Алгебра Пуанкаре в гамильтоновом формализме релятивистской теории гравитации

В.О. Соловьев, М.В. Чичикина

13 января 2010 г.

Аннотация

Показано, что соответствующим образом выбирая входящие в гамильтониан релятивистской теории гравитации (РТГ) произвольные функции, можно получить генераторы группы Пуанкаре. Их скобки Дирака реализуют алгебру группы, в согласии с тем, что в РТГ имеются 10 интегралов движения.

1 Введение

Релятивистская теория гравитации [1] (РТГ), как почти все теории поля, может быть представлена в общековариантном виде. Пространство-время Минковского является в ней нединамической структурой, и РТГ инвариантна относительно группы Пуанкаре. В этой работе мы продемонстрируем особенности канонической реализации группы Пуанкаре в РТГ, близко следуя подходу Дирака [2], а также Редже и Тейтельбойма [3]. Мы начинаем с вычисления скобки Пуассона (которая в данном случае заменяется скобкой Дирака) двух гамильтонианов вида

$$H(N, N^i) = \int \left(N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i \right) d^3x, \qquad (1)$$

различающихся входящими в них произвольными функциями пространственных координат $N(x)$, $N^i(x)$. Согласно Дираку (см. также работу

Тейтельбойма [4]), для общековариантных теорий поля должны выполняться соотношения вида

$$\{H(\alpha,\alpha^i),H(\beta,\beta^j)\}=H(\lambda,\lambda^k), \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}\lambda &= \alpha^i\beta_{,i}-\beta^i\alpha_{,i},\\ \lambda^k &= \gamma^{k\ell}(\alpha\beta_{,\ell}-\beta\alpha_{,\ell})+\alpha^\ell\beta^k_{,\ell}-\beta^\ell\alpha^k_{,\ell}.\end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку в эти соотношения входят не только параметры α, α^i, β, β^j, но и контравариантные компоненты метрики $\gamma^{k\ell}$, Тейтельбойм показал, что в ОТО, где имеется единственная метрика пространства-времени, и она является динамической переменной, величины $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_i$ должны быть связями.

При наличии фонового пространства, и соответственно, нединамической метрики в гамильтониане, требуется, чтобы она также изменялась, как при преобразованиях координат на гиперповерхности, так и при деформациях гиперповерхности. Это обычно достигается введением дополнительных гамильтоновых переменных: функций вложения $e^\alpha(t,x^i)$ и сопряженных к ним импульсов $p_\alpha(t,x^i)$. Мы не будем вводить этих переменных, и поэтому наша скобка для гамильтонианов, зависящих от произвольных функций, не будет полностью совпадать с ответом Дирака и Тейтельбойма. Тем не менее, мы считаем полезным привести явный ответ для этой скобки. Переход к узкому классу произвольных функций, соответствующему алгебре Пуанкаре, будет проводиться на базе полученного общего результата.

2 Гамильтонов формализм РТГ

За динамические переменные в РТГ могут быть взяты, например, 10 компонент римановой метрики и поля материи (здесь это будет массивное скалярное поле без самодействия). Соответствующие 10 компонет плоской метрики Минковского считаются известными функциями координат пространства-времени. Состояние задается на каждой из однопараметрического (параметр t считается временем) семейства пространственноподобных гиперповерхностей, которая в свою очередь задается четырьмя функциями пространственных (внутренних) координат $X^\alpha =$

$e^\alpha(t,x^i)$ и из метрики выделяются 6 компонент индуцированной метрики $\gamma_{ij}=g_{\mu\nu}e_i^\mu e_j^\nu$ (здесь сделано традиционное [5] упрощение обозначений: $e_i^\alpha\equiv e^\alpha_{,i}$), точно так же, как в ОТО. Биметризм проявляется в возможности по-разному записать гамильтониан РТГ:

$$
\begin{aligned}
H &= \int \Big(N\mathcal{H}+N^i\mathcal{H}_i\Big)\,d^3x && (4)\\
&\equiv \int\Bigg(\bar N\bar{\mathcal{H}}+\bar N^i\bar{\mathcal{H}}_i\\
&+\frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa}N\left[-1-\frac{f^{\perp\perp}}{2}+\frac{f^{\perp i}f^{\perp j}\eta_{ij}}{2f^{\perp\perp}}-\frac{1}{f^{\perp\perp}}\frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{1}{2}\eta_{ij}\gamma^{ij}-1\right)\right]\Bigg), && (5)
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\bar N &= -\frac{1}{f^{\perp\perp}}\sqrt{\frac{\gamma}{\eta}}N,\quad \bar N^i=N^i-\frac{f^{\perp i}}{f^{\perp\perp}}N,\\
\mathcal{H} &= -\frac{1}{f^{\perp\perp}}\sqrt{\frac{\gamma}{\eta}}\bar{\mathcal{H}}-\frac{f^{\perp i}}{f^{\perp\perp}}\bar{\mathcal{H}}_i\\
&+\frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa}\left[-1-\frac{f^{\perp\perp}}{2}+\frac{f^{\perp i}f^{\perp j}\eta_{ij}}{2f^{\perp\perp}}-\frac{1}{f^{\perp\perp}}\frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{1}{2}\eta_{ij}\gamma^{ij}-1\right)\right],\\
\bar{\mathcal{H}} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(-\frac{1}{\kappa}\gamma\tilde R+\kappa(\mathrm{Sp}\pi^2-\frac{\pi^2}{2})+\frac{\pi_\phi^2}{2}+\frac{1}{2}\gamma\gamma^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi+\frac{1}{2}\gamma M^2\phi^2\right),\\
\mathcal{H}_i &= \bar{\mathcal{H}}_i=-2\pi^j_{i|j}+\pi_\phi\phi_{,i}. && (6)
\end{aligned}
$$

Черта над величиной обозначает определение этой величины на основе римановой метрики, а соответствующие величины без черты определяются на основе метрики Минковского. Как было показано в работе [6], 4 проекции тензора римановой метрики вдоль нормали и сопряженные к ним импульсы могут быть исключены из числа независимых гамильтоновых переменных разрешением связей 2-го рода:

$$
\begin{aligned}
f^{\perp i} &= \frac{\kappa}{m^2\sqrt{\eta}}\eta^{ij}\bar{\mathcal{H}}_j, && (7)\\
f^{\perp\perp} &= -\frac{\kappa}{m^2\sqrt{\eta}}\sqrt{\eta^{ij}\bar{\mathcal{H}}_i\bar{\mathcal{H}}_j+2\frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa}\left[\sqrt{\frac{\gamma}{\eta}}\bar{\mathcal{H}}+\frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa}\frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{1}{2}\eta_{ij}\gamma^{ij}-1\right)\right]}. && (8)
\end{aligned}
$$

и переходом к скобкам Дирака, которые в данном случае определяются формулой

$$\{F,G\} = \int\limits_{R^3} d^3x \left[\frac{\delta F}{\delta \gamma_{ij}}\frac{\delta G}{\delta \pi^{ij}} + \frac{\delta F}{\delta \phi}\frac{\delta G}{\delta \pi_\phi} - \frac{\delta F}{\delta \pi^{ij}}\frac{\delta G}{\delta \gamma_{ij}} - \frac{\delta F}{\delta \pi_\phi}\frac{\delta G}{\delta \phi}\right]. \tag{9}$$

При нахождении вариационных производных по переменным γ_{ij}, π^{ij} гамильтониан берется в виде (5), в каком он был первоначально получен в работе [6]. Тогда

$$\frac{\delta H}{\delta \phi} = -\left(\bar{N}\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\partial_j\phi\right)_{,i} + \bar{N}\sqrt{\gamma}M^2\phi - \left(\bar{N}^i\pi_\phi\right)_{,i}, \tag{10}$$

$$\frac{\delta H}{\delta \pi_\phi} = \bar{N}\frac{\pi_\phi}{\sqrt{\gamma}} + \bar{N}^i\phi_{,i}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta H}{\delta \gamma_{ij}} &= \frac{1}{2}\bar{N}\sqrt{\gamma}(\gamma^{ij}\gamma^{mn} - \gamma^{im}\gamma^{jn})\partial_m\phi\partial_n\phi + \frac{1}{2}\bar{N}\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}M^2\phi^2 \\ &+ \frac{1}{\kappa}\bar{N}\sqrt{\gamma}(R^{ij} - \gamma^{ij}R) - \kappa\frac{\bar{N}}{\sqrt{\gamma}}(\pi\pi^{ij} - 2\pi^{ik}\pi^j_k) \\ &- \frac{1}{\kappa}\sqrt{\gamma}(\bar{N}^{|ij} - \gamma^{ij}N^{|k}_{|k}) - (\pi^{ij}\bar{N}^k)_{|k} + \pi^{ik}\bar{N}^j_{|k} + \pi^{kj}\bar{N}^i_{|k} \\ &- \frac{m^2}{\kappa}\bar{N}\sqrt{\gamma}\left[\gamma^{ij} + \frac{1}{2}\eta_{kl}\left(\gamma^{ki}\gamma^{lj} - \gamma^{ij}\gamma^{kl}\right)\right],\end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}} = \bar{N}_{i|j} + \bar{N}_{j|i} + \kappa\frac{2\bar{N}}{\sqrt{\gamma}}(\pi_{ij} - \gamma_{ij}\frac{\pi}{2}). \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

