

颗粒离散元方法中接触模型的开发

王 涛^{1, 2}, 吕 庆¹, 李 杨¹, 李宏明¹

(1. 武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072; 2. 长江科学院 水利部岩土力学与工程重点实验室, 湖北 武汉 430010)

摘要: 在对颗粒离散元方法的理论基础进行深入研究的基础上, 推导了广义 Kelvin 模型颗粒间接触力的理论解和数值解; 采用面向对象的程序技术, 通过颗粒离散元程序的接口, 研制了广义 Kelvin 接触模型颗粒离散元计算程序; 通过算例, 验证了程序编制的正确性。在此基础上, 以某深埋隧洞为例, 计算不同接触本构模型条件下岩体的开裂破坏情况。结果表明, 相对于弹性接触关系, 采用广义 Kelvin 接触模型得出的结果与由 Hoek-Brown 强度准则得出的计算图更为接近。

关键词: 数值分析; 接触模型; 离散元方法; 广义 Kelvin 模型; 隧洞

中图分类号: O 242.1; TU 45

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2009)增 2 - 4040 - 06

DEVELOPMENT OF CONTACT MODEL IN PARTICLE DISCRETE ELEMENT METHOD

WANG Tao^{1, 2}, LU Qing¹, LI Yang¹, LI Hongming¹

(1. State Key Laboratory of Water Resource and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China;

2. Key Laboratory of Geotechnical Mechanics and Engineering of Ministry of Water Resources, Yangtze River Scientific Research Institute, Wuhan, Hubei 430010, China)

Abstract: Generalized Kelvin model for calculation of contact force between particles is deduced based on the research of theoretical background of particle discrete element method. With the object-oriented programming technique and the redeveloped interface of PFC, the generalized Kelvin contact model is developed and used in a verification example. In the example, two particles are bonded together and the relaxation is calculated by PFC and theoretical method. The result shows that the contact force exponentially decreases as time increases, which coincides with the analytical solution. Based on the researches, taking a deep-buried tunnel for example, the cracking and failure of rock are analyzed under conditions of different contact constitutive models. Results show that the generalized Kelvin contact model is better than linear elastic contact model, and the former is more consistent with the calculation chart from Hoek-Brown strength criterion.

Key words: numerical analysis; contact model; distinct element method; generalized Kelvin model; tunnel

1 引 言

作为岩体工程稳定性研究的有力工具, 数值方

法多年来保持了旺盛的生命力。在以连续介质为基础的数值模拟方法中, 处理岩体中的不连续面有很大的困难。通常, 像断层和层面这样的不连续面, 如果它们在数量上较少, 在以连续介质为基础的数

收稿日期: 2008 - 09 - 18; **修回日期:** 2008 - 12 - 31

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50879063); 国家自然科学基金重大项目(90715042); 长江科学院水利部岩土力学与工程重点实验室开放研究基金资助项目(G07 - 06)

作者简介: 王 涛(1973 -), 男, 博士, 2001 年毕业于武汉大学岩土工程专业, 现为副教授, 主要从事岩土力学方面的教学与研究工作。E-mail: tao_wang6@163.com

值模拟中可被当作特殊的单元单独处理。例如, 在有限元法中, 岩体中的节理被看作特殊的单元即节理单元; 在有限元与边界元耦合法中, 节理被看作边界单元; 在有限差分法中, 岩体中的节理被看作滑移面。这些方法仅能用于节理的数量和位移量均很小的情况。非连续数值方法的出现可追溯到 20 世纪 60 年代的 Goodman 节理单元, 之后出现了刚块弹簧法、离散元法、DDA 法以及数值流形法等, 这些方法为分析复杂节理岩体的非线性力学特征提供了帮助^[1]。

块体离散元方法是用来解决不连续介质问题的数值模拟方法, 该法把节理岩体看成是由离散的岩块和岩块间的节理面所组成。岩块能移动、转动和变形, 而节理面可被压缩、分离或滑动, 从而可以较真实地模拟岩体中已经存在的不连续面, 但块体离散元方法却难以模拟诸如节理岩体的渐进破坏过程等复杂的力学行为。近年来, 随着微观研究手段的发展, 人们逐渐认识到, 岩石内部包含了从微观到细观并到宏观的各种尺度的缺陷; 岩石的损伤、破坏现象涉及从微观到宏观的各种尺度, 以及各层次的相互耦合。在远离平衡条件下, 微观的原子、分子层次与宏观层次之间没有简单的直接联系, 比较现实的途径是通过若干中间层次作为联系微观与宏观的桥梁, 这种中间尺度就是“细观”。从根本上讲, 岩石的力学行为由其内在的细观结构决定, 尤其是岩石细观裂纹及其演化、发展^[2]。从细观力学的角度来说, 岩石晶粒的变形是很小的, 塑性变形主要在于晶粒之间的滑移。岩石弹塑性变形过程中, 其宏观体积响应只是各种微结构之间相互作用的平均结果, 变形的机制是微裂纹成核和增长及其聚集而生成细观裂纹和裂纹的扩展与传播。

