文章编号: 1000-6788(2010)03-0501-05 中图分类号: F2; C72 文献标志码: A

关联竞赛模型参与选择及均衡策略

王先甲 [1,2], 陈文磊 [1], 范文涛 [3]

(1. 武汉大学 经济与管理学院, 武汉 430072; 2. 武汉科技大学 冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室, 武汉 430081;
3. 中国科学院 武汉物理与数学所, 武汉 430071)

摘　要 在独立努力竞赛模型中, 参与人赢得竞赛的概率与自身的投入正相关. 本论文提出一种关联努力竞赛模型刻画参与人之间努力程度的关联性. 研究了关联程度强弱对参与决策的影响. 分析了当竞赛组织者设立最低参与努力程度时参与人的参与选择以及努力决策, 得到参与人赢得的概率与自身投入之间的正相关性不再成立、参与人之间不存在纯参与均衡策略的结论.

关键词 竞赛; 均衡策略; 关联努力

Equilibrium analysis for affiliated effort contests model

WANG Xian-jia[1,2], CHEN Wen-lei[1], FAN Wen-tao[3]

(1. School of Economics and Management, Wuhan University, Wuhan 430072, China; 2. Hubei Province Key Laboratory of Systems Science for Metallurgical Industry Process, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China; 3. Wuhan Institute of Physics and Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract The winning probability of player in the contest depends not only on the player's effort, but on the opposition's participate strategy. In this paper, we construct an affiliated effort Contests model to depict the paly's winning probability and test the first-order necessary conditions to the existence of Nash equilibrium. Under the power distribution value, we analyzed the Nash equilibrium of symmetric and asymmetric value model.

Keywords contest; strategy equilibria; correlated effort

1 引言

竞赛模型广泛应用于经济和社会政治行为中, 2 个或者多个参与人为获得特定的利益进行博弈. 上个世纪 70 年代开始的竞赛理论研究获得了蓬勃的发展, Vickrey[1] 提出的拍卖理论、Tullock[2] 提出的寻租研究都属于竞赛范畴. 政府或者社会团体为鼓励企业参与某个特定的技术研发或者技术创新而设立的竞赛机制、科研单位为得到特定的奖励而进行相互间的博弈、投标人为获得物品而参加拍卖等也属于竞赛模型.

竞赛中一般都假设局中人努力程度是独立的, 局中人努力程度只依赖于自身实力, 局中人赢得的概率与努力程度正相关. 在此假设下 Athey[3] 和 Reny[4] 讨论了竞赛中单调均衡策略存在的充分条件, 得出在无参与费用条件下当参与人的努力程度满足信号交叉条件时, 单调均衡是存在的. Chen[5] 分析了在多单位奖品竞赛中, 竞赛组织者为获得参与人的最大努力程度最好一次分配多单位奖品. Fey[6] 探讨了在不完全信息寻租竞赛中, 两个参与人的努力程度为离散、连续分布时的均衡策略. Ron[7] 给出了在全支付竞赛中竞赛均衡时参与人的期望收益封标解的表达式. Nti[8] 研究了参与人对奖品估价非对称分布时的最佳竞赛设计. 国内学者邱菀华 [9] 探讨竞赛的回报率和实力的差别对竞赛结果的影响.

竞赛中当参与人能观察到对手的努力程度后, 为获得奖品势必会修改自己的努力程度. 首先行动的参与人努力程度为后续参与人提供一个参考投入. 此时参与人之间的努力程度是相互关联的. 关联性在拍卖竞争、

收稿日期: 2008-11-22
资助项目: 国家自然科学基金 (60574071, 60534080)
作者简介: 王先甲 (1957–), 男, 湖北汉川人, 教授, 博士生导师, 研究方向: 管理科学与工程, 系统工程, E-mail: wangxj@whu.edu.cn; 通信作者: 陈文磊 (1980–), 男, 河南南阳人, 博士后, 研究方向: 拍卖理论, 信息论, E-mail: wleic2002@yahoo.com.cn.

