $\lambda_b = \frac{1}{\tau_b}$, (μ, D) 的验前分布为

$$\pi(\mu, D) \propto D^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\eta_0 D}(\mu - \mu_0)^2} \cdot D^{-(\beta_0+1)} e^{-\frac{\alpha_0}{D}}.$$

由随机向量函数的分布得到

$$\pi(\mu_b, D_b) \propto |J| \cdot (\lambda_b D_b)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\eta_0 \lambda_b D_b}(\lambda_b \mu_b - \mu_0)^2} \cdot (\lambda_b D_b)^{-(\beta_0+1)} e^{-\frac{\alpha_0}{\lambda_b D_b}},$$

其中 $|J| = \begin{vmatrix} \lambda_b & 0 \\ 0 & \lambda_b \end{vmatrix} = \lambda_b^2$ 为常数, 则有

$$\begin{aligned} \pi(\mu_b, D_b) &\propto (\lambda_b D_b)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\eta_0 \lambda_b D_b}(\lambda_b \mu_b - \mu_0)^2} \cdot (\lambda_b D_b)^{-(\beta_0+1)} e^{-\frac{\alpha_0}{\lambda_b D_b}} \\ &\propto D_b^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\eta_0 D_b \tau_b}(\mu_b - \tau_b \mu_0)^2} \cdot D_b^{-(\beta_0+1)} e^{-\frac{\alpha_0 \tau_b}{D_b}}. \end{aligned}$$

由于 $\Delta x_b = [\Delta x_{b1}, \Delta x_{b2}, \dots, \Delta x_{bn_b}]$ 为服从 $N(\mu_b, D_b)$ 的独立样本, 其均值和方差分别为

$$\Delta \bar{x}_b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_b} \Delta x_{bi}, \quad u = S_b^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_b} (\Delta x_{bi} - \Delta \bar{x}_b)^2,$$

则 (\bar{x}_b, S_b^2) 为 (μ_b, D_b) 的充分统计量, μ_b, D_b 的验后分布为

$$\pi(\mu_b, D_b|\Delta x_b) = \pi(\mu_b, D_b|\Delta \bar{x}_b, S_b^2) = \pi(\Delta \bar{x}_b, S_b^2|\mu_b, D_b) \cdot \pi(\mu_b, D_b),$$

其中 $\pi(\Delta \bar{x}_b, S_b^2|\mu_b, D_b)$ 为给定 (μ_b, D_b) 之下 $(\Delta \bar{x}_b, S_b^2)$ 的联合条件密度函数. 在给定 (μ_b, D_b) 下, $\Delta \bar{x}_b \sim N(\mu_b, \frac{D_b}{n_b})$, 于是

$$\pi(\Delta \bar{x}_b|\mu_b, D_b) \propto D_b^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{n_b}{2D_b}(\Delta \bar{x}_b - \mu_b)^2}.$$

而给定 (μ_b, D_b) 时, S_b^2 的密度函数为

$$\pi(u|\mu_b, D_b) \propto u^{\frac{n_b-3}{2}} e^{-\frac{n_b}{2} \frac{u}{D_b}} D_b^{-\frac{n_b-1}{2}}, \quad u \geq 0.$$

由于 $\Delta \bar{x}_b, S_b^2$ 独立, 故

$$\pi(\Delta \bar{x}_b, u|\mu_b, D_b) \propto D_b^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{n_b}{2D_b} (\Delta \bar{x}_b - \mu_b)^2} \cdot u^{\frac{n_b-3}{2}} e^{-\frac{n_b}{2} \frac{u}{D_b}} D_b^{-\frac{n_b-1}{2}}.$$

因而

$$\begin{aligned} & \pi(\mu_b, D_b|\Delta \bar{x}_b, S_b^2) \\ &= \pi(\Delta \bar{x}_b, S_b^2|\mu_b, D_b) \cdot \pi(\mu_b, D_b) \\ &\propto D_b^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{n_b}{2D_b} (\Delta \bar{x}_b - \mu_b)^2} \cdot u^{\frac{n_b-3}{2}} e^{-\frac{n_b}{2} \frac{u}{D_b}} D_b^{-\frac{n_b-1}{2}} \cdot D_b^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\eta_0 D_b \tau_b} (\mu_b - \tau_b \mu_0)^2} \cdot D_b^{-(\beta_0+1)} e^{-\frac{\alpha_0 \tau_b}{D_b}}. \end{aligned}$$

