

## ◎图形、图像、模式识别◎

## 代数曲线分段逼近的误差分析

梁锡坤

LIANG Xi-kun

杭州师范大学 信息科学与工程学院, 杭州 310018

College of Information Science and Engineering, Hangzhou Normal University, Hangzhou 310018, China

E-mail: schenken@163.com

LIANG Xi-kun. Error analysis for segment approximation to algebraic curve. Computer Engineering and Applications, 2010, 46(7): 155-157.

**Abstract:** Based on the error function of the segment approximation to algebraic curve, the profound theoretical analysis is developed. The general algorithm of the error bound is given according to the error formula. A new error is defined with intuitive geometric sense and simple calculation. With the numerical experiment, the practicality and effectiveness of the new error are demonstrated.

**Key words:** algebraic curve; segment approximation; quadratic Bézier curve; error analysis

**摘要:** 针对代数曲线分段逼近的误差函数, 展开深入的理论分析, 给出了由误差公式确定误差界的一般算法。定义了一种新型误差, 它具有几何意义直观、计算比较简单的特征。结合数值实例, 验证了新型误差的实用价值。

**关键词:** 代数曲线; 分段逼近; 二次 Bézier 曲线; 误差分析

**DOI:** 10.3778/j.issn.1002-8331.2010.07.047 **文章编号:** 1002-8331(2010)07-0155-03 **文献标识码:** A **中图分类号:** TP391

曲线的参数表示和代数形式在几何实体造型中各有优缺点, 计算机辅助几何设计(CAGD)中表示同时采用两种表示法, 两者之间的相互转化成为必须解决的问题。由于大部分代数曲线都不能精确参数化, 近似参数化问题成为人们关注的焦点。在各国学者的共同努力下, 有关研究工作已取得一些重要成果, 如线性逼近方法<sup>[1]</sup>, 多边形逼近技术<sup>[2]</sup>, 可变的 B 样条曲线逼近方案<sup>[3]</sup>, 特殊情形的有理逼近手段<sup>[4]</sup>, 分段有理逼近途径<sup>[5]</sup>, 区间三次 Bézier 曲线逼近算法<sup>[6]</sup>。值得注意的是, 文献<sup>[7]</sup>在总结上述各种算法的优缺点的基础上, 给出了代数曲线的分段有理二次曲线逼近理论的比较完整的论述, 该文在对代数曲线进行拓扑分析的基础上, 提出了曲线的最少分段方法, 进一步论述了基于“肩点”到“肩点”最小距离逼近算法, 并成功地将逼近算法推广到三维曲线的情形。

实际上, 不论采用哪种近似参数化方法, 误差的分析与计算都是不容回避的问题。文献<sup>[7]</sup>给出了误差的计算公式, 并采用在参数区间离散采样的方法计算具体的逼近误差。这里, 经过对该误差公式的进一步分析, 讨论了由给定的代数曲线及其逼近的参数曲线直接确定理论误差上界的方法, 完善了代数曲线分段二次逼近的误差分析与计算问题。另一方面, 考虑到几何意义和计算复杂性, 定义了一种新型的误差, 并通过数值实

例验证了它的应用价值。

## 1 分段二次逼近的误差函数与误差界

### 1.1 误差函数

设代数曲线为  $C: f(x, y) = 0$ , 其分段逼近的二次 Bézier 曲线<sup>[7]</sup>为:

$$P(t) = \frac{P_0 \varphi_0(t) + \omega P_1 \varphi_1(t) + P_2 \varphi_2(t)}{\varphi_0(t) + \omega \varphi_1(t) + \varphi_2(t)}$$

其中,  $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  为控制顶点,  $1, \omega, 1$  为权因子,  $\varphi_0(t) = (1-t)^2, \varphi_1(t) = 2t(1-t), \varphi_2(t) = t^2, t \in [0, 1]$  为二次 Bernstein 多项式。

误差函数<sup>[7]</sup>为:

$$e(P(t), C) = e(t) = \frac{f(x(t), y(t))}{[\int_x^2(x(t), y(t)) + \int_y^2(x(t), y(t))]^{\frac{1}{2}}} \quad (1)$$

在实际计算时, 采用如下的公式<sup>[7]</sup>:

$$e(P(t), C) = \max_i (|e(t_i)|) \quad (2)$$

不难发现, 这相当于在参数区间 $[0, 1]$ 上离散采样来计算误差的近似值, 结果和  $n$  的取值有关,  $n$  越大(采样点越多), 计算结果越准确。

