

# 引入蛇模型的曲率驱动扩散图像修复方法

吴亚娟<sup>1,2</sup>, 刘晓锋<sup>2</sup>

WU Ya-juan<sup>1,2</sup>, LIU Xiao-feng<sup>2</sup>

1.四川大学 计算机学院,成都 610065

2.西华师范大学 计算机学院,四川 南充 637002

1.College of Computer Science,Sichuan University,Chengdu 610065,China

2.College of Computer Science,China West Normal University,Nanchong,Sichuan 637002,China

E-mail:scwuyajuan@yahoo.com.cn

**WU Ya-juan,LIU Xiao-feng.Image inpainting by curvature-driven diffusions with snake model.Computer Engineering and Applications,2010,46(6):185-187.**

**Abstract:** Digital image inpainting approaches can restore the damaged region automatically on digital images.T.F.Chan,et al. bring up an inpainting algorithm by Curvature-Driven Diffusions(CDD) which is a representative algorithm based on partial differential equation.In the inpainting algorithm,image enhancement term of snake model is incorporated into CDD algorithm.In the heat diffusion process,this term attracts the boundaries of the objects,so the broken boundaries can be repaired.Thus the image visual connectivity is holding effectively.As the experimental results show,it can repair the damaged image better than CDD algorithm with same iterative times.

**Key words:** image inpainting;curvature;snake model;image enhancement term

**摘 要:**数字图像修复方法可以自动地修复数字图像中用户定义的污损区域。T.F.Chan 等人提出的非纹理的曲率驱动扩散算法是基于偏微分方程的图像修复的代表算法之一。通过在该算法中应用蛇模型的图像增强项,提出了引入蛇模型的曲率驱动扩散图像修复方法,在热扩散过程中,拉动曲线向目标边界演化,达到修复污损图像中的断裂边缘的目的,从而较好保持图像的视觉连通性。实验结果表明,在迭代次数相同的条件下,可以比原始的曲率驱动扩散图像修复算法获得更好的修复效果。

**关键词:**图像修复;曲率;蛇模型;图像增强项

**DOI:**10.3778/j.issn.1002-8331.2010.06.054 **文章编号:**1002-8331(2010)06-0185-03 **文献标识码:**A **中图分类号:**TP391.41

## 1 引言

图像修复是一门古老的艺术,源于欧洲文艺复兴时期对中世纪的美术作品中出现的裂缝进行修复,修复的目标是填充艺术作品中的遗失或破损区域,恢复其完整性。Bertalmio 等人在 2000 年提出数字图像修复技术这个术语。数字图像修复以一种不易察觉的方式修改图像,用户只需对待修复的区域进行标记,计算机自动对图像进行修复<sup>[1]</sup>。数字图像修复在修补破损、增加或移除目标、文物保护、影视特技制作和图像压缩方面都有着重大的应用价值<sup>[2]</sup>。

目前,图像修复的算法主要集中在基于偏微分方程、基于纹理合成以及两者相结合三类。基于偏微分方程(Partial Differential Equation,PDE)的算法,以 M.Bertalmio 等的 BSCB 修复算法<sup>[1]</sup>和 Tony F.Chan 的总变分(Total Variation,TV)修复算法及曲率驱动扩散(Curvature-Driven Diffusions,CDD)修复算法为代表<sup>[3-4]</sup>。此类方法的主要思想是利用物理学中的热扩散方程将待修复区域周围的已知信息传递到待修复区域来实现图

像修复。修复区域过偏大时,扩散过程会有一些明显的模糊。基于纹理合成的算法<sup>[5]</sup>在待修复区域的边界上选取一点及其邻域作为样本块,在图像的已知邻域内搜索具有相似纹理特征的块与之匹配,然后以某种统计方法获得待修复点的值。相较于基于 PDE 的算法,修复过程利用了更多的已知信息。但是当图像中的边缘比较复杂时,该类算法修复结果有可能存在边缘断裂、纹理匹配错误等比较明显的视觉效果。两者相结合的方法<sup>[6]</sup>将图像分解为结构和纹理两幅图像,然后对其结构部分采用 PDE 方法进行修复,对其纹理部分采用纹理合成的方法进行修复。

提出的引入蛇模型的曲率驱动扩散图像修复方法(Image inpainting by curvature-driven diffusions with snake model,Snake\_CDD),通过在 CDD 修复算法添加蛇模型中的图像增强项,吸引曲线向目标边界演化,能较好地保持图像视觉连通性。实验结果表明,CDD 算法与 Snake\_CDD 算法在同样的迭代次数下,后者总是能取得比前者较高的 PSNR 值以及更好的视觉