P. A. Cundall^[3, 4]在分析了块体系统的动力学效应后, 提出了基于牛顿第二定律的离散单元法及动态松弛离散元方法, 后来又基于离散元方法提出了细观颗粒离散元方法。细观离散元方法借用块体离散元方法的原理, 从细观层面上建立节理岩体的颗粒模型, 可以实现对岩体的细观力学特性进行数值模拟, 克服了块体离散元方法难以模拟复杂节理岩体渐进破坏过程的困难。颗粒流理论认为, 介质材料的力学行为取决于其组成细观颗粒和接触的几何和基本力学特性, 介质的总体力学特性由这些基本特性及其变化特征表现出来。D. O. Potyondy 和 P. A. Cundall^[5, 6]采用颗粒程序对不同围压条件下花岗岩双轴压缩试验进行了模拟。P. H. S. W. Kulatilake

等^[7]采用颗粒程序对节理岩体的单轴压缩试验等进行了研究。在 Shell, Agip, Security DBS 等国际大型企业的资助下, R. M. Holt 和 V. S. Particle^[8]完成了利用颗粒程序对岩心的力学特性的研究。A. Fakhimi 等^[9]采用颗粒程序对岩石中圆形洞室开挖引起的破坏区域进行了研究。K. Aoki 等^[10]采用颗粒程序对大型地下洞室开挖引起的开挖扰动区(EDZ)进行了研究, 并与连续介质力学方法进行了比较。M. Cai 等^[11]采用有限差分与颗粒流耦合方法对日本地下电站 Kannagawa 厂房的声发射及微震现象进行了模拟。

王泳嘉等^[12~15]将所研究的介质划分为颗粒单元几何体, 相邻颗粒单元采用弹脆性梁单元连接, 建立了梁-颗粒模型, 用以分析砂岩类无序介质在各种荷载作用下的连续破坏过程。

目前虽然 P. A. Cundall^[16]已经开发了颗粒流计算程序 PFC, 但还很不完善, 比如颗粒接触力学参数和力学模型方面, 还有很多问题需要解决, 本文正是基于其中的问题开展研究的。

2 颗粒离散元方法原理

离散元把离散体看作有限个离散单元的组合, 根据其组合特征分为颗粒和块体两大系统。块体元和颗粒元难以严格区分, 多面体的颗粒其实就是小的块体。PFC 通过离散元方法模拟颗粒的运动以及颗粒与颗粒之间应力的交互作用。离散元方法最初是为了分析岩石力学行为, 后来又被应用到土体的研究中, 可以模拟大位移, 离散块体的旋转(包括完全分离), 以及对新接触的自动识别。

在颗粒离散元中, 颗粒之间的交互作用是一种动态平衡的发展过程, 无论何时其内部力处于一种平衡状态。通过跟踪单个颗粒的运动轨迹可以得到颗粒集体中的接触力和位移。外部施加的力和体力通过墙以及颗粒的行为产生作用, 使运动在颗粒系统中进行传播。这是一个动态的过程, 传播的速度与离散系统的物理属性有关。

颗粒离散元的计算在应用颗粒体的牛顿第二定律和接触的力与位移关系的交替中进行。牛顿第二定律用来决定每一个颗粒的运动和旋转行为, 这些行为产生于接触力及外力与体力的作用。而力与位移的关系是用来更新由每一对接触产生的接触力。因此颗粒流方法在计算循环中, 交替应用牛顿第二定律与力-位移定律^[17]。

进行颗粒流模拟时，3个基本条件必须指明：

- (1) 颗粒集合体；
 - (2) 接触类型和颗粒的力学性质；
 - (3) 边界和初始条件。
- PFC 模型是球形颗粒的集合体，具有规定的尺寸、摩擦因数、剪切和法向接触刚度，从而可以聚集在一起。颗粒的尺寸通过给定的尺寸设定。