对上式进行整理,

$$\begin{aligned} & \pi(\mu_b, D_b|\Delta \bar{x}_b, S_b^2) \\ &\propto D_b^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2D_b} (n_b + \frac{1}{\eta_0 \tau_b}) (\mu_b - \frac{\mu_0 + \eta_0 n_b \Delta \bar{x}_b}{1 + \eta_0 \tau_b n_b})^2} \cdot D_b^{-(\frac{1}{2} + \frac{n_b-1}{2} + \beta_0+1)} e^{-\frac{1}{D_b} [\alpha_0 \tau_b + \frac{n_b u}{2} + \frac{1}{2} \frac{n_b (\Delta \bar{x}_b - \mu_0 \tau_b)^2}{n_b \eta_0 \tau_b + 1}]}, \end{aligned}$$

即

$$\pi(\mu_b, D_b|\Delta \bar{x}_b, S_b^2) \propto D_b^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\eta_1^* D_b} (\mu_b - \mu_1^*)^2} \cdot D_b^{-(\beta_1^*+1)} e^{-\frac{\alpha_1^*}{D_b}},$$

其中

$$\begin{aligned} \eta_1^* &= \frac{1}{n_b + \frac{1}{\eta_0 \tau_b}} = \frac{\eta_0 \tau_b}{1 + n_b \eta_0 \tau_b}, \quad \mu_1^* = \frac{\mu_0 + \eta_0 n_b \Delta \bar{x}_b}{1 + \eta_0 \tau_b n_b} \\ \alpha_1^* &= \alpha_0 \tau_b + \frac{n_b u}{2} + \frac{1}{2} \frac{n_b (\Delta \bar{x}_b - \mu_0 \tau_b)^2}{n_b \eta_0 \tau_b + 1}, \quad \beta_1^* = \beta_0 + \frac{1}{2} + \frac{n_b - 1}{2} = \beta_0 + \frac{n_b}{2} \end{aligned}$$

同理, 由随机向量函数的分布得到 (μ, D) 的验后分布为

$$\pi(\mu, D|\Delta \bar{x}_b) \propto D^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\eta_1 D} (\mu - \mu_1)^2} \cdot D^{-(\beta_1+1)} e^{-\frac{\alpha_1}{D}},$$

其中 $\eta_1, \mu_1, \alpha_1, \beta_1$ 由式 (9) 给出, 定理得证.

在定理 1 的基础上, 给出 μ, D 的详细估计过程. 假设在试验之前对 μ, D 是无知的, 考虑采用其无信息验前分布. 由于分组数据 $\Delta x_p (1 \leq p \leq B)$ 为正态分布 $N(\mu \tau_p, D \tau_p)$ 的样本, μ, D 分别是其位置参数和尺度参数, 按照位置参数和尺度参数的不变性^[9], 取

$$\pi(\mu, D) \propto 1 \cdot \frac{1}{D} = D^{-1} \quad (10)$$

令 $\mu_1 = \mu \tau_1, D_1 = D \tau_1$, 有

$$\pi(\mu_1, D_1) \propto 1 \cdot \frac{\tau_1}{D_1} \propto D_1^{-1},$$

则, 取 $\Delta x_1 = [\Delta x_{11}, \Delta x_{12}, \dots, \Delta x_{1n_1}]$, 记 $\Delta \bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \Delta x_{1i}$, $u_1 = S_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (\Delta x_{1i} - \Delta \bar{x}_1)^2$, 由定理 1 的证明过程可知

$$\begin{aligned} \pi(\mu_1, D_1|\Delta x_1) &= \pi(\mu_1, D_1|\Delta \bar{x}_1, u_1) \propto \pi(\Delta \bar{x}_1, u_1|\mu_1, D_1) \pi(\mu_1, D_1) \\ &\propto D_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{n_1}{2D_1} (\Delta \bar{x}_1 - \mu_1)^2} \cdot D_1^{-\frac{n_1-1}{2}} e^{-\frac{n_1}{2} \frac{u_1}{D_1}} \cdot D_1^{-1} \\ &= D_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{n_1}{2D_1} (\Delta \bar{x}_1 - \mu_1)^2} \cdot D_1^{-(\beta_1^*+1)} \cdot e^{-\frac{\alpha_1^*}{D_1}}, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_1^* = \frac{n_1 u_1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} (\Delta x_{1i} - \Delta \bar{x}_1)^2$, $\beta_1^* = \frac{n_1-1}{2}$. 因而

$$\pi(\mu, D|\Delta x_1) = \pi(\mu, D|\Delta \bar{x}_1, u_1) \propto D^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\eta_1 D} (\mu - \mu_1)^2} \cdot D^{-(\beta_1+1)} \cdot e^{-\frac{\alpha_1}{D}},$$