**基金项目:**四川省教育厅自然科学基金项目(No.07ZB088, No.07ZB153)。

**作者简介:**吴亚娟(1974-),女,博士研究生,副教授,主要研究方向:图像数据融合;刘晓锋(1972-),男,副教授,主要研究方向:网格计算、P2P 计算及并行算法理论研究。

**收稿日期:**2009-10-26 **修回日期:**2009-12-21

效果。

## 2 CDD 修复算法

基于 TV 模型的图像修复算法<sup>[3]</sup>是 T.F.Chan 由 Rudin 和 Osher 等的图像去噪模型推广而来的。

TV 修复模型:

$$J_\lambda[u] = \int_{E \cup U} |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_E |u - u^0|^2 dx dy \quad (1)$$

在待修复区域, TV 修复的欧拉方程为:  $\frac{\partial u}{\partial t}$  (or 0) =  $\nabla \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right]$ , 传导系数为:  $\hat{D} = \frac{1}{|\nabla u|}$ 。

CDD 修复算法<sup>[4]</sup>是 Tony Chan 对 TV 模型加以改进之后提出的算法, 适用于非纹理图像。CDD 算法把 TV 模型中方程的传导系数修改为:  $\hat{D} = \frac{g(|\kappa|)}{|\nabla u|}$ , 其中  $\kappa$  是曲率,  $\kappa = \text{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ , 曲率描述了一幅图像中线条弯曲的程度, 通常  $g(s) = s^p, s > 0, p > 0$ , Chan 在实验时选择的是  $g(s) = s$ , 并指出不同大小的  $p$  值对实验结果影响不大。

## 3 蛇模型及 Snake\_CDD 算法

### 3.1 蛇模型

蛇模型也称活动轮廓线模型<sup>[7]</sup>, 主要应用于边缘检测、图像分割和图像放大等领域, 其模型为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \text{div} \left( c(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = c(|\nabla u|) |\nabla u| \kappa + \nabla c(|\nabla u|) \cdot \nabla u \quad (2)$$

其中:  $\kappa$  是曲率,  $c(|\nabla u|)$  可采用如下的 P-M 扩散系数:  $c(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + (|\nabla u|/\gamma)^2}$ , 函数  $c$  是单减非负函数,  $\gamma$  为控制扩散速度的参数。

### 3.2 Snake\_CDD 算法

在 CDD 模型中引入了蛇模型中的图像增强项  $\nabla c \cdot \nabla u$  (为叙述简便, 用  $\nabla c$  表示  $\nabla c(|\nabla u|)$ ), 即为提出的 Snake\_CDD 算法所使用的修复模型:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \left[ \frac{g(|\kappa|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] - \nabla c \cdot \nabla u \quad (3)$$

该模型在原始的 CDD 模型的基础上增加了一项  $(-\nabla c \cdot \nabla u)$ 。这一项实际上是向量  $(-\nabla c)$  在水平集法线方向上的投影, 吸引曲线向目标边界演化。图像增强的作用主要来自  $(-\nabla c)$ ,  $|\nabla u|$  在边界点达到局部极大值, 则边缘函数  $c(|\nabla u|)$  在边界点达到局部极小值, 因此无论在目标内部还是外部,  $(-\nabla c)$  总是指向边界<sup>[8]</sup>。当曲线越过目标边界时,  $(-\nabla c)$  改变方向,  $(-\nabla c \cdot \nabla u)$  改变符号, 从而曲线又被拉加到目标的边界<sup>[9]</sup>。Snake\_CDD 算法有了图像增强项之后, 可以更好地保持图像的边缘的连通性。

## 4 数值实现

修复过程首先人工确定待修复的区域, 其次对待修复区域进行随机初始化, 最后利用模型(3)的离散化方案修复, 具体采用如下半点显式方案实现。

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} - \Delta t \nabla \cdot j^{(n)} - \nabla c \cdot \nabla u^{(n)} \quad (4)$$

式(4)中的矢量  $j$  具有两个分量, 其中  $j^1$  为水平分量,  $j^2$  为垂直分量<sup>[4]</sup>。

$$j = (j^1, j^2) = - \frac{g(|\kappa|)}{|\nabla u|} \nabla u \quad (5)$$

图 1 为在图像坐标下的半点网格图, 实心圆点表示像素点, 星形点表示位于像素点之间的半点。  $h$  为两个像素点之间的距离, 取  $h=1$ 。

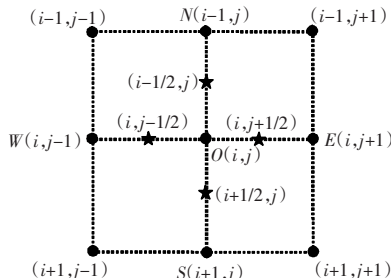


图 1 半点网格

若以当前计算点  $(i, j)$  为中心点计算关于  $j$  的散度:  $\nabla \cdot j \approx \frac{j^1_{(i,j+1/2)} - j^1_{(i,j-1/2)}}{h} + \frac{j^2_{(i+1/2,j)} - j^2_{(i-1/2,j)}}{h}$ 。