3 接触模型的开发

岩石是具有弹性、塑性和黏性的综合性流变体。为了能够对岩石的流变状态进行分析研究，需要在试验的基础上，拟合出岩石流变规律的数学表达式。由于岩石的性质和所存在的物理环境及条件的差异，所反映出的流变规律也不一样。流变模型通常可以通过3种简单模型(又称为元件)组成，即理想弹性模型、理想黏性模型和刚塑性模型。一般采用弹性模型和黏性模型拟合描述岩土的各种复杂变形现象。

广义 Kelvin 模型如图 1 所示，岩体变形由瞬时弹性变形和黏弹性变形两部分组成。在连续介质力学计算中，一般思路是从应力 - 应变本构关系出发进行研究。例如在快速拉格朗日差值计算方法中，其计算步骤是这样的：首先进行弹性计算，经过若干计算步，使结构达到平衡状态，确定出瞬时弹性应变；然后计算黏性应变，并确定流变产生的应变增量和应力状态；根据流变产生的新应力，进行新一轮的弹性计算，经过若干运动步，使系统达到平衡。最后重复以上步骤，直至流变终止，介质达到平衡。

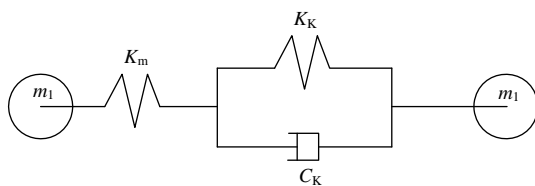


图 1 广义 Kelvin 模型
Fig.1 Generalized Kelvin model

PFC 自定义本构模型主要是对给出的位移增量，得到新的接触力。模型文件的编写主要包括：基类的描述，成员函数的描述，模型的注册，模型与 PFC 之间的信息交换。

PFC 是采用面向对象的 C++ 语言编写而成的，其本构模型都是以动态链接库文件的形式储存，在计算过程中主程序会自动调用用户指定的本构模型

的动态链接库文件进行计算。对于用户自定义的本构模型，需要在该环境下开发，然后由主程序调用执行。

颗粒离散元中的接触本构模型主要包括 3 个内容：接触刚度模型；滑动模型；黏结模型。接触刚度模型主要是体现基于牛顿第二定律的接触力与位移之间的关系，默认条件下，PFC 按照弹性进行计算。滑动模型则在剪切力和法向接触力之间施加了一种关系，这样两个接触的球体可能会产生滑动。黏结模型提供法向和剪切方向接触面上作用力的极限值，超过这个极限值，颗粒可能会脱开。

PFC 的自定义模型主要是通过调整接触间的刚度，使接触力和位移符合更复杂的非线性条件来达到计算目的的，而相应的结果也会影响到滑动和断裂计算情况。

由图 1 可以得到广义 Kelvin 体的总位移：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial u_{mk}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_{mk}}{\partial t^2} \tag{2}$$

对于 Kelvin 部分有

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + C_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \tag{3}$$

对于弹性元件部分有

$$f = K_m u_{mk} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = K_m \frac{\partial^2 u_{mk}}{\partial t^2} \tag{5}$$

将式(3)，(5)代入式(2)得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{K_k} - \frac{K_k}{C_k} \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{1}{K_m} \tag{6}$$

将式(4)变换得

$$-\frac{\partial f}{\partial t} \frac{K_k}{K_m C_k} = -\frac{\partial u_k}{\partial t} \frac{K_k}{C_k} \tag{7}$$

将式(7)代入(6)，变换得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{K_k}{C_k} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{K_k} + \frac{K_k}{C_k K_m} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{1}{K_m} \tag{8}$$

整理式(8)可得

$$\frac{1}{K_m} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{K_k} + \frac{K_k}{C_k K_m} \right) \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{K_k}{C_k} \frac{\partial u}{\partial t} \tag{9}$$

式(9)数值解为

$$f = K_k u_k + C_k \frac{\partial u_k}{\partial t} \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{-K_k u_k + f}{C_k} \quad (11)$$

对于 Kelvin 部分, 采用中心差分得

$$\frac{u_k^{t+1} - u_k^t}{\Delta t} = \frac{1}{C_k} \left[-\frac{K_k(u_k^{t+1} - u_k^t)}{2} + \frac{f_k^{t+1} - f_k^t}{2} \right] \quad (12)$$

因此有

$$u_k^{t+1} = \frac{2C_k}{2C_k + K_k \Delta t} \cdot \left[\frac{2C_k - K_k \Delta t}{2C_k} u_k^t + \frac{\Delta t}{2C_k} (f_k^{t+1} + f_k^t) \right] \quad (13)$$