3 Генераторы алгебры Пуанкаре

Среди вариантов гамильтоновой эволюции, разнообразие которых проистекает из произвола в выборе функций $N(x)$, $N^i(x)$ в (4), содержатся преобразования, сохраняющие метрику Минковского. В принципе, при их рассмотрении можно было бы не ограничивать ни класс пространственноподобных гиперповерхностей, ни системы координат на них, требуя только, чтобы векторные поля $N^\alpha = \partial X^\alpha/\partial t$ были полями векторов Киллинга метрики Минковского

$$N_{\alpha;\beta} + N_{\beta;\alpha} = 0. \tag{15}$$

Тогда $3+1$-разложение этих уравнений привело бы нас к формулам, содержащим тензор внешней кривизны гиперповерхности (по отношению к плоской метрике). Если же ограничиться гиперплоскостями, то формулы упрощаются до следующего вида

$$N_{|ij} = 0, \quad N_{i|j} + N_{j|i} = 0, \tag{16}$$

а если еще и координаты выбрать декартовыми, то метрика, индуцированная на гиперплоскостях метрикой Минковского будет простейшей $\eta_{ij} \equiv \eta_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta = \delta_{ij}$, а ковариантные производные, согласованные с ней, станут обычными частными производными. Анализ этого случая вполне достаточен для иллюстрации роли алгебры Пуанкаре. Мы получаем на гиперплоскостях функции преобразований (16) в виде

$$N = A_k x^k + a, \quad N^i = A_{ik} x^k + a^i, \tag{17}$$

где

$$A_{ik} = -A_{ki}.$$

Тогда гамильтониан (4), ввиду его линейности по функциям $N(x)$, $N^i(x)$, примет вид

$$H = P^0 a - P^i a^i + M^k A_k + \frac{1}{2} M^{ik} A_{ik}, \tag{18}$$

где

$$P^0 = -\frac{m^2}{\kappa} \int \left(1 + f^{\perp\perp}\right) d^3x, \tag{19}$$

$$P_i = -\frac{m^2}{\kappa} \int f^{\perp i} d^3x \equiv -\int \mathcal{H}_i d^3x, \tag{20}$$

$$M^{ik} = -\frac{m^2}{\kappa} \int \left(x^i f^{\perp k} - x^k f^{\perp i}\right) d^3x \equiv \int \left(x^k \mathcal{H}_i - x^i \mathcal{H}_k\right) d^3x, \tag{21}$$

$$M^k = -\frac{m^2}{\kappa} \int x^k (1 + f^{\perp\perp}) d^3x. \tag{22}$$

Обозначения формул (17), (18) выбраны для удобства сравнения с аналогичными формулами работы [3], где рассматривалась алгебра Пуанкаре в асимптотически плоском пространстве ОТО.

4 Алгебра Пуанкаре

Полезно получить алгебру скобок Дирака для гамильтонианов общего вида. С вычислительной точки зрения, при выводе удобно использовать гамильтониан в виде (5), а связи 2-го рода учитывать только после вычисления скобок, что позволяет при вычислениях не принимать во внимание зависимость $\bar{N}$, $\bar{N}^i$ от $f^{\perp\perp}$, $f^{\perp i}$. Как обычно, при расчетах отбрасываются все поверхностные интегралы, что оправдано характером асимптотического поведения метрики в массивной гравитации.

Результаты вычислений представим в форме, удобной для сравнения с аналогичной формулой ОТО:

$$
\begin{aligned}
\{H(\alpha,\alpha^i),H(\beta,\beta^j)\} \;=\; & \int d^3x\Big[\bar{\lambda}\bar{\mathcal{H}}+\bar{\lambda}^k\bar{\mathcal{H}}_k \\
+\; & \Big(\bar{\alpha}(\bar{\beta}^{k|\ell}+\bar{\beta}^{\ell|k})-\bar{\beta}(\bar{\alpha}^{k|\ell}+\bar{\alpha}^{\ell|k})\Big) \\
\times\; & \left(\frac{1}{2}\gamma_{k\ell}\bar{\mathcal{H}}-\frac{m^2}{\kappa}\sqrt{\gamma}\gamma_{k\ell}(1-\frac{1}{2}\eta_{mn}\gamma^{mn})-\frac{m^2}{\kappa}\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\eta_{k\ell}\right)\Big],
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\bar{\lambda} &= \bar{\alpha}^i\bar{\beta}_{,i}-\bar{\beta}^i\bar{\alpha}_{,i}, \\
\bar{\lambda}^k &= \gamma^{k\ell}(\bar{\alpha}\bar{\beta}_{,\ell}-\bar{\beta}\bar{\alpha}_{,\ell})+\bar{\alpha}^\ell\bar{\beta}^k_{,\ell}-\bar{\beta}^\ell\bar{\alpha}^k_{,\ell}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Отличия от ОТО проявляются здесь как в появлении членов, пропорциональных квадрату массы гравитона, так и в коэффициенте при $\bar{\mathcal{H}}$. Последнее связано с тем, что коэффициент при $\bar{\mathcal{H}}$, т.е. функция $\bar{N}$, пропорционален $\sqrt{\gamma}$. Соотношения (23), таким образом, не представляют собой алгебру деформаций гиперповерхности (2), (3), т.к. функции $\bar{N}$, $\bar{N}^i$ не являются ее параметрами и т.к. мы не включили в скобку переменные e^α, p_α.

