

朱 涛,王兰炜,陈化然. 横向黏度变化对球层中热对流的影响. 地球物理学报, 2010, **53**(2): 350~361, DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2010.02.013

Zhu T, Wang L W, Chen H R. Effects of lateral viscosity variation on thermal convection in a spherical shell. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2010, **53**(2):350~361, DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2010.02.013

横向黏度变化对球层中热对流的影响

朱 涛¹, 王兰炜², 陈化然¹

1 中国地震局地球物理研究所, 100081 北京

2 中国地震局地壳应力研究所, 100089 北京

摘 要 本文在常黏度的基础上, 加上横向黏度变化, 纯粹研究了横向黏度变化对球层中热对流的影响. 结果表明, 横向黏度变化可以加速或阻碍球层中的热对流, 并对球层中热传输方式有调节作用, 但是横向黏度变化对球层中热对流的影响会限制在一定的强度范围内, 并且难以改变球层中热对流的格局. 横向黏度变化所产生的环型场速度占总速度场的比例最多为十几个百分点, 难以解释观测到的地表板块运动中的环型场能量大小.

关键词 热对流, 横向黏度变化, 牛顿流体, 球层

DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2010.02.013

中图分类号 P541

收稿日期 2009-10-13, 2010-01-20 收修定稿

Effects of lateral viscosity variation on thermal convection in a spherical shell

ZHU Tao¹, WANG Lan-Wei², CHEN Hua-Ran¹

1 *Institute of Geophysics, China Earthquake Administration, 100081 Beijing, China*

2 *Institute of Crustal Dynamics, China Earthquake Administration, 100089 Beijing, China*

Abstract In this paper, the effects of lateral viscosity variation (LVV) on thermal convection in a spherical shell are studied for the case of the summation of constant viscosity and LVV. The results show that LVV may accelerate or decelerate thermal convection and adjust thermal transport way in a spherical shell. However, the LVV of affecting thermal convection will be limited in a certain range and can't change the patterns of thermal convection. The ratio of the toroidal velocity due to LVV to total one is at most over ten percents, which can't match the energy of the observed toroidal field of surface plate motions.

Keywords Thermal convection, Lateral viscosity variation, Newtonian fluid, Spherical shell

1 引 言

地幔对流被认为是地球内部热传递的最有效方式和地表板块运动的动力源^[1], 而地幔流变性是影响热传递和地幔对流状态和格局的关键因素^[2,3]. 在地幔对流的研究中, 常采用的黏度结构主要为两种: 第一种是常黏度或仅随径向(深度)变化的黏度;

第二种是仅随温度或同时随温度和压力变化的黏度. 第一种黏度结构比较简单, 利用之仅能获得地幔对流的极型场, 主要揭示了地幔物质上下运移特征和规律, 对解释地表板块在洋中脊处的发散运动、俯冲带和碰撞带处的汇聚运动, 甚至观测到的地球物理场发挥了重要的作用^[4~7]. 然而, 在齐次边界条件下, 利用这种黏度结构获得的地幔对流场无法解释地表板块旋转与走滑运动. 实验和理论研究^[8,9]表

明,地幔黏度强烈依赖于温度和压力.一般情况下,地幔温度同时存在径向变化和横向变化,因此第二种黏度结构中同时包含了两部分:剧烈的径向黏度变化^[10,11]和强烈的横向黏度变化^[12].地幔横向黏度变化的引入,不仅会对对流状态和格局、相变动力学、地球内部热结构和板块动力学产生巨大的影响^[13~23],而且即使在均匀边界下,也能够自然地获得环型场分量.虽然其速度大小仅占总速度场的几个百分点,但是由于其能量主要存在于地幔浅部^[13,24],而且在局部区域,在地表附近的上升热柱的正上方或附近,环型运动速度可以达到极型速度场的35%或更高^[25,26],可能会对大地水准面异常、重力异常和地形起伏产生重要的影响^[27~32].大量的研究结果^[13,16~19,33~35]表明,径向黏度变化对对流格局起控制作用,而横向黏度变化则起辅助的调节作用.在这些研究中,采用了随温度变化的黏度结构,这样就难以进一步认识和理解横向黏度变化对地幔对流的影响.要达到这个目的,需将横向黏度变化从径向黏度变化中分离出来.因此,本文不采用温度依赖的黏度结构,而是在径向黏度不变的情况下,加入一个强度可以变化的横向黏度变化项,来从理论上研究其对球层中热对流的影响.

2 基本方程及求解方法

2.1 基本方程

考虑内径为 R_1 , 外径为 R_2 的充满了不可压缩的牛顿流体的同心球层,纯粹从球层底部加热,采用 Boussinesq 近似,并取流体的普朗特数为无限大 ($Pr = \nu/\kappa$, ν 为运动学黏度; κ 为热扩散系数.地球地幔的普朗特数约 10^{24} ^[36]), 球层中流体的黏度为流体平均黏度 η_0 加上横向黏度变化 $\tilde{\eta}$. 在球坐标系 (r, θ, φ) 中,控制变黏度流体运动的无量纲方程组可表述为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1a)$$

$$-\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} + Ra\tilde{T}\hat{\mathbf{r}} = 0, \quad (1b)$$

$$\partial_t \tilde{T} + \mathbf{u} \cdot \nabla (T_c + \tilde{T}) = \nabla^2 \tilde{T}, \quad (1c)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = \eta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij}, \quad (1d)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij} = \partial_j u_i + \partial_i u_j, \quad (1e)$$

$$\eta = 1 + \tilde{\eta}, \quad (1f)$$

在式(1a)~(1f)中,采用了无量纲化因子:球层厚度 $d = R_2 - R_1$, κ/d , d^2/κ , $\Delta T = T_1 - T_2$ 和 η_0 分别对半径 r , 速度 \mathbf{u} , 时间 t , 温度和黏度进行了无量纲

化.其中, T_1, T_2 分别为内径 R_1 , 外径 R_2 处的恒定温度, $T_1 > T_2$; P 为压力; T_c 是无对流运动时的温度场,仅是径向 r 的函数,满足热传导方程 $\nabla^2 T_c = 0$; \tilde{T} 称为扰动温度,即由对流运动引起的相对无对流状态时的温度场的偏离; $\hat{\mathbf{r}}$ 是径向上的单位矢量; $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij}$ 为应变率; $\boldsymbol{\tau}_{ij}$ 为偏应力; η 是球层中流体的黏度; Ra 定义为

$$Ra = \frac{\alpha \rho_0 g \Delta T d^3}{\eta_0 \kappa}, \quad (2)$$

其中, α, ρ_0 和 g 分别为球层中流体的热膨胀系数,流体平均密度和重力加速度.

将速度场 \mathbf{u} 分解为标量极型场 Φ 和环型场 ψ ^[37], 然后在式(1b)两端分别施加运算 $(\mathbf{r} \cdot \nabla \times)$ 和 $(\Delta \cdot \nabla \times)$, 可得到关于环型场 ψ 和极型场 Φ 表达式 $\nabla^4 \Delta^2 \Phi =$

$$\frac{1}{1 + \tilde{\eta}} \left[-\frac{Ra \Delta^2 \tilde{T}}{r} - \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial B_\theta}{\partial \varphi} - \cos \theta B_\varphi \right) + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \theta} \right], \quad (3a)$$

$$\nabla^2 \Delta^2 \psi = \frac{1}{1 + \tilde{\eta}} \left[-\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \cos \theta A_\varphi \right) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \right], \quad (3b)$$

其中,

$$\Delta^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (3c)$$

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial r} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{rr} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{r\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \varphi} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{r\varphi} \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial r} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\theta\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \varphi} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\theta\varphi} \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial r} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{r\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\theta\varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \varphi} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}, \quad (3d)$$

$$\begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}, \quad (3e)$$

可以看出,式(3a)和(3b)比小横向黏度变化情况下^[25]均多了一项 $\frac{1}{1 + \tilde{\eta}}$, 其他项均相同.在本文中, $\tilde{\eta}$ 的变化会达到几个量级,因此 $\tilde{\eta}$ 不可忽略,使得在求解极型场时不能忽略式(3b)右端第二项,在求解过程中需进行交叉迭代式(3a)和(3b),从而实现极型场与环型场真正意义上的耦合.