对于弹性体部分, 有

$$u_m = u_{mk} \quad (14)$$

$$\dot{u}_m = \dot{u}_{mk} \quad (15)$$

则

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{1}{K_m} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (16)$$

采用中心差分格式可得

$$\frac{u_m^{t+1} - u_m^t}{\Delta t} = \frac{f^{t+1} - f^t}{K_m \Delta t} \quad (17)$$

因此有

$$u_m^{t+1} = \frac{f^{t+1} - f^t}{K_m} + u_m^t \quad (18)$$

总位移可表示为

$$u = u_k + u_m \quad (19)$$

采用中心差分格式得

$$u^{t+1} - u^t = u_k^{t+1} - u_k^t + u_m^{t+1} - u_m^t \quad (20)$$

将式(13)和(18)代入式(20)得

$$f^{t+1} = \frac{2C_k K_m + K_m^2 \Delta t}{2C_k + 2K_m \Delta t} \left[u^{t+1} - u^t + \frac{2K_k \Delta t}{2C_k + K_k \Delta t} u_k^t - \frac{-2C_k}{2C_k K_m + K_m^2 \Delta t} f^t \right] \quad (21)$$

4 算 例

为了研究在 Kelvin 接触模型中接触力随时间的变化情况, 本算例中将两个球并列连在一起, 水平方向的重叠位移为 0.05 m, 其位置和转动均被约束, 求解随着时间的增加, 球体间接触力的松弛情况, 相关力学参数如表 1 所示。

表 1 广义 Kelvin 模型力学参数

Table1 Mechanical parameters for generalized Kelvin model $N \cdot m^{-1}$

Kelvin 体		弹性体	
法向刚度	切向刚度	法向刚度	切向刚度
1×10^7	1×10^7	1×10^7	1×10^7

基于本算例中给出的特定条件, 求解式(9)得

$$f(t) = \frac{K_k s_1}{s_1 - s_2} + \frac{K_k s_2}{s_2 - s_1} \exp(-2t) \quad (22)$$

式中: s_1 和 s_2 均为式(9)的特征方程的特征根。

理论计算结果(见图 2)显示, 接触力随着时间的增大按照指数函数趋势下降; 数值计算结果与理论计算结果非常吻合。

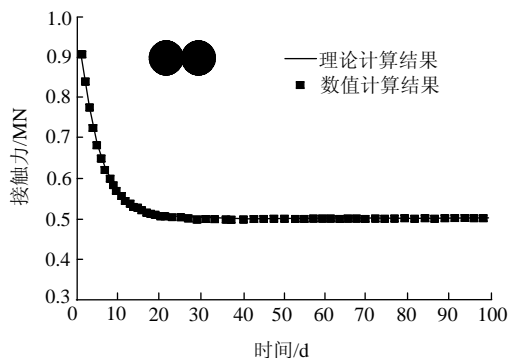


图 2 程序计算结果与理论计算值的对比

Fig.2 Normal contact force calculated from PFC result and analytical result

5 工程应用

我国西南某水电站的引水洞主要穿过大理岩和板岩地区。由于经受了多期多方位的强烈构造作用和区域变质作用, 岩体成分及结构十分复杂, 既存在原生的层面和节理面, 又有经后期改造形成的构造裂隙、断层错动带、挤压带及深拉裂缝, 同时受风化、卸荷等表生改造作用影响, 从而使得局部岩体变得松散, 岩体质量下降, 力学强度降低, 并表现出流变特性。

为了简化问题, 本文将引水洞的围岩考虑成一种岩性。Griffith 所提出的破坏理论认为, 脆性材料的强度取决于内部存在的微小裂隙, 在岩石颗粒内部和颗粒边界存在微裂纹, 或者是含有软弱物质颗粒之间胶合不牢的部位而形成一定程度的缺陷, 因此研究围岩的破坏过程很有必要。