游说等竞赛中是普遍存在的现象. 对手的信号可以给参与人带来正的或者负的影响: 退出竞赛或者继续加大投入. 竞赛中参与人之间努力程度的关联性如何刻画到目前为止是一个很有争议的话题, 每个理性的局中人由于知识水平、信息、个体的差异, 刻画出的关联程度不同. 对于关联模型的研究到目前为止非常少, 原因是对手的努力程度对参与人的影响程度无法用精确的数字描述. Che[10] 研究了参与人在价值相关下的最佳竞赛模型设计. Landsberger[11] 证明在参与决策只是部分均衡的时候单调均衡可能不成立.

本文提出一种关联程度模型来刻画参与人的参与决策. 在我们提出的模型中, 我们首先刻画关联程度强弱对参与人参与策略的影响, 进而分析每个参与人的参与策略选择问题. 我们证明了如果竞赛组织者设定一个最低参与努力程度下, 参与人的赢得概略与其付出不再是严格正相关的, 与对手的投入也不再是严格负相关的. 在关联努力模型下, 参与人之间不存在一个单调纯参与均衡策略. 我们的模型可以很好的解释竞赛、拍卖中如下的现象: 关联竞赛模型中当组织者设立最低努力程度时, 参与人之间不存在单调的 Nash 均衡参与策略.

2 模型描述

风险中性的两个参与人为获得某一奖品参与竞争. 假设 x_i 代表参与人 i 参与竞争的努力程度,$i=1,2$. 对于每个参与人 i 当他观察到对手努力程度后, 有两种参与策略选择: 参与竞争 $A_i=1$ 付出努力程度 x_i 或者退出竞争 $A_i=0$.

假设竞赛中参与人 i 的努力程度 x_i 服从:

$$0\le x_i\le 1,\quad x_i>\rho x_j \tag{1}$$

上的均匀分布. 其中 $\rho\in(0,1)$, $i,j\in\{1,2\}$ 刻画两个参与人努力程度关联性的大小. 我们可以看到两个参与人的努力程度是可交换且相互关联的. 在此关联努力模型下, 我们假设参与人的行动具有先后顺序.

2.1 赢得概率

不失一般性假设参与人 1 首先采取行动. 在竞赛中, 当参与人 2 观测到参与人 1 选择参与策略 $A_1=1$ 并且付出努力程度 $x_1=x$ 时, 在关联努力模型 (1) 下他的努力程度服从:

$$\begin{cases}(\rho x,1), & \text{if} \quad x\in[\rho,1]\\ \left(\rho x,\dfrac{x}{\rho}\right), & \text{if} \quad x\in[0,\rho)\end{cases} \tag{2}$$

上的均匀分布.

因此当局中人 2 观察到局中人 1 参与竞争 $A_1=1$ 并且付出努力水平 $x_1=x$ 时, 如果他选择参与策略 $A_2=1$ 付出努力程度 x_2, 那么在 $x_2>x$ 时他赢得竞赛的概率为:

$$p_2(x_2>A_1x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{1-\rho x}, & \text{if} \quad x\in[\rho,1],\\ \dfrac{1}{1+\rho}, & \text{if} \quad x\in[0,\rho).\end{cases}$$

对于首先采取行动的局中人 1 在付出 $x_1=x$ 条件下, 他在参与人 2 也参与条件下赢得竞赛的概率为:

$$p_1(x>A_2x_2)=\begin{cases}\dfrac{x-\rho x}{1-\rho x}, & \text{if} \quad x\in[\rho,1],\\ \dfrac{\rho}{1+\rho}, & \text{if} \quad x\in[0,\rho).\end{cases}$$

我们可以得到

$$\frac{\partial p_1(x)}{\partial x}=\frac{(1-\rho)}{(1-\rho x)^2}>0,\quad \frac{\partial p_2(x)}{\partial x}=\frac{(-1+\rho)}{(1-\rho x)^2}<0.$$

即: 在关联努力竞赛模型中局中人 1 的赢得概率与其付出正相关, 局中人 2 的赢得概率与对手付出负相关.

从上面的式子我们可以得到:

当 $\rho=0$ 时, 也即: 两个局中人的努力程度服从 $[0,1]$ 上独立均匀分布时, 由于第一个参与人的努力程度被第二个参与人观测到, 因此第一个参与人是不可能赢得竞赛的. 此时竞赛中的竞争程度相对比较低.

