工厂地址集中的 k-种产品选址问题的近似算法

何晓琼,陈 冲,李荣珩
HE Xiao-qiong,CHEN Chong,LI Rong-heng

湖南师范大学 数学与计算机学院,长沙 410081
College of Mathematics and Computer Science,Hunan Normal University,Changsha 410081,China
E-mail:hexiao1984528@163.com

HE Xiao-qiong,CHEN Chong,LI Rong-heng.Approximation algorithms for k-product centralized facility location problem.Computer Engineering and Applications,2010,46(8):238-241.

Abstract: A k-product facility location problem can be described as follows.There is a set of clients and a set of sites where facilities can be set up.Now each client needs to be supplied with k kinds of products and a facility can be set up to supply only one product.Suppose that these facilities considered are relatively centralized,i.e.,the distance between any two facilities is not more than the distance between any facility and client.Assuming that the fixed setup costs are zero,this paper shows that the problem is NP-complete when $k=2$ and proposes a $2-1/k$ approximation algorithm for any integer k.In addition an approximation algorithm with worst case ratio not more than 2 is given for the case that the fixed setup costs are not zero.

Key words: approximation algorithm;computational complexity;facility location

摘 要:k-种产品工厂选址问题是:给定一个客户集合和一个可以建立工厂的地址集合,每个客户需要 k-种产品,一个工厂只能为客户提供一种产品。考虑的工厂假设相对集中,即假设任何工厂之间的距离都不大于工厂与客户之间的距离。对于没有建厂费用的问题,当 $k=2$ 时证明了它是一个 NP 完全问题,对任意的 k 给出了一个最坏性能比不大于 $2-1/k$ 的近似算法。对于有建厂费用的问题,给出了一个最坏性能比不大于 2 的近似算法。

关键词:近似算法;计算复杂性;工厂选址
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2010.08.069 **文章编号:**1002-8331(2010)08-0238-04 **文献标识码:**A **中图分类号:**TP391

1 介绍

选址问题已经有很多种求解方法,对选址问题的算法研究主要集中在离散型选址模型。离散型选址模型都是整数规划模型。寻求这类问题的最优解的经典算法就是分支定界法或割平面法。然而,这些方法只能解决选址问题中的一些小型实例。实际问题中的大规模案例常有成百上千的约束和变量,用这些经典的算法解决这类问题,受到了计算机内存和计算时间的限制,因为大多数的选址问题的基本模型已被证明是 NP 完全问题。经典的工厂选址问题首先必须从给定的一组地址中确定一个子集用来建立工厂,然后给每个客户指派一个工厂来提供产品。近年研究中,在假设服务费用满足度量空间的特性情况下,即服务费用满足非负性、对称性及三角不等式,研究者提出了一些带有常数性能的比的近似算法。第一个近似比为 3.157 的近似算法是由 Shmoys 等[1]利用对线性规划问题的分数进行舍入取整的方法给出的。之后,Guha 和 Khuller 于 1999 年将 Shmoys 给出的近似比从 3.157 提高到 1.736。Jain 和 Vazirani 于 1999 年首次提出用原始-对偶的算法解这个问题,并由 Jain 等于 2002 年将近似比提高到了 1.52, 比较接近由 Guha 和 Kuller 在 1999 年提出的任意有效算法的近似比的下界 1.463。Byrka 于 2007 年利用线性规划松弛结合 MYZ 算法, 利用新的随机舍入技巧得到 1.50 的近似算法。除了经典选址问题,还存在着很多不同的模型。如 k-层选址问题,当 $k\geqslant 2$,Aardal 等[2]提出最坏性能比为 3 的近似算法,之后当 $k=2$ 时,Zhang[3]用原始-对偶法给出最坏性能比为 1.77 的近似算法。Fisher[4]等首次提出了多产品的选址问题,每个客户需要 k 种产品,而每个工厂只能生产一种产品的工厂选址的问题,即一个客户需要由 k 个工厂提供 k 种不同的产品,他们证明了 k 种产品的选址问题目标函数是下模集函数(Submodular Set Function)。Huang 和 Li[5]首次讨论了在度量空间中的 k 种产品的选址问题。对于建厂费用为零的模型提出了最坏性能比不大于 $2k-1$ 的启发式算法,之后这个最坏性能比被提高到 $3k/2-1$[8]。