以半点  $(i, j-1/2)$  为例计算半点梯度 (见式(6)) 和半点曲率 (见式(7))。

半点梯度:

$$\nabla u(i, j-1/2) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(i,j-1/2)}, \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(i,j-1/2)} \right) \approx \left( \frac{u(i,j) - u(i,j-1)}{h}, \frac{u(i+1,j-1/2) - u(i-1,j-1/2)}{2h} \right) \left( \frac{u(i,j) - u(i,j-1)}{h}, \frac{\frac{u(i+1,j-1) + u(i+1,j) - u(i-1,j-1) + u(i-1,j)}{2}}{2h} \right) = \left( \frac{u(i,j) - u(i,j-1)}{h}, \frac{u(i+1,j-1) + u(i+1,j) - u(i-1,j-1) - u(i-1,j)}{4h} \right) \quad (6)$$

半点曲率:

$$\kappa_{(i,j-1/2)} = \nabla \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right]_{(i,j-1/2)} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_x}{|\nabla u|} \right]_{(i,j-1/2)} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{u_y}{|\nabla u|} \right]_{(i,j-1/2)} \quad (7)$$

在式(7)中:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_x}{|\nabla u|} \right]_{(i,j-1/2)} \approx \frac{u \left[ \frac{u_x}{|\nabla u|} \right]_{(i,j)} - \left[ \frac{u_x}{|\nabla u|} \right]_{(i,j-1)}}{h}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{u_y}{|\nabla u|} \right]_{(i,j-1/2)} \approx \frac{\left[ \frac{u_y}{|\nabla u|} \right]_{(i+1,j-1/2)} - \left[ \frac{u_y}{|\nabla u|} \right]_{(i-1,j-1/2)}}{2h}$$

关于  $(i, j+1/2)$ ,  $(i-1/2, j)$  和  $(i+1/2, j)$  的半点梯度和半点曲率的计算可以此类推。

式(4)中的图像增强项的计算见式(8):

$$\nabla c \cdot \nabla u = \frac{\partial c}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial c}{\partial y} \cdot u_y = - \frac{2}{\gamma^2} \cdot \left( 1 + \frac{u_x^2 + u_y^2}{\gamma^2} \right)^{-2} (u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}) \quad (8)$$

式(8)中的二阶偏导数的  $u_{xx}, u_{xy}$  的近似表达, 也可用半点的中心差分法得到<sup>[10]</sup>, 即:

$$[u_{xx}]_{(i,j)} = \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{(i,j)} \approx \left( \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{(i,j+1/2)} - \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{(i,j-1/2)} \right) / h$$

$$[u_{xy}]_{(i,j)} = \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]_{(i,j)} \approx \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{(i,j+1/2)} - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{(i,j-1/2)} \right) / h \approx \left( \frac{u_{i+1,j+1/2} - u_{i-1,j+1/2}}{2h} - \frac{u_{i+1,j-1/2} - u_{i-1,j-1/2}}{2h} \right) / h$$

$[u_{yy}]_{(i,j)}$  的计算与  $[u_{xx}]_{(i,j)}$  计算同理。

### 5 实验结果与结论

在 Intel Core 2 Duo CPU 2.33 GHz/2 GB, Windows Vista Business, Matlab 7.1 的环境下分别对动画图像和自然图像进行了实验,并把 CDD 和 Snake\_CDD 算法的修复结果从视觉效果和 PSNR 两方面进行了比较分析,图 2 和图 3 中的变量  $n$  表示修复算法的迭代次数。

#### 5.1 动画图像

在图 2 中,(a)是一幅大小为 500×375 动画图像,(d)是其污损图像。比较 CDD 和 Snake\_CDD 的分别迭代 2 000 次的修复结果(b)和(e),(b)中云朵上的污损非常明显,从左数第二只羊的脸部污损也没有去除,而(e)中只是若隐若现,还留有少许痕迹。比较 CDD 和 Snake\_CDD 的分别迭代 5 000 次的修复结果(c)和(f),(c)的白云边缘出现断裂,从左数第二只羊鼻梁处仍有少许污损,而在(f)中可见,白云断裂的边缘被重新连通,围坐在圆桌旁的三只羊的脸部基本得到修复,已经取得了较好的视觉效果。从表 1 可看出,对此动画图像进行修复时,Snake\_CDD 算法的修复结果的 PSNR 值略高于 CDD 算法的 PSNR 值。