图 3 是根据该水电站引水洞为背景建立的颗粒流力学模型,隧洞半径为 13 m。计算范围取为 70 m×70 m,边界条件通过边界颗粒来设定。

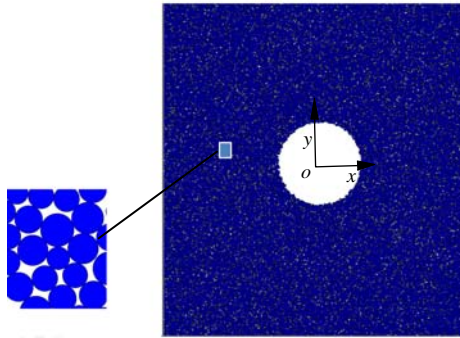


图 3 颗粒流计算模型

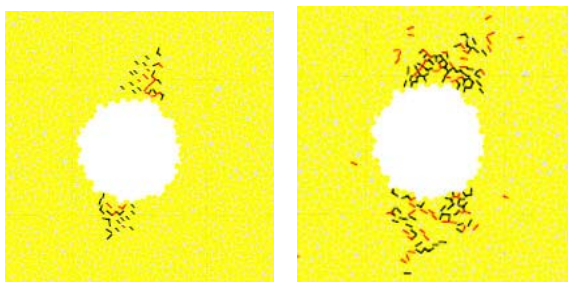
Fig.3 Calculation model for particle flow

计算中,初始地应力为 $\sigma_1 / \sigma_3 = 2.0$ 。计算力学参数的选取方法参考王 涛等^[18]的研究(见表 2)。隧洞开挖计算后,不同时步的裂纹显示了裂纹的扩展的方向和规模,如图 4 所示,裂纹用线状物表示,垂直于两个相邻颗粒的连线,长度等于两个相邻颗粒半径的均值。计算结果表明,微裂隙聚集形成岩体的破裂区域主要位于洞室的上部和下部。

表 2 颗粒细观力学参数

Table 2 Meso-mechanical parameters of particles

颗粒半径/m	颗粒法向刚度与切向刚度比	颗粒之间的接触模量/GPa	接触连接刚度法向与切向比	平行连接模量/GPa
0.2	1	20	1	20
颗粒摩擦因数	平行连接法向强度均值/MPa	平行连接法向强度标准差/MPa	平行连接切向强度均值/MPa	平行连接切向强度标准差/MPa
0.5	30	0.3	30	0.3
Kelvin 体法向刚度/(N·m ⁻¹)	Kelvin 体切向刚度/(N·m ⁻¹)	弹性体法向刚度/(N·m ⁻¹)	弹性体切向刚度/(N·m ⁻¹)	
1×10^8	1×10^8	1×10^8	1×10^8	



(a) 广义 Kelvin 模型 (b) 线弹性接触模型

图 4 不同接触模型隧洞周围裂纹扩展情况

Fig.4 Crack propagation around tunnel obtained from different contact models

计算结果表明,采用线弹性接触模型比广义 Kelvin 模型计算出的破裂范围要大。C. D. Martin 等^[19]曾经根据 Hoek-Brown 强度准则,计算出圆形隧洞的破坏区域,如图 5 所示,比较发现,采用广义 Kelvin 模型所得破裂区域与 C. D. Martin 等^[19]采用 Hoek-Brown 强度准则得出的破裂区域分布规律是一致的。

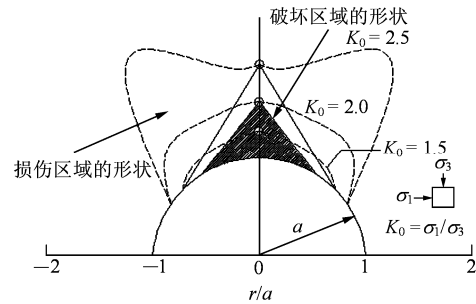


图 5 圆形隧洞周围破坏范围^[19]

Fig.5 Damage region around a circular tunnel^[19]

6 结 论

(1) 大部分岩石是由矿物或者碎屑物质胶结或者结晶而形成的,颗粒离散元从岩石结构这一基本细观形成特征出发,采用离散元方法从细观角度计算岩体的变形破坏特征,该方法具有理论上和技术上的先进性。

(2) 本文的广义 Kelvin 接触模型的开发方法具有一定的普遍性,在分析出其位移和力关系后,将理论解和数值解代入 PFC 中进行求解,通过算例进行验证,结果表明,二者非常吻合。并在此基础上,将其应用到工程问题中。

参考文献(References):

[1] JING L. A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modeling for rock mechanics and rock engineering[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2003, 40(3): 283 - 353.

[2] 谢 强, 姜崇喜, 凌建明. 岩石细观力学实验与分析[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 1997.(XIE Qiang, JIANG Chongxi, LING Jianming. Experiment and analysis of rock meso-mechanics[M]. Chengdu: Southwest Jiaotong University Press, 1997.(in Chinese))

[3] CUNDALL P A. A computer model for simulating progressive large-scale movements in blocky rock systems[C]// Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics. Nancy, France: [s.n.], 1971: 11 - 18.