本文仅研究上边界为刚性等温边界、下边界为应力自由等温边界的情形,其数学形式为:

$$\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0, \tilde{T} = 0, \frac{\psi}{r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (r = r_1) \quad (4a)$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \tilde{T} = 0, \psi = 0 \quad (r = r_2) \quad (4b)$$

2.2 横向黏度扰动的基本形式

在此,仿照朱涛和冯锐^[24],在不失横向黏度变化的动力学意义下,可以假定横向黏度具有如下的随余纬度变化的形式:

$$\bar{\eta} = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta), \quad (5)$$

其中 C_n 和 S_n 为给定或已知的系数.若取基阶即主要部分进行计算,此时 $\bar{\eta} = C_1 \cos\theta$. 结合式(3)可得

$$\begin{aligned} \nabla^4 \Lambda^2 \Phi = & \frac{1}{1 + C_1 \cos\theta} \left\{ -\frac{Ra\Lambda^2 \tilde{T}}{r} - \frac{C_1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{2}{r^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \theta \partial \varphi^2} - \frac{2C_1 \cos\theta}{r \sin^2 \theta} \left(\frac{-2}{r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right. \\ & + \frac{4C_1 \cos\theta}{r^3 \sin\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{C_1}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{4C_1 \cos\theta}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial \theta \partial \varphi} + \frac{C_1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial \theta \partial \varphi} - \frac{2C_1}{r^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^2 \partial \varphi} + \frac{2C_1}{r^2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial r \partial \theta^2 \partial \varphi} \\ & - \frac{4C_1 \cos^2 \theta}{r^3 \sin^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{C_1 \cos\theta}{r^3 \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{C_1 \cos 2\theta}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{2}{r^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{4C_1 \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{C_1 \cos\theta}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \varphi} \\ & + \frac{C_1 \cos 2\theta}{r^4 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Lambda^2 \Phi) - \frac{2C_1 \cos\theta}{r^4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{C_1 \cos\theta}{r^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{4C_1 \sin\theta}{r^4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{2C_1 \sin\theta}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial \theta^2} \\ & + \frac{C_1 \sin\theta}{r} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial r^3 \partial \theta^2} + \frac{C_1}{r^4 \sin\theta} \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \varphi^2} (\Lambda^2 \Phi) + \frac{3C_1 \cos\theta}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\Lambda^2 \Phi) + \frac{2C_1 \sin\theta}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\Lambda^2 \Phi) \\ & + \frac{C_1 \sin\theta}{r^4} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} (\Lambda^2 \Phi) + \frac{C_1 \sin\theta}{r^2} \left(\frac{2}{r^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \theta^3} + \frac{8C_1 \cos\theta}{r^4} \Lambda^2 \Phi - \frac{4C_1 \cos\theta}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (\Lambda^2 \Phi) \\ & \left. + \frac{C_1 \cos\theta}{r \sin\theta} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{C_1}{r} \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^2 \partial \theta \partial \varphi} - \frac{C_1 \sin\theta}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} (\Lambda^2 \Phi) \right\}, \quad (6a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Lambda^2 \psi = & \frac{C_1}{r(1 + C_1 \cos\theta)} \left[\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta \partial \varphi^2} - \frac{2 \cos\theta}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \Lambda^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\cos^2 \theta}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right. \\ & \left. + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^3} \right]. \quad (6b) \end{aligned}$$

至此,式(6)、(1c)和边界条件(4)构成了求解横向黏度仅随余纬度变化下的极型场和环型场的方程组.

2.3 求解方法

2.3.1 球谐函数展开

假定极型场标量函数 Φ 、环型场标量函数 ψ 、黏度扰动 $\bar{\eta}$ 在球面上连续可积,则可将方程中的各种物理量展开成复球谐的形式,具体为

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Phi_l^m(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (7a)$$

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_l^m(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (7b)$$

$$\bar{\eta} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \bar{\eta}_l^m(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (7c)$$

其中, $Y_l^m(\theta, \varphi)$ 是正规化的 l 阶 m 级面谐函数,形式为

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = N_l^m P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad (8)$$

$$N_l^m = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} \quad (9)$$

其中, $P_l^m(\cos\theta)$ 是正规化的 l 阶 m 级的缔合勒让德函数.面谐函数的正交归一关系为

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^{*m} Y_k^n \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_l^k \delta_m^n, \quad (10)$$

其中, Y_l^{*m} 是 Y_l^m 的共轭.

将式(7)带入式(6)和式(4)可得

$$D_l^2 \Phi_l^m = \Gamma_{20} \tilde{T}_l^m + \Gamma_{21} \Phi_l^m + \Gamma_{22} \frac{d\Phi_l^m}{dr} + \Gamma_{23} \frac{d^2 \Phi_l^m}{dr^2} + \Gamma_{24} \frac{d^3 \Phi_l^m}{dr^3} + \Gamma_{25} \psi_l^m + \Gamma_{26} \frac{d\psi_l^m}{dr} + \Gamma_{27} \frac{d^2 \psi_l^m}{dr^2}, \quad (11a)$$

$$D_l \psi_l^m = \Gamma_8 \psi_l^m + \Gamma_9 \Phi_l^m + \Gamma_{10} \frac{d\Phi_l^m}{dr}, \quad (11b)$$

$$D_l \tilde{T}_l^m = \frac{-l(l+1)}{r} \frac{dT_c}{dr} \Phi_l^m + \frac{-l_2(l_2+1)\Phi_{l_2}^{m2}}{r} \frac{d\tilde{T}_{l_1}^{m1}}{dr} \Gamma_{28} - \frac{1}{r^2} \Phi_{l_2}^{m2} \tilde{T}_{l_1}^{m1} (\Gamma_{29} + \Gamma_{30}) - \frac{1}{r} \frac{d\Phi_{l_2}^{m2}}{dr} \times \tilde{T}_{l_1}^{m1} (\Gamma_{29} + \Gamma_{30}) + \frac{1}{r} \psi_{l_2}^{m2} \tilde{T}_{l_1}^{m1} (\Gamma_{31} - \Gamma_{32}), \quad (11c)$$

$$\Phi_l^m = \frac{d^2 \Phi_l^m}{dr^2} = 0, \tilde{T}_l^m = 0, \frac{\psi_l^m}{r} - \frac{d\psi_l^m}{dr} = 0 \quad (r = r_1), \quad (11d)$$

$$\Phi_l^m = \frac{d\Phi_l^m}{dr} = 0, \tilde{T}_l^m = 0, \psi_l^m = 0 \quad (r = r_2) \quad (11e)$$

其中, $D_l = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}$, $\Gamma_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ 为积分系数, 具体表达式见附录 A.

式(11)是 $l \neq 0$ 情况下计算极型场和环型场分量的方程组. 从式(11a)~(11c)可以看出, 环型场和极型场的不同波长的分量是相互耦合的, 它们的耦合程度由与黏度横向变化大小 C_1 有关的系数 Γ_i 来控制. 当 $l=0$ 时, 式(11a)和(11b)变为

$$D_l^2 \Phi_l^m = -\frac{\Gamma'_{11} \tilde{T}_l^m}{r} + \frac{8\Gamma_{19}}{r^4} \Phi_l^m - \frac{4\Gamma_{19}}{r^3} \frac{d\Phi_l^m}{dr}, \quad (12a)$$

$$D_l \psi_l^m = 0, \quad (12b)$$

显然, 环型场为零, 但式(12a)比常黏度模型多了两项(右端第二和第三项), 也就是说, 在横向变化黏度存在的情况下, 零阶极型场不再只由热浮力源产生.