其中 $\eta_1 = \frac{1}{\tau_1 n_1}$, $\mu_1 = \frac{\Delta \bar{x}_1}{\tau_1}$, $\alpha_1 = \frac{n_1 u_1}{2\tau_1} = \frac{1}{2\tau_1} \sum_{i=1}^{n_1} (\Delta x_{1i} - \Delta \bar{x}_1)^2$, $\beta_1 = \frac{n_1-1}{2}$, 可知 μ, D 的验后分布为正态-逆 Gamma 分布.

记 $\pi_1(\mu, D) = \pi(\mu, D|\Delta x_1)$, 则

$$\pi_2(\mu, D) = \pi(\mu, D|\Delta x_1, \Delta x_2) \propto \pi_1(\mu, D) \cdot \pi(\Delta x_2|\mu, D).$$

由定理 1 可知 $\pi_2(\mu, D)$ 也为正态-逆 Gamma 分布形式, 且其参数分别为

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \frac{1}{n_1 \tau_1 + n_2 \tau_2}, \quad \mu_2 = \frac{n_1 \Delta \bar{x}_1 + n_2 \Delta \bar{x}_2}{n_1 \tau_1 + n_2 \tau_2}, \quad \beta_2 = \frac{n_1 + n_2 - 1}{2}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2\tau_1} \sum_{i=1}^{n_1} (\Delta x_{1i} - \Delta \bar{x}_1)^2 + \frac{1}{2\tau_2} \sum_{i=1}^{n_2} (\Delta x_{2i} - \Delta \bar{x}_2)^2 + \frac{n_1 n_2}{2\tau_1 \tau_2} \frac{(n_2 \Delta \bar{x}_1 - n_1 \Delta \bar{x}_2)^2}{n_1 \tau_1 + n_2 \tau_2}. \end{aligned}$$

由 $\eta_2, \mu_2, \alpha_2, \beta_2$ 的形式可知, 先取 Δx_1 再取 Δx_2 与先取 Δx_2 再取 Δx_1 得到的 $\pi_2(\mu, D)$ 的结果相同, 因而式 (8) 中 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_B$ 的顺序对参数 μ, D 验后分布的计算没有影响.

依次类推可知 $\pi(\mu, D|\Delta x)$ 为正态-逆 Gamma 分布形式, 其分布参数 $\mu_B, \eta_B, \alpha_B, \beta_B$ 可由递推计算得到. 则有, μ 的验后边缘密度为

$$\pi(\mu|\Delta x) = \int_0^{+\infty} \pi(\mu, D|\Delta x) dD.$$

D 的验后边缘密度为

$$\pi(D|\Delta x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\mu, D|\Delta x) d\mu.$$

在平方损伤函数下, μ, D 的 Bayes 估计 $\hat{\mu}, \hat{D}$ 分别为下列条件期望

$$\hat{\mu} = E[\mu|\Delta x], \quad \hat{D} = E[D|\Delta x].$$

将 $\hat{\mu}, \hat{D}$ 代入式 (4)(5) 可以得到产品的失效分布函数和密度函数.

5 计算实例

金属化膜脉冲电容器是惯性约束聚变 (ICF) 激光装置最重要元器件之一, 为装置的能源系统提供能量, 其可靠性水平对能源系统及强激光装置本身的可靠性水平和运行维护费用有着重要的影响.