Подстановка в соотношения (23) вместо произвольных функций α, α^i, β, β^j выражений вида (17), отвечающих преобразованиям Пуанкаре, приводит к соотношениям алгебры Пуанкаре:

$$\{P^0,P_i\} = 0, \quad \{P_i,P_j\}=0, \tag{25}$$

$$\{P^0,M^{ik}\} = 0, \quad \{P_i,M^{jk}\}=\delta_{ik}P_j-\delta_{ij}P_k, \tag{26}$$

$$\{M^{ij},M^{k\ell}\} = \delta_{ik}M^{j\ell}-\delta_{i\ell}M^{jk}+\delta_{j\ell}M^{ik}-\delta_{jk}M^{i\ell}, \tag{27}$$

$$\{P^0, M^i\} \;=\; -P^i, \quad \{P_i, M^j\} = -\delta_{ij}(P^0 - c^0), \tag{28}$$
$$\{M^k, M^{ij}\} \;=\; \delta_{kj}(M^i - c^i) - \delta_{ki}(M^j - c^j), \quad \{M^i, M^j\} = -M^{ij}. \tag{29}$$

Аддитивные вклады $c^0 = m^2/\kappa \int d^3x$ и $c^i = m^2/\kappa \int x^i d^3x$ в P_0 и M^i, не зависящие от канонических переменных и выражаюшиеся расходящимися интегралами по всему пространству, играют роль центральных зарядов в канонической реализации алгебры Пуанкаре и отвечают классической перенормировке энергии вакуума.

5 Заключение

С одной стороны, РТГ является теорией поля на фиксированном плоском фоне и поэтому к ней должны быть применимы результаты Дирака относительно параметризованных теорий поля.

С другой стороны, язык РТГ близок языку ОТО и в качестве гамильтоновых переменных в ней могут быть выбраны те же самые величины γ_{ij} и π^{ij}.

В ОТО мы получаем алгебру деформаций гиперповерхности без включения в число переменных e^α и p_α. В параметризованных теориях поля это включение необходимо. Мы останавливаемся в промежуточной позиции – используем γ_{ij}, π^{ij} и метрику Минковского без e^α, p_α – и соответственно, получаем соотношения, отличные от (2). Эти соотношения достаточны для перехода от них к алгебре Пуанкаре.

Различия между РТГ и ОТО здесь весьма существенны.

Во-первых, в ОТО величины $\bar{\mathcal{H}}$ и $\bar{\mathcal{H}}_i$ являются связями, т.е. обращаются в нуль на решениях уравнений движения. В РТГ эти величины отличны от нуля и например $\bar{\mathcal{H}}_i$ оказывается пропорциональной плотности импульса.

Во-вторых, в ОТО поля (величины $\gamma_{ij} - \eta_{ij}$) убывают медленно, и при вычислении скобок Пуассона, соответствующих алгебре Пуанкаре, необходимо сохранять поверхностные интегралы. В РТГ все поверхностные интегралы отбрасываются, т.к. $\gamma_{ij} - \eta_{ij}$ убывают быстро.

Отсутствие связей первого рода приводит к тому, что гамильтонианы РТГ, в частности, генераторы группы Пуанкаре, в отличие от гамильтонианов ОТО, не сводятся к поверхностным интегралам на решениях уравнений движения. Таким образом, в рамках РТГ определена плотность энергии-импульса и других интегралов движения.

Вопросы канонического квантования мы надеемся рассмотреть в следующих работах.

Список литературы

[1] Логунов А.А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 2006.

[2] Dirac P.A.M. Lectures on Quantum Mechanics. Yeshiva Univ., N.Y., 1964. (Имеется перевод: П.А.М. Дирак. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968)

[3] Regge T., Teitelboim C. Ann. of Phys. v.88 (1974) 286-318.

[4] Teitelboim C. Ann. of Phys. v.79 (1973) 542-557.

[5] Kuchař K. J. Math. Phys. v.17 (1977) 777-791; 792-800; 801-820; 18 (1978) 1589-1597.

[6] Соловьев В.О., Чичикина М.В. Канонический формализм релятивистской теории гравитации. arXiv:0812.4616v1