图 2 被污损的动画图像及其修复结果

#### 5.2 自然图像

在图 3 中,(a)是一幅大小为 256×256 的自然图像,(d)是其污损图像。比较 CDD 和 Snake\_CDD 的分别迭代 2 000 次的修复结果(b)和(e),(b)中头发和手部的污损仍然十分明显,而(e)中的污损则变得较轻了。比较 CDD 和 Snake\_CDD 的分别迭代 5 000 次的修复结果(c)和(f),(c)的头发的灰度过渡不太自然,手部污损仍然存在,(f)则取得了较为理想的修复效果,被修复后的头发变得自然、真实,而且手的边缘也较为清晰,受到的污损也不复存在。从表 1 可看出,对此自然图像进行修复时,Snake\_CDD 算法的修复结果的 PSNR 值远高于 CDD 算法的 PSNR 值。

在 CDD 算法中引入了蛇模型中的图像增强项  $\nabla c \cdot \nabla u$ ,在

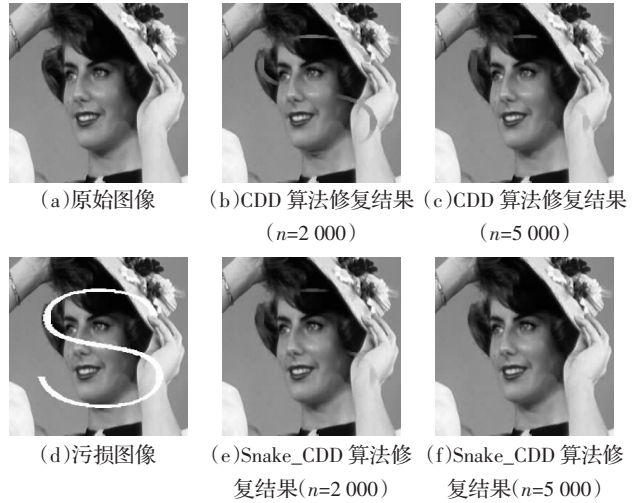


图 3 被污损的自然图像及其修复结果

表 1 CDD 和 Snake\_CDD 两种算法修复结果的 PSNR 比较表

算法	被污损的动画图像		被污损的自然图像	
	迭代 2 000 次	迭代 5 000 次	迭代 2 000 次	迭代 5 000 次
CDD	30.3	32.6	27.8	33.8
Snake_CDD	32.3	32.9	34.4	41.5

修复污损图像的过程中,能更好地保持边缘的连通性。实验结果表明,Snake\_CDD 算法和 CDD 算法相比较,在相同的迭代次数下,修复了污损图像中断裂的边缘,能获得较高的 PSNR 值和更令人满意的视觉效果。

#### 参考文献:

- [1] Bertalmio M, Sapiro G, Caselles V, et al. Image inpainting [C]//Proc of the ACM SIGGRAPH 2000, New Orleans, USA, July 2000: 417-424.
- [2] 张红英. 数字图像修复技术的研究与应用[D]. 成都: 电子科技大学, 2006-09.
- [3] Chan T F, Shen J. Mathematical models of local non-texture inpaintings[J]. SIAM J Appl Math, 2002, 62(3): 1019-1043.
- [4] Chan T F, Shen J. Non-texture inpainting by curvature-driven diffusions(CDD)[J]. J Visual Comm Image Rep, 2001, 12(4): 436-449.
- [5] Criminisi A, Perez P, Toyama K. Object removal by exemplar-based inpainting[C]//Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Wisconsin, USA, 2003, 2: 18-20.
- [6] Bertalmio M, Vese L, Sapiro G, et al. Simultaneous structure and texture image inpainting [C]//Proceedings of the 2003 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2002, 12: 1-6.
- [7] Caselles V, Kimmel R, Sapiro G. Geodesic active contours[J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 22(1): 61-79.
- [8] 艾娜. 数字图像放大后处理的 PDE 方法研究[D]. 西安: 西北大学, 2008.
- [9] 何传江, 唐利明. 几何活动轮廓模型中停止速度场的异性扩散[J]. 软件学报, 2007, 18(3).
- [10] 王大凯, 侯榆青, 彭进业. 图像处理的偏微分方程方法[M]. 北京: 科学出版社, 2008.