2.3.2 Galerkin 近似

Galerkin 方法是将连续问题转换为离散问题的一种方法. Zebib 等^[38]、叶正仁等^[39]以及朱涛和冯锐^[40]将之用来求解地幔对流模型. 在此, 也采用 Galerkin 方法来进行求解式(11). 设

$$\tilde{T}_l^m = \sum_j \Theta_{lj}^m W_j(r), \quad (13a)$$

$$\Phi_l^m = Ra \sum_j \Theta_{lj}^m f_{lj}^m(r), \quad (13b)$$

$$\psi_l^m = Ra \sum_j \Theta_{lj}^m h_{lj}^m(r), \quad (13c)$$

取基函数

$$\int_{r_1}^{r_2} (\mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{T})_l^m W_k(r) dr = -Ra \sum_{l_1, m_1} \sum_{l_2, m_2} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \left\{ \Theta_{l_1 j_1}^{m_1} \Theta_{l_2 j_2}^{m_2} \left[\Gamma_{28} \int_{r_1}^{r_2} \frac{l_2(l_2+1)}{r} \frac{dW_{j_1}}{dr} f_{l_2 j_2}^{m_2} W_k dr + (\Gamma_{29} + \Gamma_{30}) \int_{r_1}^{r_2} \frac{W_{j_1} W_k}{r} \left(\frac{f_{l_2 j_2}^{m_2}}{r} + \frac{d f_{l_2 j_2}^{m_2}}{dr} \right) dr - (\Gamma_{31} - \Gamma_{32}) \int_{r_1}^{r_2} \frac{h_{l_2 j_2}^{m_2} W_{j_1} W_k}{r} dr \right] \right\}, \quad (16c)$$

当 $l = 0$ 时, 式(12a)变为

$$D_l^2 f_{lj}^m = -\frac{\Gamma'_{11}}{r} W_j + \frac{8\Gamma_{19}}{r^4} f_{lj}^m - \frac{4\Gamma_{19}}{r^3} \frac{d\Phi_l^m}{dr}, \quad (17)$$

从式(15)和(16)可以看出, 先利用式(15a)或(17)、(15b)、(15d)、(15e)可获得 f_{lj}^m 和 h_{lj}^m , 然后便归结为求解关于 Θ_{lj}^m 的非线性方程组(15c).

$$W_j(r) = \sqrt{2} \sin[j\pi(r-r_1)], \quad (14)$$

则 Θ_{lj}^m 自然满足关于温度的边界条件. 将式(13)和(14)带入式(11)和(12), 并利用三角函数的正交性可得

$$D_l^2 f_{lj}^m = \Gamma_{20} W_j + \Gamma_{21} f_{lj}^m + \Gamma_{22} \frac{df_{lj}^m}{dr} + \Gamma_{23} \frac{d^2 f_{lj}^m}{dr^2} + \Gamma_{24} \frac{d^3 f_{lj}^m}{dr^3} + \Gamma_{25} h_{lj}^m + \Gamma_{26} \frac{dh_{lj}^m}{dr} + \Gamma_{27} \frac{d^2 h_{lj}^m}{dr^2}, \quad (15a)$$

$$D_l h_{lj}^m = \Gamma_8 h_{lj}^m + \Gamma_9 f_{lj}^m + \Gamma_{10} \frac{df_{lj}^m}{dr}, \quad (15b)$$

$$\sum_j \alpha_{lkj} \Theta_{lj}^m = Ra \sum_j \beta_{lkj} \Theta_{lj}^m + \int_{r_1}^{r_2} (\mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{T})_l^m W_k(r) dr, \quad (15c)$$

$$f_{lj}^m = \frac{d^2 f_{lj}^m}{dr^2} = 0, \frac{h_{lj}^m}{r} - \frac{dh_{lj}^m}{dr} = 0 \quad (r = r_1) \quad (15d)$$

$$f_{lj}^m = \frac{df_{lj}^m}{dr} = 0, h_{lj}^m = 0 \quad (r = r_2) \quad (15e)$$

其中,

$$\alpha_{lkj} = \int_{r_1}^{r_2} W_k D_l W_j dr, \quad (16a)$$

$$\beta_{lkj} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{-l(l+1)}{r} \frac{dT_c}{dr} W_k f_{lj}^m dr, \quad (16b)$$

3 数值方法及程序验证

对于式(15)和(16)的数值离散,文中采用有限差分方法.具体离散方法:对一阶和三阶偏微分采用向前差分格式,对二阶和四阶则采用向后差分格式.对非线性方程组(15c)采用 Levenberg-Marquardt 方法^[41]进行求解,迭代格式为

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \omega_k (\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \mu_k \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}^k), \quad (18)$$

其中, $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}}$ 为 Jacobi 矩阵; μ_k 为阻尼因子,其值大于等于零, ω_k 为松弛因子, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}), \dots, f_N(\mathbf{x}))^T$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)^T$.

本文采用两种方式来验证程序计算结果的可靠

性.第一,采用与解析方法 LSA (linear stability analysis) 获得的临界瑞利数 Ra_{cr} 进行对比的方式来验证本文所用的程序代码.验证时使用的模型^[15]为:等黏度球层模型,纯粹从底部加热,上下均为应力自由等温边界,球层内径为 0.5,外径为 1.0.文中取 Galerkin 最大求和项数为 6,对式(16a)和(16b)的积分步长为 0.005.忽略非线性方程组(15c)中的非线性项后,计算得到的各阶 l 的临界瑞利数见表 1.表 1 中的第三行值是根据文献[15]提供的结果换算得到的.第二,通过程序计算获得上下边界层处的 Nussult 数 Nu ,然后与文献[15]提供的结果进行比较.验证时使用的模型^[15]为:等黏度球层模型,纯粹从底部加热,上下均为应力自由等温边界,球层内径为 0.55,外径为 1.0.结果见表 2.

表 1 临界瑞利数 Ra_{cr}

Table 1 Critical Rayleigh number Ra_{cr}

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ra_{cr} (本文)	2134.3	1115.0	991.0	1119.7	1419.6	1894.8	2574.3	3498.9	4715.8
Ra_{cr} (LSA)	2100.0	1102.5	985.0	1117.5	1418.75	1897.5	2578.75	3507.5	4727.5
误差(%)	1.63	1.13	0.60	0.19	0.006	0.14	0.17	0.25	0.25

表 2 Nussult 数的比较 ($Ra=7000$)

Table 2 Comparison of Nussult number ($Ra=7000$)

本文的结果		文献[15]的结果	
上边界 Nu	下边界 Nu	上边界 Nu	下边界 Nu
3.724	3.817	3.519	3.472

从表 1 看出,利用本文的程序计算的临界瑞利数与解析方法获得的值相差很小,除一阶(1.63%)和二阶(1.13%)的误差大于 1.0% 外,其余均小于 1.0%.从表 2 可以看出,本文计算的 Nu 数虽然比文献[15]的结果大一些,但与文献[15]的结果还是比较接近的,这表明本文的程序是可靠的.

4 计算结果及分析

在研究中,球谐展开的最大阶数取 $l_{max} = 6$,同时取 $j_{max} = k_{max} = 6$,以及 $R_1 = 3471$ km, $R_2 = 6271$ km,它们分别对应于核幔边界和岩石圈底界面的位置.全地幔瑞利数的量级约为 $10^{7[36]}$,因此计算中取瑞利数 $Ra = 10^7$.研究表明,横向黏度变化的最大值出现在上地幔和下地幔中,达到了 2~4 个量级,而中地幔则为 1~2 个量级^[12],因此在计算中取 $C_1 = 0.0, 1.0, 10.0, 100.0, 500.0$ 和 1000.0 .