当 $\rho=1$ 时, 参与人 2 可以准确预测对手的努力程度, 关联努力程度相对较高, 当他采取参与策略时, 竞赛中的竞争程度相对比较高. 局中人参与竞争时的投入高.

当 $x>\frac{1}{2-\rho}$ 时, 局中人 1 赢得的概率严格大于局中人 2.

2.2 均衡期望收益

在关联努力模型中, 当参与人选择参与策略 $A_i = 1$ 并且付出努力水平 x_i 时他的期望收益如下:

$$u_i(x_1, x_2) := p_i(x) \times 1 - x_i.$$

依据 Nash 均衡的定义, 当竞赛中参与人努力程度达到均衡时的付出 (x_1*, x_2*) 同时满足如下的极大化问题:

$$\max_{0 \le x_1 \le 1} u_1(x_1, x_2*) \quad 和 \quad \max_{0 \le x_2 \le 1} u_2(x_1*, x_2)$$

我们称 (x_1*, x_2*) 为竞赛模型的 Nash 均衡努力水平.

因此当参与人付出努力程度 $x_1 = x$ 条件下, 参与人 2 有两中选择: 参与或者不参与.

下面的定理给出参与人 2 的最优对策.

定理 1　关联努力程度下, 对于参与人 2, 始终选择 $A_2 = 1$ 参与竞争下:

当 $x \in (\rho, 1)$ 时, $(x_1, x_2) = (0, 1 - \sqrt{1-\rho})$ 组成一个单调 Nash 均衡, 参与人 1 退出竞赛.

当 $x \in (0, \rho]$ 时, $(0, \rho)$ 组成一个 Nash 均衡策略.

证明　我们只要求出 (x_1*, x_2*) 满足如下的最大化问题.

当 $x \in [\rho, 1]$ 时:

$$\max_{0 \le x_1 \le 1} u_1(x) = \frac{x_1(1-\rho)}{1-\rho x_1} - x_1, \quad \max_{0 \le x_2 \le 1} u_2(x) = 1 - \frac{x_1(1-\rho)}{1-\rho x_1} - x_2.$$

依据一阶微分条件 (FOC) 和式子 (1) 得到

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-\rho}}{\rho}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{1-\rho}.$$

此时:

$$u_1(x_1, x_2) < 0, \quad u_2(x_1, x_2) = (1-\rho)(1 - \sqrt{1-\rho}) > 0,$$

因此参与人 1 退出竞赛付出努力程度 0.$(0, x_2)$ 组成 nash 均衡.

首先采取行动的参与人 1 如果参与竞赛并且付出努力水平 x_1 后, 参与人 2 在关联程度相对较高的 ρ 下参与竞赛, 会使得具有优先行动的参与人 1 期望收益为负, 因此参与人 1 退出竞赛. 当 $\rho \to 1$ 时参与人 2 的期望收益 $u_2(x_1, x_2) \to 0$, 即关联程度相对高的竞赛使得参与的双方无利可图.

在当 $x \in (0, \rho]$ 时,

$$p_1(x) = \frac{\rho}{1+\rho}, \qquad p_2(x) = \frac{1}{1+\rho}.$$

此时参与人 2 在观察到参与人 1 参与策略后只要付出努力 ρ, 他的赢标概率始终是大于第一个参与人, 参加竞赛显然是有利可图的, 所以此时对于参与人 1 最好是退出竞赛, (o, ρ) 组成 Nash 均衡策略.

此模型可以很好的解释如下现象: 当竞赛奖品对参与人极具吸引力而两个参与人实力相当、知己知彼情况下的竞赛会使得首先采取行动的一方无利可图; 后来参与竞赛的参与人采取跟进行为策略; 参与人的努力程度随对手的努力程度增加而增加, 竞赛的结果是首先采取行动的参与人收益为负, 后来参与人收益也降低; 当竞赛中奖品对双方吸引力都不大, 每个参与人参与愿望不强烈时, 后来的参与人由于拥有信息优势, 他很小的参与决策促使其竞争对手退出竞赛.

当参与人 2 处于相对弱势地位时, 他观测到参与人 1 的努力程度后, 采取 $A_2 = 0$, 即不参与竞赛时, 我们很容易由定理 1 得到如下结论.