**基金项目:** 安徽省自然科学基金(the Natural Science Foundation of Anhui Province of China under Grant No.03046102); 浙江省教育厅科研基金(No.20050718)。

**作者简介:** 梁锡坤(1968-), 男, 博士, 副教授, 硕士生导师, 主要研究兴趣: 数值逼近, 计算机辅助几何设计, 智能信息处理。

**收稿日期:** 2008-09-08 **修回日期:** 2008-10-26

### 1.2 误差界

从理论上看,根据式(1)计算误差相当于求解最优化问题:

$$e(P(t), C) = \max_{0 \leq t \leq 1} (e(t))$$

引入  $A(t) = f_x^2(x(t), y(t)) + f_y^2(x(t), y(t))$ , 将  $e(t)$  表示为:

$$e(t) = \frac{f(x(t), y(t))}{A^{1/2}(t)}, t \in [0, 1]$$

上式两边对  $t$  求导得:

$$\frac{de}{dt} = \frac{B(t)(\frac{dx}{dt}) + C(t)(\frac{dy}{dt})}{A^{3/2}(t)} \quad (3)$$

其中

$$B(t) = f_x \cdot A(t) + f_x \cdot f_{xx} + f_y \cdot f_{xy}$$

$$C(t) = f_y \cdot A(t) + f_y \cdot f_{xy} + f_x \cdot f_{yx}$$

可以求得:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{D(t)}{[\varphi_0(t) + \omega\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]^2} \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{E(t)}{[\varphi_0(t) + \omega\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]^2}$$

其中

$$D(t) = (x_0 + x_2)(4t^3 - 6t^2 + 2t) + \omega(x_0 + x_1)(-8t^3 + 18t^2 - 12t + 2) + \omega(x_1 + x_2)(-8t^3 + 6t^2)$$

$$E(t) = (y_0 + y_2)(4t^3 - 6t^2 + 2t) + \omega(y_0 + y_1)(-8t^3 + 18t^2 - 12t + 2) + \omega(y_1 + y_2)(-8t^3 + 6t^2)$$

根据式(3), (4)可得:

$$\frac{de}{dt} = \frac{B(t)D(t) + C(t)E(t)}{A^{3/2}(t)[\varphi_0(t) + \omega\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]^2}$$

由  $\frac{de}{dt} = 0$  易知

$$B(t)D(t) + C(t)E(t) = 0, t \in [0, 1] \quad (5)$$

在给定  $f(x, y), P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \omega$  的条件下, 式(4)最终可以转化为关于变量  $t$  的代数方程, 先求出它在区间  $[0, 1]$  上的零点, 进而求出式(1)的最大值。

这样, 在给定代数曲线  $C$  及其二次 Bézier 逼近  $P(t)$  的情形下, 根据式(4)可以计算误差函数(1)的上界。

需要说明的是, 虽然这里给出了计算误差理论上限的方案, 但在计算过程中可能遭遇到困难, 这是因为求解过程涉及到有理函数的一系列计算和非线性方程的求解问题, 计算的复杂度较高。因而, 寻求实用的误差计算方案显得十分重要。公式(2)提供了一种关于误差(1)的近似计算方法, 取得较好的实际应用效果。这里, 考虑到直观的几何意义, 给出另一种计算较为简单的误差概念。

### 2 一种新型误差——“纵向误差”

Ahn 和 Floater 在讨论二次有理 Bézier 曲线逼近柱面螺旋线<sup>[8-12]</sup>的误差时, 曾经就 Hausdorff 距离得出如下结论。

$$d_H(h, r) \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |h(\theta(t)) - r(t)|$$

这里,  $h(\theta)$  表示柱面螺旋线段,  $r(t)$  为二次有理 Bézier 曲线段,  $d_H(h, r)$  表示两者的 Hausdorff 距离。同时, 上述代数曲线段  $S$  和它的逼近曲线段  $S_a$  之间的误差函数也是基于 Hausdorff 距

离<sup>[7]</sup>  $e(S, S_a) = \max_{P \in S} \max_{P' \in S_a} d(P, P')$  定义的。受此启发, 给出如下的新型误差。