金属化膜脉冲电容器是由两张单面蒸涂厚约 20-100nm 的薄金属 (铝或铝合金) 的有机膜绕卷而成的. 由于膜在生产过程中不可避免地存在带有杂质或缺陷的区域, 从而使得这些区域的耐电强度较低, 形成“电弱点”. 电容器在工作过程中首先外加电压充电, 然后瞬间放电为能源系统提供能量. 在充放电的过程中, 由于外加电压不断作用, 电弱点处薄膜会先被击穿而形成放电通道; 薄膜被击穿的同时, 电荷通过击穿点形成大电流, 引起局部高温, 击穿点处的薄金属层会迅速蒸发并对外扩散使绝缘恢复. 这样, 局部击穿不会影响到整个电容器, 电容器仍然可以使用, 这一过程称为“自愈”^[10-11]. 单次自愈过程所造成的仅是电容量极微小的损失, 数千次的自愈才导致电容量明显减少. 随着电容器充放电次数的增加, 电容器的容值逐渐下降. 当电容器的容值下降量处于一定的界限内时, 电容器的性能还是稳定的, 但一旦超过该界限, 电容器的性能便急剧恶化, 介质损耗迅速上升, 电容量也迅速衰减, 导致电容器失效. 对于工作在高场强下的储能金属化膜脉冲电容器, 当电容量损失超过初始容值 5% 时, 每次充放电造成的电容量损失会大大上升, 使得电容器的性能不再可靠, 因此以 5% 的电容量损失为金属化膜脉冲电容器工作寿命终止的指标^[10], 其工作时间指的是充放电次数, 工作寿命指其容值下降量小于 5% 时的充放电次数.

假设在工作时间 $s, t (s < t)$ 电容器的容值分别为 $X(s), X(t)$, 则在时间段 $\Delta t = t - s$ 内容值的退化量为 $\Delta x = X(t) - X(s)$. 根据电容器容值的退化过程, Δx 是很多次“自愈”造成的微小损失的和, 而每一次“自愈”所造成的损失可以看成是相互独立的很小的随机量, 因而 Δx 是很多相互独立的随机量的和. 由中心极限定理, Δx 服从正态分布, 可以假设金属化膜电容器的电容值退化过程为 Wiener 过程 $X(t; \mu, \sigma^2) = \mu t + \sigma W(t)$, 其中 $W(t)$ 为标准布朗运动, μ, σ^2 为未知参数.

共有 8 个电容器在相同的试验环境下进行性能退化试验, 对其中的 6 个电容器, 在第 0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000 次充放电后进行测量, 另外 2 个电容器在第 0, 2000, 4000, 6000, 8000, 10000 次充放电后进行测量, 图 1 给出了电容器性能退化情况. $\Delta x = [\Delta x_1, \Delta x_2] = [\Delta x_{11}, \dots, \Delta x_{1n_1}, \Delta x_{21}, \dots, \Delta x_{2n_2}]$, 其中 $n_1 = 60, n_2 = 10$, 为了计算方便, 取时间单位为 1000 次, 则 $\Delta x_{11}, \dots, \Delta x_{1n_1} \sim N(\mu, D), \Delta x_{21}, \dots, \Delta x_{2n_2} \sim N(2\mu, 2D), \tau_1 = 1, \tau_2 = 2$.

记 $\sigma^2 = D$, 取 μ, D 的验前分布为式 (10) 形式的无信息验前分布, 则

$$\pi(\mu, D|\Delta x_1) = \pi(\mu, D|\Delta \bar{x}_1, u_1) \propto D^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\eta_1 D}(\mu - \mu_1)^2} \cdot D^{-(\beta_1+1)} \cdot e^{-\frac{\alpha_1}{D}},$$

其中 $\eta_1 = \frac{1}{n_1} = 0.0167, \mu_1 = \Delta \bar{x}_1 = 0.1353, \alpha_1 = \frac{n_1 u_1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} (\Delta x_{1i} - \Delta \bar{x}_1)^2 = 1.2197, \beta_1 = \frac{n_1 - 1}{2} = 29.5$, 即

$$\pi(\mu, D|\Delta x_1) \propto D^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{30}{D}(\mu - 0.1353)^2} \cdot D^{-30.5} \cdot e^{-\frac{1.2197}{D}}.$$

则

$$\pi(\mu, D|\Delta x) = \pi(\mu, D|\Delta x_1, \Delta x_2) \propto D^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\eta_2 D}(\mu - \mu_2)^2} \cdot D^{-(\beta_2+1)} e^{-\frac{\alpha_2}{D}},$$

其中,

$$\eta_2 = \frac{\eta_1}{1+n_2\eta_1\tau_2} = 0.0125, \quad \mu_2 = \frac{n_2\Delta\bar{x}_2 + \frac{\mu_1}{\eta_1}}{n_2\tau_2 + \frac{1}{\eta_1}} = 0.1305$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{n_2u_2}{2\tau_2} + \frac{1}{2\tau_2} \cdot \frac{n_2(\Delta\bar{x}_2 - \mu_1\tau_2)^2}{n_2\eta_1\tau_2 + 1} = 1.2982, \quad \beta_2 = \beta_1 + \frac{n_2}{2} = 34.5,$$