目前所有 k-种产品的选址问题的近似算法的最坏性能比都不是与 k 无关的常数,即当 k 趋向无穷大时,性能比也趋向无穷大。寻找与 k 无关的常数性能比的近似算法或证明是否有与 k 无关的常数性能比的近似算法是目前研究多产品选址问题的一个公开问题。文章对可选的工厂作了特定假设:任何两

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10771060,No.60872039)。
作者简介:何晓琼(1984-),女,研究生,主要研究方向:组合与最优化;李荣珩,通讯作者。
收稿日期:2008-09-18 **修回日期:**2008-12-01

个工厂之间的运输费用不大于它们到任一客户的运输费用，即假设生产产品的工厂相对集中，这个假设是符合某些实际问题的，因为现代化的生产都有相对集中的生产规划区。在这个假设下，得出了具有与k无关的常数性能比的近似算法。以下的结论都是在这个假设下给出的。

2　k-FLP 的模型及其线性规划表示

下面用k-FLP表示k种产品的选址问题。设D表示客户集合，F表示所有可能建立工厂集合。有k种产品$P_l(l=1,2,\cdots,k)$，对于任意工厂$i\in F$最多只能提供其中一种产品给客户，且工厂比较集中，也就是任意两个工厂的运输费用要小于工厂向客户运输的费用。设工厂i被选来提供产品P_l时的建厂费用为$f_i^l,i\in F,1\leqslant l\leqslant k$，任意两个地址$i,j\in F\cup D$之间的运输费用为$c_{ij}$。对于$\forall i\in F$工厂$i$只能用来提供一种产品，因此任意客户$j\in D$必须由$k$个工厂来分别提供$k$种的产品。该文目标是要确定$F$的$k$个非空且互不相交的子集$F_i(i=1,2,\cdots,k)$，这里$F_i$的厂址用来提供产品$p_i$，使得总费用最小。

文中如果没有特别说明，总假设下面条件成立：

(1)$f_i^l\geqslant 0,\forall i\in F,l=1,2,\cdots,k$；

(2)$c_{ij}\geqslant 0$，对于每一个$i,j\in F\cup D$；

(3)$c_{ij}=c_{ji}$，对于每一个$i,j\in F\cup D$；

(4)$c_{ik}\leqslant c_{ij}+c_{kj}$，对于每个$i,j,k\in F\cup D$；

(5)$c_{i_1i_2}\leqslant\min\{c_{i_1j},c_{i_2j}\},\forall i_1,i_2\in F,\forall j\in D$。

(1)~(4)表示运输费用满足度量空间特性，(5)表示工厂集相对集中。另定义变量x_{ij}^l，对于$\forall i\in F,j\in D$且$l\in\{1,2,\cdots,k\}$，如果工厂i向客户j提供产品p_l，则令x_{ij}^l取值为1，否则x_{ij}^l取值为0。定义变量y_i^l，如果工厂i被建立用来向客户提供产品p_l，则令y_i^l取值为1，否则y_i^l取值为0。下面是k-FLP的整数规划模型：

$$(k\text{-FLP})\ \min\sum_{l=1}^{k}\sum_{i\in F}f_i^l y_i^l+\sum_{l=1}^{k}\sum_{j\in D}\sum_{i\in F}c_{ij}x_{ij}^l \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i\in F}x_{ij}^l=1,\forall i\in F,\forall j\in D,l\in\{1,2,\cdots,k\} \tag{2}$$

$$x_{ij}^l\leqslant y_i^l,\forall i\in F,\forall j\in D,l\in\{1,2,\cdots,k\} \tag{3}$$

$$\sum_{l=1}^{k}y_i^l=1,\forall i\in F \tag{4}$$

$$x_{ij}^l\in\{0,1\},\forall i\in F,\forall j\in D,l\in\{1,2,\cdots,k\} \tag{5}$$

$$y_i^l\in\{0,1\},\forall i\in F,\forall j\in D,l\in\{1,2,\cdots,k\} \tag{6}$$

上述模型中，约束(2)保证客户的每种产品只能有一个工厂供应。约束(3)表明如果客户j能从工厂i接收到产品p_l，则有工厂i肯定被建立并提供产品p_l的前提成立。约束(4)保证每一个建立的工厂只能生产一种产品。