**定义 1 (纵向误差)** 设  $S$  为代数曲线段,  $S_a$  为逼近曲线段。在参数域  $[0, 1]$  上的任意取一点  $t_i = i/n, 0 \leq i \leq n, n \in N$ , 记  $S_a$  上的对应点为  $(x(t_i), y(t_i))$ ,  $S$  上的对应点为  $(x(t_i), \hat{y}(t_i))$ , 定义逼近误差为:

$$e(S, S_a) = \max_i |\hat{y}(t_i) - y(t_i)| \quad (6)$$

显然, “纵向误差”具有明确的几何意义: 它表示代数曲线段  $S$  及其逼近曲线段  $S_a$  上具有相同横坐标的点的纵坐标之差。相比较误差(1), 式(6)定义的误差更加直观、易于理解; 另一方面, 式(6)的主要计算集中于求  $\hat{y}(t_i)$  的过程, 在已知  $x(t_i)$  和  $f(x, y) = 0$  的前提下, 这实际上是一个求解代数方程的问题, 不会遭遇实质性的困难。

### 3 数值实验

给定代数曲线  $C_1: (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$  (如图 1), 根据公式(6)提供的“纵向误差”计算方法不难计算出近似误差曲线, 如图 2、3、4。

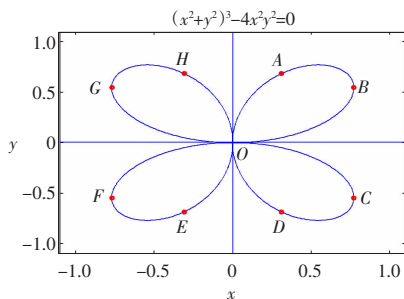


图 1 曲线  $C_1$

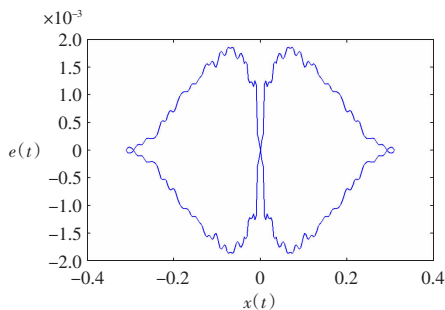


图 2 曲线段 AOE 和 HOD 的误差

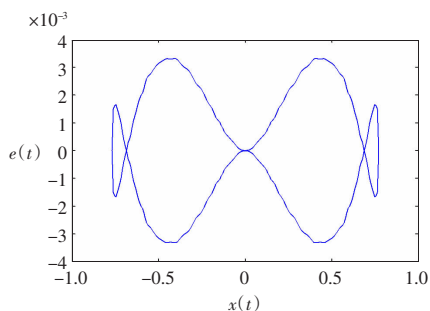


图 3 曲线段 BOF 和 GOC 的误差

从图中可以看到, 曲线段 AOE 和 HOD 的误差小于  $2 \times 10^{-3}$ , 曲线段 BOF 和 GOC 的误差小于  $3.5 \times 10^{-3}$ , 曲线段 AB、CD、EF、

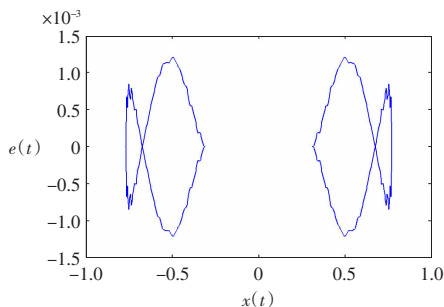


图4 曲线段 $AB$ 、 $CD$ 、 $EF$ 、 $GH$ (顺时针方向)的误差

$GH$  的误差小于  $1.25 \times 10^{-3}$ , 而按照公式(2)计算出的整体误差小于  $3 \times 10^{-3}$ (参见文献7)。从误差的绝对大小来看, 两种算法没有明显的差异, 但是“纵向误差”具有明确的几何意义, 同时计算也较为简单。

#### 4 结论

代数曲线分段逼近的误差分析是一个十分重要的问题, 理论上可以给出误差上界的计算方案, 但是在实施过程中可能遇到复杂的计算问题。“纵向误差”具有几何意义直观, 易于理解的特点, 计算也较为简单, 具有较高的实用价值。

#### 参考文献:

- [1] Ihm I, Naylor B. Piecewise linear approximations of digitized space curves with applications[M]//Patrikalakis N. Scientific Visualization of Physical Phenomena. Berlin: Springer-Verlag, 1991: 545-569.
- [2] Farouki R. Hierarchical segmentations of algebraic curves and some