推论 1　在关联竞赛模型下, 参与人 2 观察到参与人 1 的努力水平后选择 $A_2 = 0$, 即不参与竞争. 那么对于参与人 1 在付出努力水平 $x \in (0, 1)$, 他以概率 1 赢得物品.

此时的竞争完全变成参与人的参与策略选择, 首先采取行动的参与人努力程度 x 起到威胁参与人 2 的参与决策.

2.3 设置最小努力R的关联竞赛模型

对于竞赛组织者来说, 他尽可能的鼓励参与人增加努力程度参与竞争. 但是我们从定理 1 可以看到, 在关联竞赛模型下理性的参与人 2 在关联程度相对较高时为避免 “两败俱伤” 局面有可能退出竞赛或者与参与人 1 勾结削弱竞赛程度. 在 $R\&D$ 模型中, 有可能出现参与人联合起来欺骗政府的行为. 为了避免这些情况出现, 竞赛组织者一般都设定一个保留努力水平或者称为最小努力程度, 使得参与人在获得奖品时不致出现 ‘不劳而获’ 的这种局面. 在此模型中体现在设置一个保留投入 R.

定义 1 如果竞赛组织者设立一个保留努力投入 R, 当参与人 i 付出努力水平 x_i 满足 $x_i \geq R$ 时, 允许参与人参与竞赛 $A_i(x)=1$; 当 $x_i < R$ 时, 局中人不能参与竞赛 $A(x)=0$. 那么我们称策略 $A_i(x)$ 为剔除参与策略.

在剔除参与策略下, 关联竞赛模型中参与人 2 观测到参与人 1 的努力程度 $x_1 = x$ 时选择参与策略 $A_2=1$, 那么他付出努力程度 $x_2 > R$ 条件下赢得竞赛的概率为:

$$p_2(x_2>x)=\begin{cases}\dfrac{1-\max(x,R)}{1-\rho x}, & \text{if} \quad x\in[\rho,1],\\ \dfrac{\frac{x}{\rho}-\max(x,R)}{\frac{x}{\rho}-\rho x}, & \text{if} \quad x\in[R\rho,\rho),\\ 0, & \text{if} \quad x\in[0,R\rho).\end{cases}$$

在剔除参与策略下, 关联竞赛模型中首先采取行动的参与人 1 在投入 $x_1 = x$ 情况下赢得竞赛的概率:

$$p_1(x)=1-p_2(A_2x_2>x)=\begin{cases}1-\dfrac{1-\max(x,R)}{1-\rho x}, & \text{if} \quad x\in[\rho,1],\\ 1-\dfrac{\frac{x}{\rho}-\max(x,R)}{\frac{x}{\rho}-\rho x}, & \text{if} \quad x\in[R\rho,\rho),\\ 1, & \text{if} \quad x\in[0,R\rho).\end{cases}$$

在 $x\in[R\rho,\rho]$ 时,

$$\frac{\partial p_1(x)}{\partial x}=-\frac{R\rho}{(1-\rho^2)x^2}<0,\quad \frac{\partial p_2(x)}{\partial x}>0.$$

我们可以看到参与人 1 的赢得概率与其投入 $x_1 = x$ 负相关, 参与人 2 的赢得概率与其对手的投入正相关. 在剔除参与约束下, 参与人 2 选择参与竞赛时赢标的愿望加大, 因此在观测到对手的努力程度后, 势必会加大投入赢得竞赛.

假设 1 在不完全信息竞赛中参与人 i 的收益函数 $u_i(x_i,x_j)$ 关于 x_i,x_j 是非递减时, 我们称竞赛中单交叉条件 (SCC) 成立. 其中 x_i 代表自己的信号 (努力) 程度, $x_j, j\neq i$ 代表竞争对手的信号 (努力) 程度.

在我们提出的模型中单交叉条件要求在参与人 1 始终参与竞赛且付出努力 $x_1 = x$ 并且参与人 2 在剔除参与约束下参与竞赛时每个参与人的保留努力 - 收入函数 $f(x)=\frac{R}{V}=R$ 从下面与赢得收益函数 $U_i(x)=p_i(x)V=p_i(x)$ 至多交叉一次.