3　k-FLPN 算法

下面用k-FLPN表示所有的建厂费用为零的k种产品的选址问题，即$f_i^l=0,i\in F,1\leqslant l\leqslant k$。显然，由于建厂费用为零，所有的厂址上都可以建立工厂而无需考虑费用的增加。下面是这个问题的线性规划松弛模型：

$$(\text{Pk})\ \min\sum_{l=1}^{k}\sum_{i\in F}\sum_{j\in D}c_{ij}x_{ij}^l \tag{7}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i\in F}x_{ij}^l=1,\forall j\in D,l=1,2,\cdots,k \tag{8}$$

$$x_{ij}^l\leqslant y_i^l,\forall i\in F,j\in D,l=1,2,\cdots,k \tag{9}$$

$$\sum_{l=1}^{k}y_i^l=1,i\in F \tag{10}$$

$$x_{ij}^l\geqslant 0,\forall i\in F,j\in D,l\in\{1,2,\cdots,k\} \tag{11}$$

$$y_i^l\geqslant 0,\forall i\in F,l\in\{1,2,\cdots,k\} \tag{12}$$

易知工厂集的有序划分$F=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_K$与$k$-FLPN工厂的可行解是1-1对应的，即$y_i^l=1$当且仅当$i\in S_l$，所以下面也称$F$的一个有序划分为$k$-FLPN的一个解。

现在考虑这个问题的复杂性，$k=1$它很简单，当$k=2$时，下面证明它是一个NP完全问题。

定理1　2-FLPN是NP完全的。

证明　因为max-cut问题[7]是NP完全的，下面把max-cut问题规约到2-FLPN。给定一个图$G=(V,E)$，构造2-FLPN的一个实例如下：令$F=V,D=E$，当v_i是e_j的一个顶点时$c(v_i,e_j)=1$，否则，$c(v_i,e_j)=2$，对$\forall v_{i_1},v_{i_2}\in v,v_{i_1}\neq v_{i_2},\forall e_{j_1},e_{j_2}\in E,e_{j_1}\neq e_{j_2}$，令$c(v_{i_1},v_{i_2})=c(e_{j_1},e_{j_2})=1$。容易证明如上所定义的运输费用满足度量空间特性且任何两工厂之间的运输费用不大于工厂与任一顾客之间的运输费用。让$V=S_1\cup S_2=F$，如果$i\in S_l,i\in F,l=1,2$，那么$y_i^l=1$否则$y_i^l=0$等价于S_1与S_2分别提供产品p_1和p_2。用$C(S_1,S_2)$表示在划分$V=S_1\cup S_2=F$下的2-PLPN的总费用。同时用$c_j(S_1,S_2)$表示$e_j\in D=E$的运输费用。对任一的$e_j\in D=E$，设v_{i_1}和v_{i_2}是e_j的两个端点。

情况1　$e_j\in CUT(S_1,S_2)$

这种情况下，v_{i_1}、v_{i_2}分别被放入S_1、S_2，不失一般性，假设v_{i_1}被放入S_1，v_{i_2}被放入S_2。因为根据定义有：$c_{i_1j}=c_{i_2j}=1$，所以顾客j的总运输费用为：

$c_j(S_1,S_2)=2$

情况2　$e_j\notin CUT(S_1,S_2)$

这种情况下，v_{i_1}、v_{i_2}要么都被放入S_1，要么都被放入S_2。不失一般性，假设v_{i_1}、v_{i_2}都被放入了S_1。那么，根据定义有：$c_{i_1j}=1$，但是对$\forall i\in S_2,c_{ij}=2$，因为$v_i$不是$e_j$的顶点，那么顾客$j$的总运输费用为：