4.1 临界瑞利数 Ra_{cr}

临界瑞利数 Ra_{cr} 是表征球层中流体由稳定状态(非对流)向非稳定状态(对流)转换的一个物理量.只有当流体的瑞利数大于临界瑞利数时,对流才可能发生.表 3 显示了不同横向黏度变化下不同波长(球谐阶数)的临界瑞利数.表 3 表明,不同横向黏度变化下,临界瑞利数随波长的变化趋势是相同的:临界瑞利数先随波长增大而减小,在 $l=4$ 时达到最小值,然后增大;不同波长的临界瑞利数随横向黏度的变化趋势也是相同的:临界瑞利数随横向黏度变化出现减小—增加—减小的趋势,最小值都出现在 $C_1 = 1.0$ 处,最大值都出现 $C_1 = 10.0$ 处.这表明,在横向黏度变化小(如 $C_1 = 1.0$)时,有利于球层中的流体发生热对流运动(与无横向黏度变化 $C_1 = 0.0$ 时相比);随横向黏度变化增大,对应于各波长的临界瑞利数迅速增大,到 $C_1 = 10.0$ 时,临界瑞利数达到最大值,此时几乎是无横向黏度变化时的临界瑞利数的 10 倍,极不利于球层中热对流运动的发生;随着横向黏度变化的进一步增大,各波长对应的临界瑞利数虽然有所变化,但量级与 $C_1 = 10.0$ 时的相同,不利于球层中热对流运动的产生.本文结果与随温度变化的黏度模型所获得的结果:各波长的临界

表 3 不同横向黏度变化下各球谐系数的临界瑞利数

Table 3 Critical Rayleigh number corresponding to each spherical harmonic coefficient at different LVV

C_1	$l=1$	2	3	4	5	6
0	6384.45	2706.35	1885.65	1685.25	1746.05	1980.15
1	1180.15	473.75	321.55	283.95	294.75	339.35
10	66347.65	18452.15	17111.85	12314.45	15494.45	15110.55
100	436964.55	133676.75	115805.15	89609.65	107942.55	110848.25
500	294262.95	103810.75	93611.05	74765.35	91612.55	95693.85
1000	256833.85	111449.75	105484.95	83980.05	101322.05	103688.05

瑞利数随黏度差异的增加而逐渐增大^[18]有所不同. 这表明,当径向黏度和横向黏度同时随温度变化时,各波长的临界瑞利数主要受径向黏度变化的控制,而横向黏度变化则起次要作用. 只有在径向黏度结构不变时,才能凸显横向黏度变化的影响.

4.2 平均温度

平均温度 T_m 可以表征对流的状态、不同瑞利数下温度扰动的大小和球层中低温、高温区的相对大小,是一个重要的物理量. 定义为^[38,39]

$$T_m = T_c + \langle \tilde{T} \rangle, \quad (19a)$$

其中 $\langle \tilde{T} \rangle$ 是扰动温度场在不同深度处的平均值.

$$T_c = \frac{r_1 r_2}{r} - r_1, \quad (19b)$$

$$\langle \tilde{T} \rangle = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{T}(r, \theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (19c)$$

图 1 显示了不同横向黏度变化下无量纲平均温度 T_m 和无对流时的温度场 T_c 随深度的变化曲线. 两条曲线之差即为 $\langle \tilde{T} \rangle$, 它的大小和分布揭示了有关热对流状态以及热对流和热传导之间的相对重要性. T_m 位于 T_c 曲线之上(以曲线 T_m 和 T_c 的交点为分界点), 即 $\langle \tilde{T} \rangle > 0$ 的区域, 反映了温度相对于无对流(仅为热传导)状态时升高, 称之为高温区; 反之, $\langle \tilde{T} \rangle < 0$ 的区域, 称之为低温区; 曲线 T_m 和 T_c 的交点处 $\langle \tilde{T} \rangle = 0$, 称之为转换点. 当高温区的面积大于低温区的面积时, 表明球层中热传输机制主要为对流传热, 反之则以热传导方式为主. 图 1 揭示出, 当横向黏度变化小($C_1 = 1.0$)时, 温度随深度的变化曲线几乎与无横向黏度变化($C_1 = 0.0$)时的重合, 随着横向黏度变化增强, 低温区逐渐扩张, 高温区逐渐收缩, 表明对流强度逐渐减弱, 即对流传热逐渐减弱, 热传导方式逐渐增强. 换句话说, 横向黏度变化的增强对热对流有阻碍作用. 低温区扩展较快的横向黏度变化范围是 $C_1 = 1.0 \sim 100.0$, 表明在此横向黏度变化范围内热传导方式作用增加较快;

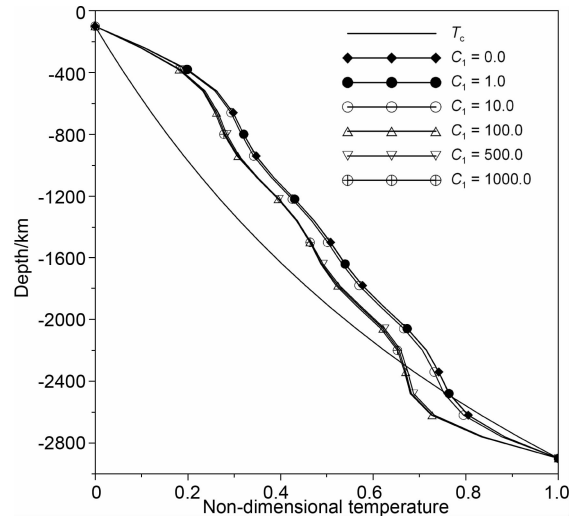


图 1 不同横向黏度变化下无量纲平均温度 T_m 和无对流时的温度场 T_c 随深度的变化曲线

Fig. 1 The curves of non-dimensional average temperature T_m and T_c in case of no convection versus depth at different LVV, respectively

当横向黏度变化增大到一定程度(如 $C_1 = 100.0 \sim 1000.0$), 低温区和高温区的范围变化甚微, 即对流传热和热传导传热方式基本上不受横向黏度变化的影响. 这表明横向黏度的变化对球层中热传输方式的影响可能仅限制在一定的横向黏度变化强度内. 同时包含了黏度径向变化和横向变化的随温度变化的黏度模型的结果表明, 随着黏度差异的增大, 热传导传热的作用逐渐减弱, 热对流传热的作用逐渐增强^[19]. 这些结果表明, 黏度的径向变化可能对球层中热对流的热传输方式起控制作用, 而横向黏度变化仅能对其进行调整.

4.3 对流速度随深度的变化特征

图 2 是不同横向黏度变化下对流速度的均方根值随深度的变化曲线. 可以看出, 不同横向黏度变化下, 对流速度随深度变化的趋势基本上是一致的, 这

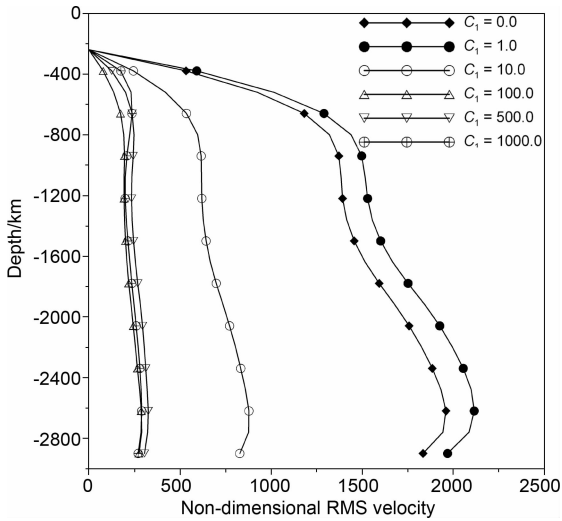


图2 不同横向变化黏度下无量纲速度随深度的变化曲线
Fig. 2 The curves of non-dimensional RMS velocity versus depth at different LVC

表明了横向黏度变化没有改变球层中对流的速度结构. 然而, 随着横向黏度变化增强, 对应深度上速度呈现先增大后显著减小的现象(与无横向黏度变化 $C_1 = 0.0$ 时相比). 当横向黏度变化不大于球层中流体的平均黏度 η_0 的一倍时, 对应深度上的速度略微增加, 表明当横向黏度变化不大时, 球层中热对流强度会增强, 起到加速球层中热对流运动的作用; 然后, 随着横向黏度变化进一步增强, 对应深度上的速度显著减小, 特别是 C_1 处于 1.0 与 10.0 之间时, 速度减小的梯度较大, 起到阻碍球层中热对流运动的作用; 随后当 C_1 增大到 100.0 以上时, 尽管对应深度上的速度仍明显小于无横向黏度变化的速度, 但速度差异变化甚微, 这表明横向黏度变化虽然对地幔对流强度有明显的影 响, 但是其影响可能仅限制在一定的横向黏度变化强度内. 在上地幔, 对流速度随深度几乎呈线性增大, 其斜率随横向黏度变化先减小而后增大; 在下地幔, 速度分布呈马鞍状, 峰值出现在深度约 900 km 和 2700 km 处, 低峰值则出现在中地幔, 深度约 1200 km 处. Ratcliff 等^[18] 和 Stemmer 等^[19] 的研究表明, 随温度变化的黏度结构的球层中, 热对流的均方根速度随深度的变化曲线在上、下边界处的黏度差异小于 3 个量级时比较相似, 且随黏度差异增大, 对应深度上的速度减小, 而当黏度差异大于 3 个量级时, 速度分布曲线失去了相似性, 且随黏度差异的增大, 球层浅部的速度减小, 而深部的速度增大, 这表明球层中对流的均方根速度可能主要受径向黏度的控制.