- [4] CUNDALL P A. Formulation of a three-dimensional distinct element model—part I: a scheme to detect and represent contacts in system composed of many polyhedral blocks[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts*, 1988, 25(3): 107 - 116.
- [5] POTYONDY D O, CUNDALL P A. A bonded-particle model for rock[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2004, 41(8): 1 329 - 1 364.
- [6] POTYONDY D O, CUNDALL P A. Modeling notch-formation mechanisms in the URL mine-by test tunnel using bonded assemblies of circular particles[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 1998, 35(4/5): 510 - 511.
- [7] KULATILAKE P H S W, MALAMA B, WANG J. Physical and particle flow modeling of jointed rock block behavior under uniaxial loading[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2001, 38(5): 641 - 657.
- [8] HOLT R M, PARTICLE V S. laboratory modeling of in-situ compaction[J]. *Physics and Chemistry of the Earth, Part A: Solid Earth and Geodesy*, 2001, 26(1/2): 89 - 93.
- [9] FAKHIMI A, CARVALHO F, ISHIDA T, et al. Simulation of failure around a circular opening in rock[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2002, 39(4): 507 - 515.
- [10] AOKI K, MITO Y, MORI T, et al. Evaluation of behavior of EDZ around rock cavern by AE measurements and PFC simulation[C]// SHIMIZU Y, HART R D, CUNDALL P ed. *Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods—2004, Proceedings of the 2nd International PFC Symposium*. Leiden: A. A. Balkema, 2004: 73 - 83.
- [11] CAI M, KAISER P K, MORIOKA H, et al. FLAC/PFC coupled numerical simulation of AE in large-scale underground excavations[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2007, 44(4): 550 - 564.
- [12] 王泳嘉, 邢纪波. 离散元法及其在岩土力学中的应用[M]. 辽宁: 东北工学院出版社, 1991.(WANG Yongjia, XING Jibo. *Distinct element method and its applications to geotechnical engineering*[M]. Shenyang: Northeast University of Technology Press, 1991.(in Chinese))
- [13] 邢纪波, 俞良群, 王泳嘉. 砂岩类脆性无序介质连续破坏过程的细观模拟[J]. *地质力学学报*, 1998, 4(3): 28 - 35.(XING Jibo, YU Liangqun, WANG Yongjia. *Modelling of progressive failure of brittle disordered materials e.g. sandstone*[J]. *Journal of Geomechanics*, 1998, 4(3): 28 - 35.(in Chinese))
- [14] 邢纪波, 俞良群, 张瑞丰. 用于模拟颗粒增强复合材料破坏过程的梁-颗粒细观模型的实验验证[J]. *实验力学*, 1998, 13(3): 377 - 382.(XING Jibo, YU Liangqun, ZHANG Ruifeng. *Experimental verification of meso mechanical beam particle model for simulating progressive failure in particulate composite materials*[J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 1998, 13(3): 377 - 382.(in Chinese))
- [15] 邢纪波, 俞良群, 王泳嘉. 三维梁-颗粒模型与岩石材料细观力学行为模拟[J]. *岩石力学与工程学报*, 1999, 16(6): 627 - 630.(XING Jibo, YU Liangqun, WANG Yongjia. *3D beam-particle model for simulating meso-mechanical behavior of rock material*[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1999, 16(6): 627 - 630. (in Chinese))
- [16] CUNDALL P A. Numerical experiments on rough joints in shear using a bonded particle model[C]// LEHNER F K, URAI J L ed. *Aspects of Tectonic Faulting*. Berlin: Springer, 2000: 1 - 9.
- [17] Itasca Consulting Group, Inc.. PFC^{2D}—particle flow code in 2 dimensions(version 3.1)[R]. Minneapolis: Itasca Consulting Group, Inc., 2004.
- [18] 王涛, 盛谦, 熊将. 基于颗粒流方法自然崩落法数值模拟研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2007, 26(增 2): 4 202 - 4 207.(WANG Tao, SHENG Qian, XIONG Jiang. *Research on numerical simulation of natural caving method based on particle flow method*[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, 26(Supp.2): 4 202 - 4 207.(in Chinese))
- [19] MARTIN C D, KAISER P K, MCCREATH D R. Hoek-Brown parameters for predicting the depth of brittle failure around tunnels[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1999, 36(1): 136 - 151.