$c_j(S_1,S_2)=3$

又因为在图G中一共有$m-|CUT(S_1,S_2)|$条边不在$CUT(S_1,S_2)$中，综合上面的情况1和情况2，可以得到：

$$\sum_{l=1}^{2}\sum_{i\in F}\sum_{j\in D}c_{ij}x_{ij}^l=3m-|CUT(S_1,S_2)|$$

因为图G中边的总数m是一个常数，那么当$|CUT(S_1,S_2)|$取到最大值时，$\sum_{l=1}^{2}\sum_{i\in F}\sum_{j\in D}c_{ij}x_{ij}^l$取到最小值。所以2-FLPN问题与max-cut问题是等价的，也就证明了2-FLPN

问题是强 NP 完全的。

由下面方法得到的解为 k-FLPN 的重叠最优解：去掉每个工厂只能提供一种产品的限制，然后每个客户都选 k 个最近的工厂来分别提供它的 k 种产品。重叠最优解也就是下面线性整数规划的最优解：

$$\min \sum_{l=1}^{k}\sum_{i\in F}\sum_{j\in D} c_{ij}x_{ij}^{l}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i\in F} x_{ij}^{l}=1,\ \forall j\in D, l\in\{1,2,\cdots,k\}$$

$$x_{ij}^{l}\in\{0,1\},\ \forall i\in F, j\in D, l\in\{1,2,\cdots,k\}$$

$$y_{i}^{l}\in\{0,1\},\ \forall i\in F, j\in D, l\in\{1,2,\cdots,k\}$$

显然重叠最优解的费用是 k-FLPN 的最优值的一个下界。

k-FLPN 算法：

步骤 1 先求每个工厂可以提供 k 种产品的重叠最优解，即每个客户选取离它最近的工厂给它提供产品，令 $S_1=S_2=\cdots=S_k=\Phi$。

步骤 2 对任意的 $i\in F$，若 i 在重叠最优解里没有提供任何产品，则任选一个 S_l 将 i 放入其中，否则令 $A_i^l=\sum_{j\in B_i^l} c_{ij}$，这里 $B_i^l=\{j|i$ 给 j 提供第 l 种产品$\}$，若 B_i^l 为空集，则 A_i^l 为零。设 $A_s^l=\mathrm{Max}\{A_i^l|l=1,2,\cdots,k\}$，则令 $i\in S_s$。

步骤 3 每个客户都用 S_l 里最近的工厂给它提供第 l 种产品。

下面来证明算法的性能比不大于 $2-1/k$。对任意的 $i\in F$，在算法的步骤 2 里，不妨设 $s=1$。算法结束时，设 $\forall j\in B_i^l$，j 的第 l 种产品由 i_j 提供。对任意的 $i\in F$，考虑在重叠解里，i 所提供的产品的费用与这些产品在算法结束后的费用的关系。根据假设，有：

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{j\in B_i^l} c_{i_j j}=A_i^1+\sum_{l=2}^{k}\sum_{j\in B_i^l} c_{i_j j}\leqslant A_i^1+\sum_{l=2}^{k}\sum_{j\in B_i^l}(c_{i_j i}+c_{ij})\leqslant$$

$$A_i^1+\sum_{l=2}^{k}\sum_{j\in B_i^l}(c_{ij}+c_{ij})=A_i^1+2\sum_{l=2}^{k}A_i^l\leqslant\left(2-\frac{1}{k}\right)\sum_{l=1}^{k}A_i^l$$

上面第二个不等号成立都是因为两个工厂之间的运输费用的上界不大于它们到任意顾客运输费用的下界，最后一个不等式成立是因为

$$A_i^l=\mathrm{Max}\{A_i^l|l=1,2,\cdots,k\}$$

4 k-FLP 的算法

k-FLP 问题可以建立一个新的模型如下：用 S 标记 k 个不同工厂的序列，$i_l\in F, l=1,2,\cdots,k$，称之为工厂的可行序列。所有的可行序列集合记为 S。因此，每个可行解中任意一个客户 $j\in D$ 都应该由一个可行序列来提供它所需要的全部 k 种产品。说序列 $s=(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in S$ 给顾客 j 提供产品是指对任意的 $l(l=1,2,\cdots,k)$，i_l 提供产品 p_l 给客户 j，此时，顾客 j 的所有运输费用等于 $c_{sj}=c_{i_1 j}+c_{i_2 j}+\cdots+c_{i_k j}$。