- applications[C]//Lyche T, Sshumaker L L. Math Methods in Computer Aided Geometric Design. Boston, MA: Academic Press, 1989: 239-248.
- [3] Pottmann H, Leopoldsdeder S, Hofer M. Approximation with active B-spline curves and surfaces[M]//Coquillart S, Shum H, Hu S M. Proc of Pacific Graphics 2002. Los Alamitos, CA: IEEE Press, 2002: 8-25.
- [4] Sederberg T, Zhao J, Zundel A. Rational approximation of algebraic curves[M]//Strasser W, Seidel H. Theory and Practice of Geometric Modeling. Berlin: Springer-Verlag, 1989: 33-54.
- [5] Bajaj C, Xu G L. Piecewise rational approximations of real algebraic curves[J]. J Computational Math, 1997, 15(1): 55-71.
- [6] Chen F L. Interval parametrization of planar algebraic curves[C]//Li Z M, Sit W. Proceeding of the 6th Asian Symposium on Computer Mathematics, World Scientific, Singapore, 2003: 64-76.
- [7] Gao Xiao-Shan, Li Ming. Rational quadratic approximation to real algebraic curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21: 805-828.
- [8] Ahn Y J. Conic approximation of planar curves[J]. Computer-Aided Design, 2001, 33(12): 867-872.
- [9] Ahn Y J. Geometric spline approximation in CAGD[J]. Comm Korean Math, 2002, 17(2): 331-347.
- [10] Floater M. High order approximation of conic sections by quadratic splines[J]. Computer Aided Geometric Design, 1995, 12: 617-637.
- [11] Floater M. An  $O(h^n)$  Hermite approximation for conic sections[J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14: 135-151.
- [12] Ahn Y J. Helix approximations with conic and quadratic Bézier curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2005, 22: 551-565.

(上接 106 页)

的增大, 平均能量消耗和平均帧时延都是增加的, 这也是由于当流入帧到来时, RS 并不立即结束睡眠模式而造成的。改进的算法在  $\lambda_g$  和  $\lambda_c$  相差较大时, 对平均能量消耗的改善较明显。当  $\lambda_c / \lambda_g$  较大时, 对平均帧时延的改善较明显, 因为通过对窗口参数的调整, 能减少流入帧的等待时间。

#### 5 结束语

RS 睡眠模式在减少能量消耗并降低对空中资源使用的同时也带来了时延问题, 即服务效率的降低。这是因为 MS 可能要等待 RS 的醒来才能接入网络。在切换的过程中, 如果 MS 不能马上被服务, 就会产生呼损。建立了 RS 睡眠机制的数学模型, 提出了基于业务流的睡眠模式窗口参数动态改变算法, 仿真分析表明, 改进的算法能够减少 RS 睡眠模式的平均能量消耗和平均帧时延。

业务流的分布特点以及初始睡眠窗口和最大睡眠窗口的大小直接影响到 RS 的睡眠机制的效果。提出的算法能够改善 RS 睡眠机制。在实际的网络中, 可根据网络业务的实际情况选取合理的窗口参数。

#### 参考文献:

- [1] Kang Hyunjeong. IEEE802.16j-06/016r1 proposed technical require-

- ments guideline for IEEE 802.16 relay TG[S]. 2006.
- [2] Loa Kanchei (Ken), Yin Hua-Chiang. C80216j-07\_066r9 RS sleep mode[S]. 2007.
- [3] Yang X. Energy saving mechanism in the IEEE 802.16e wireless MAN[J]. IEEE Communications Letters, 2005, 9(7): 595-597.
- [4] Kim M G, Kang M, Choi J Y. Performance evaluation of the sleep mode operation in the IEEE 802.16e MAC[C]//Choi JungYul. I-CACT2007, Feb. 12-14, 2007.
- [5] Loa Kanchei (Ken), Yin Hua-Chiang. C80216j-07\_066r6, RS sleep mode[S]. 2007.
- [6] IEEE Std 802.16e/D5-2004 IEEE standard for local and metropolitan area networks -Part 16: Air interface for fixed and mobile broadband Wireless Access Systems -Amendment 2: Physical and medium access control layers for combined fixed and mobile operation in licensed bands[S]. New York, USA: The Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2004.
- [7] Lin Y B, Chuang Y M. Modeling the sleep mode for cellular digital packet data[J]. IEEE Communications Letters, 1999, 3(3): 63-65.
- [8] Kim Min-Gon, Choi JungYul, Kang Minho. Adaptive power saving mechanism considering the request period of each initiation of awakening in the IEEE 802.16e system[J]. IEEE Communications Letters, 2008, 12(2): 106-108.