4.4 环型场速度随深度的变化特征

图 3 是不同横向黏度变化下环型场速度的均方根值随深度的变化曲线. 可以看出, 不同横向黏度下的环型场速度的最大值均出现在上、中地幔, 并且环型场的主要能量也主要集中在上、中地幔, 这不同于总速度场最大值均出现在下地幔的情形. 环型场的这种特点可能是其对大地水准面异常和地表地形有明显影响的原因^[29, 32]. 环型场速度并不单一地随着横向黏度变化的增强而增大. 当横向黏度变化 C_1 在 1.0~10.0 之间时, 环型场速度表现出随横向黏度减小的变化, 尔后基本上随着横向黏度变化 C_1 增加而增大, 但在下地幔, 环型场速度增加相对缓慢. 随着横向黏度变化增大, 环型场速度占总速度的百分比增大. 从约 1.0% ($C_1 = 1.0$)、1.5% ($C_1 = 10.0$)、7.6% ($C_1 = 100.0$)、9.6% ($C_1 = 500.0$) 增大到 13.8% ($C_1 = 1000.0$), 这表明即使地幔中存在如此强烈的横向黏度变化, 由此所产生的环型场速度也仅占总速度场的十几个百分点, 这与前人的研究结果基本一致^[21]. 由此说明单纯地利用横向黏度变化所产生环型场的能量很难解释在地表观测到的极型场与环型场能量几乎平等的现象.

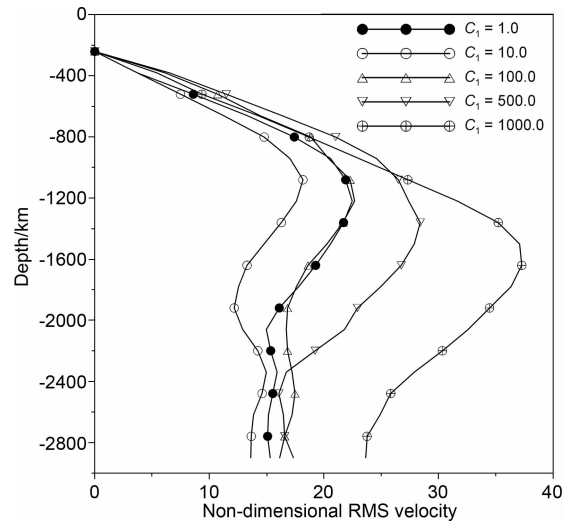


图3 不同横向变化黏度下无量纲环型场速度随深度的变化曲线

Fig. 3 The curves of non-dimensional RMS toroidal field velocity versus depth at different LVC

4.5 对流温度场与速度场特征

图 4 给出了不同横向黏度变化下的 $\varphi = 45^\circ$ 的南北向温度扰动剖面. 它揭示出在所有的温度剖面中, 在上边界附近存在明显的层状结构; 在下边界附近也存在层状结构, 但是没有上边界层附近的那么

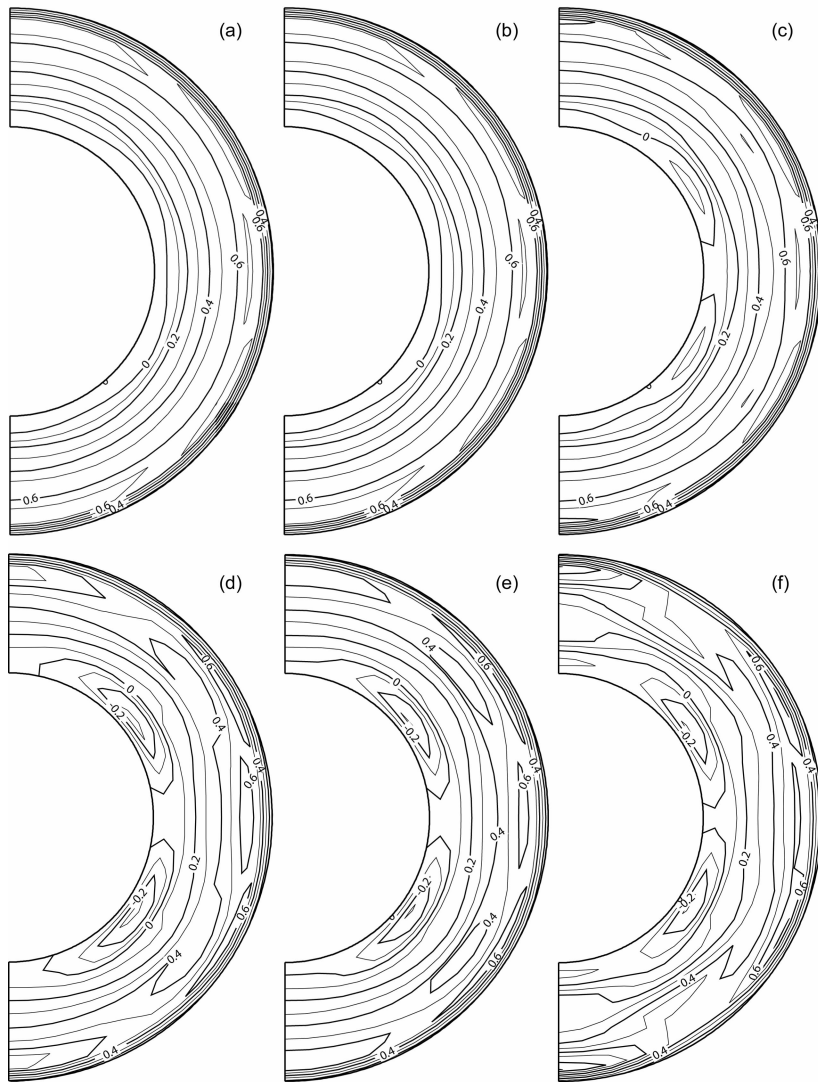


图 4 不同横向变化黏度下 $\varphi=45^\circ$ 的温度扰动图像(图中数字单位为无量纲)
(a) $C_1=0.0$; (b) $C_1=1.0$; (c) $C_1=10.0$; (d) $C_1=100.0$; (e) $C_1=500.0$; (f) $C_1=1000.0$.

Fig. 4 The profiles of fluctuating temperature at $\varphi=45^\circ$ for different LVV

显著. 在所有剖面中, 正向温度扰动的区域 ($\tilde{T} > 0$) 明显大于负向温度扰动 ($\tilde{T} < 0$) 的区域, 表明球层中热传输方式主要为对流传热, 而热传导作用很微弱. 但是随着横向黏度变化逐渐增强, 在下边界附近两个明显的负向温度扰动 ($\tilde{T} < 0$) 中心逐渐扩张, 负向温度扰动区域逐渐增大, 表明热传导作用逐渐增强. 当横向黏度变化的最大值不大于背景值的 1 倍时, 在下边界附近存在两个孤立的、范围很小的负向温度扰动中心, 表明此时球层中热传输方式几乎全部为对流传热, 热传导方式仅在非常微小的、两个孤立的区域发挥作用; 当横向黏度变化增强时, 两个孤立的负向温度扰动中心逐渐扩张. 当达到 100 倍以上时, 正、负向温度扰动区域的分布范围变化不大, 表明此时球层中热对流和热传导两种方式的作用

用已经达到相对平衡, 基本与横向黏度变化强度无关.