下面定义决策变量 x_{sj}、y_i^l。若顾客 j 由 s 提供产品，$x_{sj}=1$，若不是，$x_{sj}=0$。若工厂 i 被建立用来生产产品 p_l，$y_i^l=1$，若不是，$y_i^l=0$。

若 $s=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ 是 S 中的一个可行序列，可以用 s^l 表示 i_l，并称 s 用 i_l 提供产品 $p_l(l=1,2,\cdots,k)$。

根据以上的定义，可以得到 k-FLP 的线性规划公式如下：

$$(k\text{-FLP})\ \min\sum_{l=1}^{k}\sum_{i\in F} f_i^l y_i^l+\sum_{s\in S}\sum_{j\in D} c_{sj}x_{sj} \tag{13}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{s\in S} x_{sj}=1,\ \forall j\in D \tag{14}$$

$$\sum_{s:s^l=i} x_{sj}\leqslant y_i^l,\ \forall i\in F, j\in D, l=1,2,\cdots,k \tag{15}$$

$$\sum_{l=1}^{k} y_i^l=1,\ \forall i\in F \tag{16}$$

$$x_{sj}\in\{0,1\},\ \forall s\in S, j\in D \tag{17}$$

$$y_i^l\in\{0,1\},\ \forall i\in F, l=1,2,\cdots,k \tag{18}$$

若不考虑(k-FLP)的整数约束，且去掉条件(16)，可以得到(k-FLP)的一个松弛问题。记为(Pk2)。

$$(\text{Pk2})\ \min\sum_{l=1}^{k}\sum_{i\in F} f_i^l y_i^l+\sum_{s\in S}\sum_{j\in D} c_{sj}x_{sj} \tag{19}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{s\in S} x_{sj}=1,\ \forall j\in D \tag{20}$$

$$\sum_{s:s^l=i} x_{sj}\leqslant y_i^l,\ \forall i\in F, j\in D, l=1,2,\cdots,k \tag{21}$$

$$x_{sj}\geqslant 0,\ \forall s\in S, j\in D \tag{22}$$

$$y_i^l\geqslant 0,\ \forall i\in F, l=1,2,\cdots,k \tag{23}$$

令 v_j 和 w_{ij}^l 分别表示条件(20)和条件(21)的对偶变量。可以得到(Pk2)的对偶问题如下：

$$(\text{Pk3})\ \max\sum_{i\in D} v_j \tag{24}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j\in D} w_{ij}^l\leqslant f_i^l,\ \forall i\in F, l=1,2,\cdots,k \tag{25}$$

$$v_j-\sum_{l=1}^{k} w_{s^l j}^l\leqslant c_{sj},\ \forall s\in S, j\in D \tag{26}$$

$$w_{ij}^l\geqslant 0 \tag{27}$$

显然(Pk2)和它的对偶问题(Pk3)的最优值相同，而且它们的最优值是(k-FLP)最优值的一个下界。

定理 2 若$(\bar{x},\bar{y})$和$(\bar{v},\bar{w})$分别是(Pk2)和(Pk3)的最优解，那么$\overline{x_{sj}}>0$ 当且仅当 $c_{sj}\leqslant\overline{v_j}$，$\forall s\in S, j\in D$。

证明 由原问题与对偶问题的互补松弛性可知：若$\overline{x_{sj}}>0$，那么它的对偶条件(26)取等号，即 $v_j-\sum_{l=1}^{k} w_{s^l j}^l=c_{sj}$。又因为 $w_{ij}^l\geqslant 0$，所以 $c_{sj}\leqslant\overline{v_j}$。

下面给出一个 k-FLP 问题的近似算法，这个算法得到的最优解不大于松弛问题(Pk2)最优解的 2 倍。

k-FLP 的算法：

首先，通过解(Pk2)和它的对偶问题(Pk3)，分别得到它们的最优解$(\bar{x},\bar{y})$和$(\bar{v},\bar{w})$。令$\overline{c_j}=\sum_{s\in S} c_{sj}\overline{x_{sj}}$，$\forall j\in D$。最开始，令$\bar{D}=D$，$x=\bar{x}$，$y=\bar{y}$。在每次迭代 t 中，都选择$\bar{D}$中$\overline{c_j}$最小的客户作为中心客户，记为 j_t。令 $s_t=\{s\in S|x_{sj_t}>0\}$，$F^{j_t}=\{i\in F|i$ 属于 s_t 中的某个