即 $\pi(\mu, D|x) \propto D^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\alpha_0}{D}(\mu-0.1305)^2} \cdot D^{-35.5}e^{-\frac{1.2982}{D}}$, 由前面的方法计算得到 $\hat{\mu} = 0.1219$, $\hat{D} = 0.1745$. 由于上面计算中时间单位为 1000 次充放电, 即 $\hat{\mu} = 1000\hat{\mu}_0$, $\hat{D} = 1000\hat{\sigma}^2$, 得到 $\hat{\mu}_0 = 0.0001219$, $\hat{\sigma} = 0.0132$. 图 2, 3, 4 分别给出了采用传统的极大似然方法和 Bayes 方法得到的电容器寿命分布函数、密度函数和可靠度函数. 从图中可以看出, 两种方法得到的评估结果相近. 然而采用极大似然方法进行参数估计时计算较为复杂, 这里采用 Matlab 软件得到数值解. 相对于极大似然方法, 论文提出的方法计算更简单, 并且能够适用于实时可靠性评估.

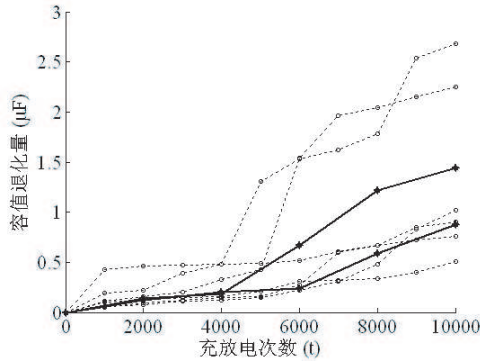


图 1 电容器容值退化过程

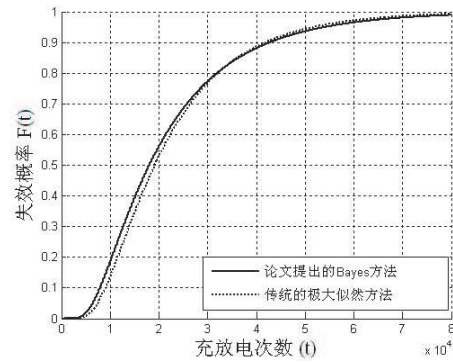


图 2 金属化膜电容器寿命分布函数

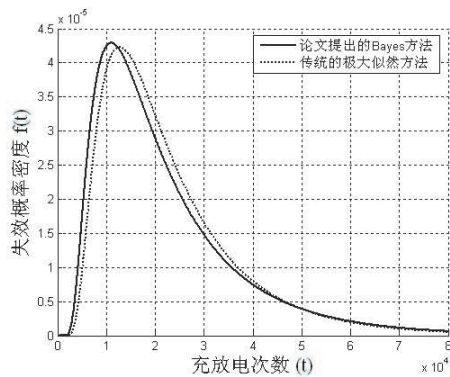


图 3 金属化膜电容器寿命密度

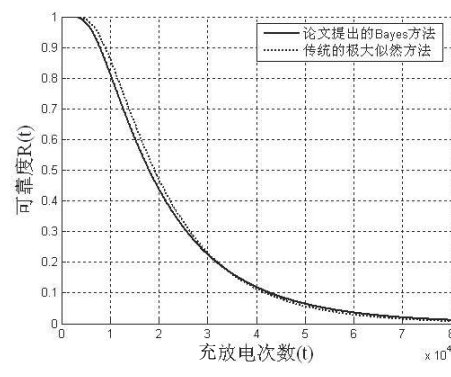


图 4 金属化膜电容器可靠度函数

6 讨论

1) 在文中参数估计过程中, 认为在试验之前对参数 μ, D 是无知的, 因而采用无信息时的验前分布. 实际上, 如果在试验之前对性能退化过程有一些了解, 并且参数 μ, D 的验前分布为正态-逆 Gamma 分布, 即

$$\pi(\mu, D) \propto D^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2\eta_0 D}(\mu-\mu_0)^2} \cdot D^{-(\beta_0+1)}e^{-\frac{\alpha_0}{D}}.$$

由定理 1 可知, 本文的结论仍然成立. 这种情况下, 我们除了利用性能退化的现场测量信息外, 还利用了历史信息对产品可靠性进行了综合评估, 这也是本文的方法相对于传统的极大似然方法的优点之一.