图 5 是对应于图 4 的对流剖面. 图 5 揭示出, 所有剖面中均存在 4 个对流胞, 靠近赤道的两个对流胞的纵横比 (约为 2.2) 比靠近两极的对流胞的纵横比 (约为 1.76) 略大; 在对流胞的顶部, 形成了一个几乎静止的盖层, 与其下面强烈的对流运动形成了强烈的反差. 各对流剖面中的对流速度大小有差异. 随横向黏度变化增强, 对流速度先增大 (图 5b), 然后逐渐减小, 最后达到速度变化微弱的状态, 即相对稳定的状态 (图 5(d~f)). 表明横向黏度的变化没有改变球层中热对流的对流结构, 仅可能对对流结构起到一定的调节作用. 这与实验结果^[42]和数值模拟结果^[43,44]一致.

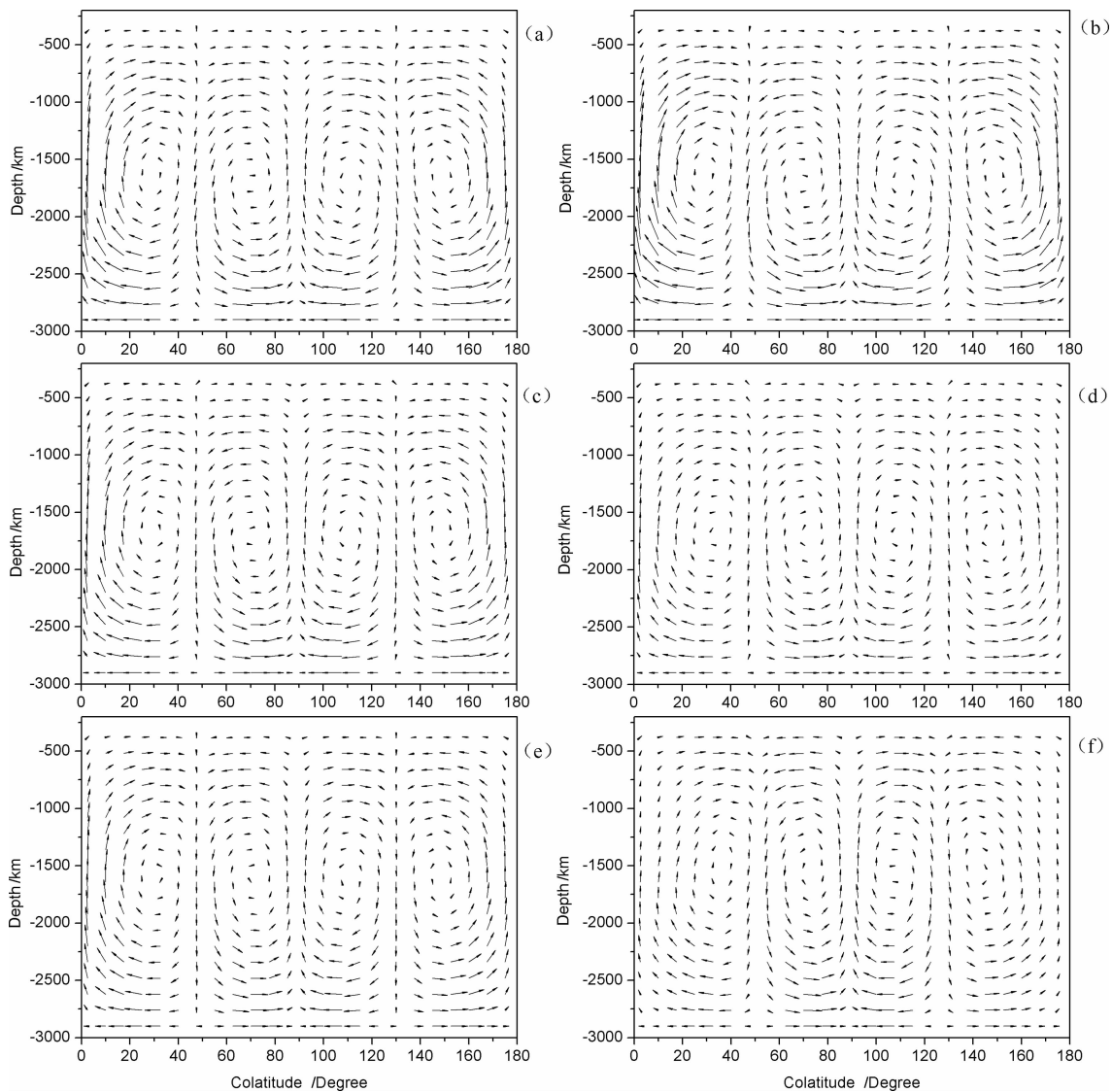


图5 不同横向变化黏度下 $\varphi=45^\circ$ 的对流图像

(a) $C_1=0.0$; (b) $C_1=1.0$; (c) $C_1=10.0$; (d) $C_1=100.0$; (e) $C_1=500.0$; (f) $C_1=1000.0$.

Fig. 5 The convection patterns at $\varphi=45^\circ$ for different LVV

5 结论

前人在研究横向黏度变化的影响时,常常采用温度依赖的黏度结构^[14~19].这种黏度结构同时包含了径向黏度和横向黏度.径向黏度可能对地幔对流起控制作用,而横向黏度则起次要的调节作用^[29, 31, 32],这就使得难以真正认识横向黏度变化对对流的影响.本文在径向黏度为常数的基础上,加上了一个仅随余纬度变化的横向黏度变化项 $\bar{\eta} = C_1 \cos\theta$,把横向黏度变化剥离出来.虽然非常简单,但有助于认识和理解横向黏度变化对球层中热对流的影响.本文的结果表明,横向黏度变化对球层中热对流的临界瑞利数、平均温度、均方根速度、温度场

及对流速度场具有重要的影响.

横向黏度变化可以加速或阻碍球层中的热对流.当横向黏度变化不大(如 $C_1=1.0$)时,球层中热对流的临界瑞利数减小,均方根速度增大,横向黏度变化起到了加速热对流的作用;随着横向黏度变化增强,临界瑞利数剧增,均方根速度显著减小,横向黏度变化起到阻碍球层热对流的作用.

横向黏度变化对球层中热传输方式有调节作用.当横向黏度变化不大(如 $C_1=1.0$)时,对应深度上的横向平均温度曲线几乎与无横向黏度变化时的重合,表明小横向黏度变化对球层中热对流的热传输方式几乎没有影响.随着黏度变化增强,球层中的低温区逐渐扩张,高温区逐渐收缩,表明热传导传热增强,对流传热减弱.横向黏度变化增强到一定程度

时,这两种方式的作用会达到相对平衡. 不过,无法改变球层中高温区占优势的状况,表明横向黏度变化仅对球层中热传输方式有一定的调节作用.

横向黏度变化对球层中热对流影响限制在一定的范围内. 当横向黏度变化大于 100 倍时,球层中热对流的临界瑞利数、横向平均温度、均方根速度以及温度扰动场随横向黏度变化很小,达到了一个相对的稳定状态;而它们在横向黏度变化处于 1~100 倍之间时,变化的梯度较大,即横向黏度变化对它们的影响较明显.

横向黏度变化所产生的环型场能量主要集中在中、上地幔. 环型场速度占总速度场的比例随着横向黏度变化而增大,但最多仅占总速度场的十几个百分点,因此仅利用横向黏度变化所产生的环型场能量难以解释观测到的地表板块运动中的环型场能量大小.