$s\}$，$D_t=\{j\in\bar{D}|\exists x_{sj}>0$，序列$s$中最少有一个工厂属于$F_t\}$。显然$D_t$不是空集，因为$j_t\in D_t$。

在第t次迭代中，以x_{sj_t}的概率选择一个可行的序列$s\in S_t$，记为s_t。然后令所有的$y_i^l=1, i=s_t^l$，所有的$y_i^l=0, i\in F_t, i\neq s_t^l$。令可行序列$s_t$是$D_t$中所有客户的解序列，也就是说，对$\forall j\in D_t$，令$x_{s_tj}=1$，对$\forall j\in D_t$且$s\in S-\{s_t\}$令$x_{s_tj}=0$。最后，令$\bar{D}=\bar{D}-D_t$后，进入下一次迭代。设$c_t=F_t\cup D_t$，把$c_t$称作第$t$次迭代的费用产生集。如上迭代直到$\bar{D}=\Phi$。

定理 3　当k-FLP的算法结束时，可以得到k-FLP的一个可行解。

证明　容易证明当k-FLP的算法结束时，得到的解(x,y)是整数解，且满足整数规划问题(k-FLP)的条件(14)和条件(15)。

下面证明解(x,y)满足(k-FLP)的条件(16)。在任意一次迭代t中，因为s_t是一个可行序列，所以并没有建立任何一个工厂去提供两种或两种以上产品。另外，根据算法可知道：在任意两次不同的迭代t和t'中，因为F_t与$F_t{}'$不相交，所以s_t与$s_t{}'$没有任何一个相同的工厂。综上所述，在整个算法过程中，没有任何一个工厂被建立用来生产一种以上的产品。这就证明了(x,y)满足(k-FLP)的条件(16)。

所以(x,y)是k-FLP的一个可行解。

定理 4　k-FLP的算法所产生的(k-FLP)的可行解(x,y)的总费用不大于(Pk2)的最优解总费用Z的2倍。

证明　由定理3知道，通过k-FLP的算法可以得到(k-FLP)的一个整数可行解。下面来计算在迭代t中的费用产生集C_t总共产生的费用。

首先，计算第t次迭代中所产生的建厂费用。在第t次迭代刚开始时，有：$x_{sj}=\overline{x_{sj}}$对$\forall s\in S_t, j\in\bar{D}$都成立，$y_i^l=\overline{y_i^l}$对$\forall i\in F_t$($l=1,2,\cdots,k$)都成立。当选择了可行序列$s_t\in S_t$后，产生的建厂费用为$\sum_{l=1}^{k}f_{s_t^l}^l$。根据算法，$\forall s\in S_t$被选中的概率为$x_{sj_t}$。那么在第$t$次迭代中所产生的建厂费用为：

$$\sum_{s\in S_t}\left(\sum_{l=1}^{k}f_{s^l}^l\right)\overline{x_{sj_t}}=\sum_{l=1}^{k}\sum_{i\in F_t}f_i^l\left(\sum_{s:s^l=i}\overline{x_{sj_t}}\right)\leqslant\sum_{l=1}^{k}\sum_{i\in F_t}f_i^l\overline{y_i^l}$$

不等号成立是因为条件(21)。

下面来计算在(x,y)中的客户$j\in D_t$的运输费用。很显然j_t的运输费用等于：

$$\sum_{s\in S_t}c_{sj_t}\overline{x_{sj_t}}=\bar{c}_{j_t}$$

对于$\forall j\in D_t, j\neq j_t$，因为$j\in D_t$，所以$j$一定被包含$F_t$中一些工厂的某个$s_t$部分提供。根据三角不等式，有：

$$c_{s_t^lj}\leqslant c_{s_t^ls_t^l}+c_{s_t^lj}, l=1,2,\cdots,k$$

对上式所有的l求和，又因为任意两个工厂之间的距离不大于工厂与顾客之间的距离，所以：

$$c_{s_tj}=\sum_{l=1}^{k}c_{s_t^lj}\leqslant\sum_{l=1}^{k}c_{s_t^ls^l}+\sum_{l=1}^{k}c_{s^lj}\leqslant\sum_{l=1}^{k}c_{s_t^lj_t}+\sum_{l=1}^{k}c_{s^lj}=c_{s_tj_t}+c_{sj}=c_{s_tj_t}+v_j$$