2) 论文采用 Wiener 过程描述产品的性能退化过程, 认为产品的性能退化为线性退化过程, 这在很多情况下与实际情况并不符合, 此时可以作如下处理

令 $\tau = \Lambda(t)$, 则 $X(t; \mu, \sigma^2) = \Lambda(t) + \sigma W(\Lambda(t))$, 即对时间进行变换, 将其转化为线性的情况, 从而采用本文的方法进行可靠性评估. 其中, $\Lambda(t)$ 的估计方法可以参考文献 [4].

7 结束语

基于性能退化数据的可靠性评估方法为高可靠、长寿命、小子样产品的可靠性评估问题提供了一种解决途径。针对 Wiener 过程性能退化产品, 论文提出一种可靠性评估的 Bayes 方法。该方法能够处理不等时间间隔的测量数据, 其计算简单; 并且, 随着性能退化试验的进行, 能够不断更新可靠性评估结果, 而不需要重新处理历史数据, 因而也非常适合于实时可靠性评估。金属化膜电容器的可靠性评估实例验证了该方法的适用性。

参考文献

- [1] Nair V N. Discussion of ‘estimation of reliability in field performance studies’ by Kalbfleisch J D and Lawless J F [J]. *Technometrics*, 1988, 30: 379–383.
- [2] Whitmore G A. Estimating degradation by a Wiener diffusion process subject to measurement error[J]. *Lifetime Data Analysis*, 1995, 1: 307–319.
- [3] Tang J, Su T S. Estimating failure time distribution and its parameters based on intermediate data from a Wiener degradation model[J]. *Naval Research Logistics*, 2008, 55: 265–276.
- [4] Wang X, Nair V. A class of degradation model based on nonhomogeneous Gaussian process[R]. Technical Report, University of Michigan, 2005.
- [5] Doksum K A, Normand S T. Gaussian models for degradation processes — Part I: Methods for the analysis of biomarker data[J]. *Lifetime Data Analysis*, 1995, 1: 131–144.
- [6] 赵建印. 基于性能退化数据的可靠性建模与应用研究 [D]. 长沙: 国防科技大学, 2005.
Zhao J Y. Study on reliability modeling and applications based on performance degradation[D]. PhD Thesis, National University of Defense Technology, 2005.
- [7] Nicolai R P, Dekker R, Noortwijk J M. A comparison of models for measurable deterioration: An application to coatings on steel structures[J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2007, 92: 1635–1650.
- [8] Chikkara R S, Folks J L. The Inverse Gaussian Distribution[M]. New York: Marcell Dekker, 1989.
- [9] 张金槐, 唐雪梅. Bayes 方法 [M]. 长沙: 国防科大出版社, 1989.
Zhang J H, Tang X M. Bayesian Methods[M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 1989.
- [10] 代新, 林福昌, 李劲, 等. 高场强下金属化膜脉冲电容器失效的原因 [J]. *高电压技术*, 2000, 26(5): 27–29.
Dai X, Lin F C, Li J, et al. Failure mechanism of metallized film pulse capacitors under high electric stress[J]. *High Voltage Engineering*, 2000, 26(5): 27–29.
- [11] 郭大得. 金属化膜电容器的损耗分析与损坏机理 [J]. *电力电容器*, 1995, 2: 12–15.
Guo D D. Degradation analysis and failure mechanism of metallized film capacitor[J]. *Power Capacitor*, 1995, 2: 12–15.
- [12] Sarieant W J, Zimheld J, Macdougall F W. Capacitors[J]. *IEEE Trans on Plasma Science*, 1998, 26(5): 1368–1392.
- [13] Sun Q, Zhou J L, Zhong Z, et al. Gauss–Poisson joint distribution model for degradation failure[J]. *IEEE Trans on Plasma Science*, 2004, 32(5): 1864–1868.
- [14] Zhao J Y, Liu F. Reliability assessment of the metallized film capacitors from degradation data[J]. *Microelectronic Reliability*, 2007, 47(2–3): 434–436.
- [15] 赵建印, 刘芳, 孙权, 等. 基于竞争失效模型的金属化膜脉冲电容器产品可靠性研究 [J]. *系统工程理论与实践*, 2006, 26(1): 60–64.
Zhao J Y, Liu F, Sun Q, et al. Reliability analysis of metallized-film pulse capacitor under competing failure modes[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2006, 26(1): 60–64.
- [16] Gopikrishnan A. Reliability inference based on degradation and time to failure data: Some models, methods and efficiency comparisons[D]. University of Michigan, 2004.