附录 A:

$$\Gamma_{1l}^m = \Gamma_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C_1}{1 + C_1 \cos\theta} \frac{\partial^3 Y_l^m}{\partial \theta \partial \varphi^2} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A1})$$

$$\Gamma_{2l}^m = \Gamma_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{2C_1 \cos\theta}{1 + C_1 \cos\theta} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \varphi^2} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A2})$$

$$\Gamma_{3l}^m = \Gamma_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C_1 \sin\theta}{1 + C_1 \cos\theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A3})$$

$$\Gamma_{4l}^m = \Gamma_4 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C_1 \sin^2\theta}{1 + C_1 \cos\theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A4})$$

$$\Gamma_{5l}^m = \Gamma_5 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C_1 \sin^2\theta}{1 + C_1 \cos\theta} \frac{\partial^3 Y_l^m}{\partial \theta^3} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A5})$$

$$\Gamma_{6l}^m = \Gamma_6 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C_1 \cos^2\theta}{1 + C_1 \cos\theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A6})$$

$$\Gamma_{21l}^m = \Gamma_{21} = -\frac{2(\Gamma_2 - \Gamma_1 + \Gamma_{12} - \Gamma_7 + 2\Gamma_{18} + \Gamma_5) - l(l+1)(\Gamma_{12} + \Gamma_1 + 3\Gamma_7 + 2\Gamma_{18} + \Gamma_5 + 8\Gamma_{19})}{l(l+1)r^4}, \quad (\text{A22})$$

$$\Gamma_{22l}^m = \Gamma_{22} = -\frac{l(l+1)(4\Gamma_{19} + \Gamma_{18}) - 2\Gamma_{18}}{l(l+1)r^3}, \quad (\text{A23})$$

$$\Gamma_{23l}^m = \Gamma_{23} = -\frac{\Gamma_1 - \Gamma_2 - \Gamma_{12} + \Gamma_7 - \Gamma_5}{l(l+1)r^2}, \quad (\text{A24})$$

$$\Gamma_{24l}^m = \Gamma_{24} = -\frac{\Gamma_{18}}{l(l+1)r}, \quad (\text{A25})$$

$$\Gamma_{25l}^m = \Gamma_{25} = -\frac{4\Gamma_{13} - \Gamma_{14} - 2\Gamma_{15} - 4\Gamma_{16} + \Gamma_{17}}{l(l+1)r^3}, \quad (\text{A26})$$

$$\Gamma_{26l}^m = \Gamma_{26} = \frac{4\Gamma_{13} - \Gamma_{14} - 2\Gamma_{15} - 4\Gamma_{16} + \Gamma_{17}}{l(l+1)r^2}, \quad (\text{A27})$$

$$\Gamma_{7l}^m = \Gamma_7 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C_1 \sin\theta \cos\theta}{1 + C_1 \cos\theta} \frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \theta^2} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A7})$$

$$\Gamma_{8l}^m = \Gamma_8 = -\frac{\Gamma_1 - \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_5 - \Gamma_6 + \Gamma_7}{l(l+1)r^2}, \quad (\text{A8})$$

$$\Gamma_{9l}^m = \Gamma_9 = \frac{2l(l+1) - 2}{l(l+1)r^3} \Gamma_3, \quad (\text{A9})$$

$$\Gamma_{10l}^m = \Gamma_{10} = -\frac{2\Gamma_3}{l(l+1)r^2}, \quad (\text{A10})$$

$$\Gamma_{11l}^m = \Gamma_{11} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{l(l+1)Ra \sin\theta}{1 + C_1 \cos\theta} Y_l^m Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A11})$$

$$\Gamma'_{11l} = \Gamma'_{11} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Ra \sin\theta}{1 + C_1 \cos\theta} Y_l^m Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A12})$$

$$\Gamma_{12l}^m = \Gamma_{12} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C_1 \cos 2\theta}{1 + C_1 \cos\theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A13})$$

$$\Gamma_{13l}^m = \Gamma_{13} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C_1 \cos\theta}{1 + C_1 \cos\theta} \frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \theta \partial \varphi} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A14})$$

$$\Gamma_{14l}^m = \Gamma_{14} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C_1 \sin\theta}{1 + C_1 \cos\theta} \frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \theta \partial \varphi} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A15})$$

$$\Gamma_{15l}^m = \Gamma_{15} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C_1 \sin\theta}{1 + C_1 \cos\theta} \frac{\partial^3 Y_l^m}{\partial \theta^2 \partial \varphi} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A16})$$

$$\Gamma_{16l}^m = \Gamma_{16} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C_1 \cos^2\theta}{1 + C_1 \cos\theta} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A17})$$

$$\Gamma_{17l}^m = \Gamma_{17} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C_1 \cos\theta}{1 + C_1 \cos\theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A18})$$

$$\Gamma_{18l}^m = \Gamma_{18} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C_1 \sin^2\theta}{1 + C_1 \cos\theta} \frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \theta^2} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A19})$$

$$\Gamma_{19l}^m = \Gamma_{19} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C_1 \sin\theta \cos\theta}{1 + C_1 \cos\theta} Y_l^m Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A20})$$

$$\Gamma_{20l}^m = \Gamma_{20} = -\frac{\Gamma_{11}}{Ral(l+1)r}, \quad (\text{A21})$$

$$\Gamma_{27l}^m = \Gamma_{27} = -\frac{\Gamma_{17} - \Gamma_{14}}{l(l+1)r}, \quad (\text{A28})$$

$$\Gamma_{28l, l1, l2}^{m, m1, m2} = \Gamma_{28} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l1}^{m1} Y_{l2}^{m2} Y_l^{*m} \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (\text{A29})$$

$$\Gamma_{29l, l1, l2}^{m, m1, m2} = \Gamma_{29} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial Y_{l1}^{m1}}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{l2}^{m2}}{\partial \theta} Y_l^{*m} \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (\text{A30})$$

$$\Gamma_{30l, l1, l2}^{m, m1, m2} = \Gamma_{30} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{l1}^{m1}}{\partial \varphi} \frac{\partial Y_{l2}^{m2}}{\partial \varphi} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A31})$$

$$\Gamma_{31 l, l_1, l_2}^{m, m_1, m_2} = \Gamma_{31} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial Y_{l_1}^{m_1}}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{l_2}^{m_2}}{\partial \varphi} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A32})$$

$$\Gamma_{32 l, l_1, l_2}^{m, m_1, m_2} = \Gamma_{32} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial Y_{l_1}^{m_1}}{\partial \varphi} \frac{\partial Y_{l_2}^{m_2}}{\partial \theta} Y_l^{*m} d\theta d\varphi, \quad (\text{A33})$$

参考文献(References)