引理 1[12] 竞赛中存在唯一单调纯均衡策略的充分必要条件是单交叉条件成立.

引理 2[13] 在竞赛 (或全支付拍卖) 中, 参与人的努力程度相互关联 (投标估价关联) 时, 单交叉条件成立, 进而竞赛中存在一个唯一的单调 Nash 均衡策略.

定理 2 在纯参与竞赛中, 当一个参与人首先采取行动, 并且付出努力程度 $x=x_i$ 条件下, 另一个参与人在剔除参与约束下参与竞赛, 那么对于每个参与人不存在一个最佳的纯单调均衡参与策略.

证明 我们只要证明当参与人 2 在剔除参与约束下参与竞赛时, 他的赢得收入不满足信号交叉条件. 即: $f(x)=\frac{R}{1}=R$ 与 $p_2(x)$ 交叉点不只一个.

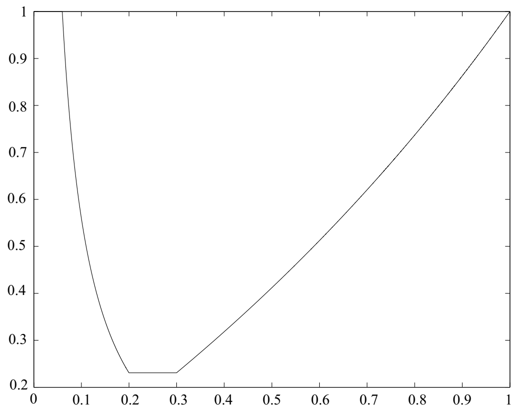
当 $R<\rho$ 时: 在 $x\in[\rho,1]$ 内, 求解: $f(x)=p_2(x)$ 可以得到: $x=\frac{1-R}{1-\rho R}$. 在 $x\in[R\rho,\rho)$ 内, $f(x)$,$p_2(x)$ 的交叉点为: $x=\frac{\rho R}{1-R+\rho^2R}$. 当 $R>\rho$ 时: 在 $x\in[\rho,1]$ 内, $f(x)$, $p_2(x)$ 的交叉点为: 在 $x\in[R\rho,\rho)$ 内, $f(x)$, $p_2(x)$ 的交叉点为: $x=\frac{\rho R}{1-R+\rho^2R}$.

我们可以得到: $f(x)=R$ 与 $p_2(x)$ 始终有至少两个或者两个以上的交叉点. 因此定理得证.

例 首先我们假定 $R=0.2,\rho=0.3,(R<\rho)$, 那么此时投标人 1 的赢得概率如图 1.

我们可以分段分析参与人 2 的对应策略. 在 $x\in(0,0.06)$, 参与人 1 以概率 1 赢得, 所以对于参与人 2 最好是选择退出竞赛. 在 $x\in(0.06,0.2)$, 参与人 1 努力程度 $x<R$, 因此他得不到物品. 这种情况出现是因为 2 个参与人对待估值偏低, 努力程度相对偏低, 组织者不愿意分派奖品,$(0,0)$ 构成均衡策略. 在 $x\in(0.2,0.3)$, 参与人 1 的赢得概率 $p_1(x)\to 0$, 此时参与人 2 在剔除参与约束下允许其参与竞赛, 他的赢得概率为 $p_2(x)=\frac{x-0.3\max(x,0.2)}{x-0.09x}\to 1$, 参与人 2 的赢得概率明显比参与人 1 大, 参与人 1 最好退出, $(0,0.2)$ 构成均衡策略, 收益为 $(0,0.8)$. 在 $x\in(0.3,1)$ 时, 从图形可以看出, 参与人 1 赢得概率为单调增加的, 参与人 2 赢得概率为单调下降的. 在 $x=0.5882$ 时, $p_1(x)=p_2(x)=0.5$, 对于理性的参与人 2 在 $x\in(0.5882,1)$ 时退出竞赛, 此时 nash 均衡为: $(0.5882,0)$, 收益为 $(0.4118.0)$; $x\in(0.3,0.5882)$ 时, 参与人 1 退出竞赛, $(0,0.3)$ 组成 Nash 均衡, 收益为 $(0,0.7)$.