根据k-FLP的算法，j被s_t供应的概率为$\bar{x}_{s_tj_t}$，$s_t\in S_t$。那么实际上j的运输费用应该是：

$$\sum_{s\in S_t}c_{sj}x_{sj_t}\leqslant\sum_{s\in S_t}(c_{sj_t}+v_j)\bar{x}_{sj_t}=\bar{c}_{j_t}+v_j\leqslant\bar{c}_j+v_j$$

上式最后一个不等号成立是因为$\bar{c}_{j_t}\leqslant\bar{c}_j$。那么，$C_t$产生的总费用的上界为：

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{i\in F_t}f_i^l\bar{y}_i^l+\sum_{j\in D_t}(\bar{c}_j+v_j)=\sum_{l=1}^{k}\sum_{i\in F_t}f_i^l\bar{y}_i^l+\sum_{s\in S}\sum_{j\in D_t}c_{sj}\bar{x}_{sj}+\sum_{j\in D_t}v_j$$

对所有的迭代t求和，得到总费用的上界：

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{i\in F}f_i^l\bar{y}_i^l+\sum_{s\in S}\sum_{j\in D}c_{sj}\bar{x}_{sj}+\sum_{j\in D}v_j=2Z$$

证毕。

5　结束语

在这篇文章中，备选工厂集比较集中且费用满足度量空间特性的假设下，主要讨论建厂费用为零k-FLPN和建厂费用不为零k-FLP选址问题。并对它们分别给出了最坏性能比不大于$2-1/k$和2的算法。进一步的工作是只在一般的度量空间特性假设下给出k-FLPN和k-FLP的与k无关常数性能比的算法。

参考文献：

[1] Shmoys D B，Tardos E，Aadarl K.Approximation algorithms for facility location problems[C]//Proceeding of the 29th Annual ACM Symposium on Theory of Computing，1997：265-274.

[2] Aardal K，Chudak F A，Shmoys D B.A 3-approximation algorithm for the k-level uncapacitated facility location problem[J].Information Processing Letters，1997，72：161-167.

[3] Zhang J W.Approximating the two-level facility location problem via a quasi-greedy approach[J].Mathematical Programming，2006，108(1)：159-176.

[4] Fisher M L.Nemhauser G L，Wolsey L A.An analysis of approximation for maximizing submodular set functions-II[J].Mathematical Programming Study，1978，8：73-87.

[5] Huang Huei-chuen，Li Rong-heng.A k-product uncapacitated facility location problem[J].European Journal of Operation Research，2008，185：552-562.

[6] 易斌，李荣珩.一个关于k-种产品选址问题的近似算法[J].计算机工程与应用，2008，44(1)：97-99.

[7] Garey M R，Johnson D S.Computers and intractability：A guide to the theory of NP-completeness[M].New York：Freeman，1979.

[8] Chudak F A，Shmoys D B.Improved approximation algorithms for the uncapacitated facility location problem[J].SIAM Journal on Computing，2003，33：1-25.

[9] Jain K，Vazirani V V.Primal_dual approximation algorithms for metric facility location and k-median problems[C]//Proceedings of the 40th Annual IEEE Symposium on Foundations of Compute Science，1999：2-13.

[10] Papadimitriou C H，Steiglitz K.Combinatorial optimization：Algorithms and complexity[M].Englewood Cliffs，NJ：Prentices-Hall，1982.

[11] Byrka J.An optimal bifactor approximation algorithm for the metric uncapacitated facility location problem[C]//Lecture Notes in Computer Science 4627.Berlin，Heidelberg：Springer-Verlag，2007：29-43.