- [1] Elsasser W M. Sea floor spreading as thermal convection. *J. Geophys. Res.*, 1971, **76**: 1101~1112
- [2] Christensen U. Convection with pressure- and temperature-dependent non-Newtonian rheology. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 1984, **77**: 343~384
- [3] Moresi L N, Solomatov V S. Numerical investigation of 2D convection with extremely large viscosity variation. *Phys. Fluids*, 1995, **7**: 2154~2164
- [4] Bercovici D, Schubert G, Glatzmaier G A. Three-dimensional spherical models of convection in the Earth's mantle. *Science*, 1989, **244**: 950~955
- [5] Bercovici D, Schubert G, Zebib A. Geoid and topography for infinite Prandtl number convection in a spherical shell. *J. G. R.*, 1988, **93**(B6): 6430~6436
- [6] 叶正仁, 滕春凯, 张新武. 地幔对流与岩石圈板块的相互耦合及影响——(D)球腔中的自由热对流. *地球物理学报*, 1995, **38**(2): 174~180
Ye Z R, Teng C K, Zhang X W. Coupling between mantle circulation and lithospheric Plates—(I) Thermal free convection in a spherical shell. *Acta Geophysica Sinica* (in Chinese), 1995, **38**(2): 174~180
- [7] 傅容珊, 王毅, 黄建华等. 黏滞分层地幔中密度异常驱动对流模型的研究. *地球物理学报*, 2005, **48**(4): 824~833
Fu R S, Wang Y, Huang J H, et al. Effect of rheology structure on flow patterns driven by density anomaly in the mantle. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2005, **48**(4): 824~833
- [8] Weertman J. The creep strength of the Earth's mantle. *Rev. Geophys.*, 1970, **8**: 145~168
- [9] Karato S I, Wu P. Rheology of the upper mantle: a synthesis. *Science*, 1993, **260**: 771~778
- [10] Hager B H. Subducted slabs and the geoid: constraints on mantle rheology and flow. *J. Geophys. Res.*, 1984, **89**: 6003~6015
- [11] Mitrova J X, Peltier W R. Constraints on mantle viscosity based upon the inversion of post-glacial uplift data from the Hudson Bay region. *Geophys. J. Int.*, 1995, **122**: 353~370
- [12] Ranalli G. Mantle rheology: radial and lateral viscosity variations inferred from microphysical creep laws. *Journal of Geodynamics*, 2001, **32**(4-5): 425~444
- [13] Christensen U, Harder H. 3D convection with variable viscosity. *Geophys. J. Int.*, 1991, **104**: 213~226
- [14] Sunder-Plaßmann T, Christensen U. A test of approximations for modeling convection with temperature-dependent viscosity. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 2000, **120**: 103~110
- [15] Zhong S, Zuber M T, Moresi L, Gurnis M. Role of temperature-dependent viscosity and surface plates in spherical shell models of mantle convection. *J. Geophys. Res.*, 2000, **105**(B5): 11063~11082
- [16] Tackley P. Effects of strongly temperature-dependent viscosity on time-dependent, three-dimensional models of mantle convection. *Geophys. Res. Lett.*, 1993, **20**: 2187~2190
- [17] Tackley P. Effects of strongly variable viscosity on three-dimensional compressible convection in planetary mantles. *J. Geophys. Res.*, 1996, **101**: 3311~3332
- [18] Ratcliff J T, Schubert G, Zebib A. Steady tetrahedral and cubic patterns of spherical shell convection with temperature-dependent viscosity. *J. Geophys. Res.*, 1996, **101**(B11): 25473~25484
- [19] Stemmer K, Harder H, Hansen U. A new method to simulate convection with strongly temperature- and pressure-dependent viscosity in a spherical shell: Applications to the earth's mantle. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 2006, **157**: 223~249
- [20] Yoshida M, Nakakuki T. Effects on the long-wavelength geoid anomaly of lateral viscosity variations caused by stiff subducting slabs, weak plate margins and lower mantle rheology. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 2009, **172**: 278~288
- [21] Čadež O, Fleitout L. Effect of lateral viscosity variations in the core-mantle boundary region on predictions of the long wavelength geoid. *Stud. Geophys. Geod.*, 2006, **50**: 217~232
- [22] Wang H, Wu P. Effects of lateral variations in lithospheric thickness and mantle viscosity on glacially induced relative sea levels and long wavelength gravity field in a spherical, self-gravitating Maxwell Earth. *Earth and Planetary Science Letters*, 2006, **249**: 368~383
- [23] Oliver D S, Booker J R. Planform of convection with strongly temperature-dependent viscosity. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 1983, **27**(1): 73~85
- [24] 朱涛, 冯锐. 球层中的非线性自由热对流——变黏度模型. *地震学报*, 2005, **27**(2): 194~204
Zhu T, Feng R. Nonlinear free thermal convection in a spherical shell: A variable viscosity model. *Acta Seismologica Sinica* (in Chinese), 2005, **27**(2): 194~204
- [25] Balachandrar S, Yuen D A, Reuteler D M. Localization of toroidal motion and shear heating in 3-D high Rayleigh number convection with temperature-dependent viscosity. *Geophysical Research Letters*, 1995, **22**(4): 477~480
- [26] Zhang S, Yuen D A. Intense local toroidal motion generated by variable viscosity compressible convection in 3D spherical shell. *Geophysical Research Letters*, 1996, **23**(22): 3135~3138
- [27] 叶正仁, 王建. 上地幔变黏度小尺度对流的数值模拟. *地*

- 球物理学报, 2003, **46**(3): 335~339
- Ye Z R, Wang J. A numerical research on the small-scale convection with variable viscosity in the upper mantle. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2003, **46**(3): 335~339
- [28] Koch D M, Ribe N M. The effect of lateral viscosity variations on surface observables. *Geophys. Res. Lett.*, 1989, **16**: 535~538
- [29] Richards M A, Hager B H. Effects of lateral viscosity variations on long-wavelength geoid anomalies and topography. *J. Geophys. Res.*, 1989, **94**: 10299~10313
- [30] Ribe N M. The dynamics of thin shells with variable viscosity and the origin of toroidal flow in the mantle. *Geophys. J. Int.*, 1992, **110**: 537~552
- [31] Čadež O, Richard Y, Martinec Z, et al. Comparison between Newtonian and non-Newtonian flow driven by internal loads. *Geophys. J. Int.*, 1993, **112**: 103~114
- [32] Zhang S, Christensen U. Some effects of lateral viscosity variations on geoid and surface velocities induced by density anomalies in the mantle. *Geophys. J. Int.*, 1993, **114**: 531~547
- [33] Ogawa M, Schubert G, Zebib A. Numerical simulations of three-dimensional thermal convection in a fluid with strongly temperature-dependent viscosity. *J. Fluid Mech.*, 1991, **233**: 299~328
- [34] Zebib A. Linear and weakly nonlinear variable viscosity convection in spherical shells. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 1993, **4**: 241~253
- [35] Ratcliff J T, Schubert G, Zebib A. Three-dimensional variable viscosity convection of an infinite Prandtl number Boussinesq fluid in a spherical shell. *Geophys. Res. Lett.*, 1995, **22**: 2227~2230
- [36] 傅容珊, 黄建华. 地球动力学. 北京: 高等教育出版社, 2006
Fu R S, Huang J H. Geodynamics. Beijing: China Higher Education Press, 2006
- [37] Buckus G. A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos. *Ann. Phys.*, 1958, **4**: 381~384
- [38] Zebib A, Schubert G, Straus J M. Infinite Prandtl number thermal convection in a spherical shell. *J. Fluid Mech.*, 1980, **97**(2): 257~277
- [39] 叶正仁, 滕春凯, 张新武. 地幔对流与岩石圈板块的相互耦合及影响——(I) 球腔中的自由热对流. 地球物理学报, 1995, **38**(2): 174~180
Ye Z R, Teng C K, Zhang X W. Coupling between mantle circulation and lithospheric Plates—(I) Thermal free convection in a spherical shell. *Chinese J. Geophys. (Acta Geophysica Sinica)* (in Chinese), 1995, **38**(2): 174~180
- [40] 朱 涛, 冯 锐. 球层中高阶自由热对流格局及其变化的研究. 地震学报, 2005, **27**(1): 11~24
Zhu T, Feng R. The patterns of high-degree thermal free convection and its features in a spherical shell. *Acta Geophysica Sinica* (in Chinese), 2005, **27**(1): 11~24
- [41] 杨 柳, 陈艳萍. 求解非线性方程组的一种新的全局收敛的 Levenberg-Marquardt 算法. 计算数学, 2008, **30**(4): 388~396
Yang L, Chen Y P. A new globally convergent Levenberg-Marquardt method for solving nonlinear system of equations. *Mathematica Numerica Sinica*, 2008, **30**(4): 388~396
- [42] Davaille A. Transient high-Rayleigh number thermal convection with large viscosity variations. *J. Fluid Mech.*, 1993, **253**: 141~166
- [43] Solomatov V S. Scaling of temperature- and stress-dependent viscosity convection. *Phys. Fluids*, 1995, **7**: 266~274
- [44] Dumoulin C, Doin M P. Heat transport in stagnant lid convection with temperature- and pressure-dependent Newtonian or non-Newtonian rheology. *J. Geophys. Res.*, 1999, **104**: 12759~12778

(本文编辑 胡素芳)