在 $(R > \rho)$ 情况下, 我们可以依据图形 2 做出相应的分析.



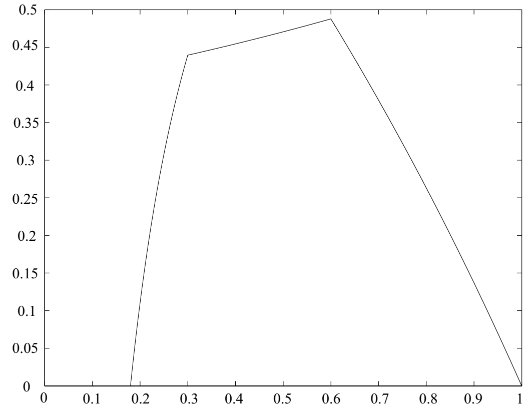


图 1 参与人 1 在 $R = 0.2$, $\rho = 0.32(R < \rho)$ 赢得概率图形　图 2 参与人 2 在 $R = 0.5$, $\rho = 0.3(R > \rho)$ 赢得概率图形

我们可以看到: 在关联努力模型下, 参与人的努力程度 x 与其赢得的概率不再是严格正相关的关系, 投入越多有可能使得赢得的概率减少. 在关联努力下, 当观察到首先行动的参与人的投入后, 后来的参与人为获得奖品势必会加大自身投入来增加赢得概率. 首先行动的参与人增加努力程度激发对手更大的投入, 竞争更加激烈.

3 结束语

在关联努力竞赛模型中, 我们给出一个简单的关联模型刻画参与人之间努力程度的关联性, 给出了参与人参与竞赛时的均衡策略行为, 得到参与人的努力程度与其赢得概率之间不再是正相关的关系. 增加努力程度可以给对手提供好的或者坏的信息: 对手要么继续加大投入, 要么退出竞赛. 当竞赛组织者设置最低的努力参与程度时, 对于后来的参与者不存在一个单调均衡策略. 我们提出的模型可以很好的解释不完全信息拍卖中投标人之间信号关联情况下每个参与人策略选择问题, 游说寻租活动中游说人之间信息交流问题.

参考文献

[1] Vickrey W. Counterspeculation, auctions and competitve sealed tenders[J]. Journal of Finance, 1961, 16: 8–37.

[2] Tullock G. The welfare costs of tariffs, monopoples and the theft[J]. Western Economic Journal, 1967, 5: 224-232.

[3] Athey S. Single crossing properties and the existence of pure strategy equilibria in games of incomplete information[J]. Econometrica, 2001, 69: 861–890.

[4] Reny P, Zamir S. On the existence of pure strategy monotone equilibria in asymmetric first-price auctions[J]. Econometrica, 2004, 72: 1105–1126.

[5] Chen C, Aner S. Allocation of prizes in asymmetric all-pay auctions[J]. European Journal of Political Economy, 2008, 24: 123–132.

[6] Mark F. Rent-seeking contests with incomplete information[J]. Public Choice, 2008, 135: 225–236.

[7] Ron S. All-pay contests[J]. Econometrica, 2009, 77(1): 71–92.

[8] Nti K O. Maximum efforts in contests with asymmetric valuations[J]. European Journal of Political Economy, 2004, 20(4): 1059–1066.

[9] 乔恒, 丘莞华. 递增奖品 R&D 竞赛的模型设计与均衡分析 [J]. 系统工程理论与实践, 2007, 4: 77–80.
Qiao H, Qiu W H. Model design and equilibrium analysis of increasing prize R&D contests[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2007, 4: 77–80.

[10] Che Y K. Optimal design of research contest[J]. American Economic Review, 2003, 96: 646–671.

[11] Michael L. Non-existence of monotone equilibria in games with correlated signals[J]. Journal of Economic Theory, 2007, 132(1): 119–136.

[12] Milgrom P, Shannon C. Monotone comparative statics[J]. Econometrica, 1994, 62: 157–180.

[13] Susan A. Single crossing properties and the existence of pure strategy equilibria in game of incomplete information[J]. Econometrica, 2001, 69(4): 861–889.