

⑦ 35-38

文章编号: 1007-4627(2000)01-0035-04

经典轨道的封闭性和径向 Schrödinger 方程的因式分解

0572

武作兵^{1,2}, 曾谨言¹

0413.1

¹ (北京大学物理系, 北京 100871)

² (中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

摘要: 研究表明, 保证经典轨道具有封闭性的 Bertrand 定理可以进一步推广, 在适当的角动量下, 仍存在着非椭圆的闭合轨道. 对于屏蔽 Coulomb 场, 可获得广义 Runge-Lenz 矢量. 这种轨道封闭性与径向 Schrödinger 方程因式分解相对应.

关键词: Bertrand 定理; 闭合轨道; 升降算子

中图分类号: O361.1

文献标识码: A

经典轨道 封闭性 粒子
径向薛定谔方程 量子力学

1 引言

中心力场中运动的粒子, 其经典轨道保持在平面内, 但一般是不封闭的. Bertrand 定理指出, 只有 Coulomb 场和各向同性谐振子势才能保证经典轨道是闭合的^[1]. 同时, 在超对称量子力学中, 也只有 Coulomb 场和各向同性谐振子势才可以保证径向 Schrödinger 方程因式分解产生能量和角动量的升降算子^[2~4]. 此外, 对于 Coulomb 场, 存在守恒的 Runge-Lenz 矢量保证轨道的封闭性, 它使得系统具有高于几何对称性 SO_3 的动力学对称性 SO_4 ^[5,6]. 对于各向同性谐振子势, 也有类似的结论^[7]. 可见, 对于 Coulomb 场和各向同性谐振子势经典轨道的封闭性和径向 Schrödinger 方程因式分解具有明显的对应性^[8]. 本文针对组合中心势将进一步考察这种特殊的经典和量子力学对应性, 即研究在部分破坏这两种势的对称性情况下, 经典轨道的封闭性和径向 Schrödinger 方程因式分解的相应表现形式, 更详细的内容可参见文献^[9,10].

中心力场中的经典轨道封闭性的条件. 这里我们拓宽这种假设的限制, 讨论更一般的情况. 对于组合中心势

$$V(r) = W(r) + \frac{b}{r^2}, \quad (1)$$

在适当的角动量下, $W(r)$ 为 Coulomb 场和各向同性谐振子势, 仍可保证经典轨道是闭合的.

证明过程可以简述如下:

从轨道运动方程出发, 要求存在圆轨道并保持稳定性, 即要求力是向心的和等效势 $V(r) + \frac{L^2}{2r^2}$ 的二阶导数为正, 可得: 当 $a > 0, \nu > 0$; 当 $a < 0, -2 < \nu < 0$. 此时势的附加项 $\frac{b}{r^2}$ 不影响轨道的稳定性. 当系统参数变化对应于给圆轨道以小扰动影响时, 对轨道方程进行 Taylor 展开取一阶小量, 可得偏离轨道闭合的条件: $(\nu + 2)\kappa$ 为有理数 ($\kappa = \sqrt{1 + \frac{2b}{L^2}}$). 进一步研究在大扰动下, 类似 Bertrand 定理的证明, 可得轨道仍然保持封闭的条件为 $\nu = -1$ 或 $\nu = 2$. 因此, 可知 κ 为有理数.

2 Bertrand 定理的推广

Bertrand 定理给出了幂指数型 ($W(r) = ar^n$)

(1) 碱金属的价电子势可以近似采用屏蔽

收稿日期: 1999-12-30

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19675002); 非线性科学计划; 国家教委博士基金

作者简介: 武作兵 (1967-), 男, 博士, 研究员, 从事非线性科学研究.

Coulomb 场描述为

$$V(r) = -\frac{1}{r} - \frac{\lambda}{r^2}, \quad (0 < \lambda \ll 1). \quad (2)$$

轨道方程可写为

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{L^2 \kappa^2} [1 + \sqrt{1 + 2EL^2 \kappa^2} \cdot \cos \kappa(\theta - \theta_0)], \quad (3)$$

这里 $\kappa = \sqrt{1 - \frac{2\lambda}{L^2}}$. 由于 $\kappa < 1 (\lambda > 0)$, 所以不存在椭圆轨道. 一般情况下, 即当 κ 取无理数时, 轨道是不封闭的, 在一个不变环面上进动, 参见图 1.

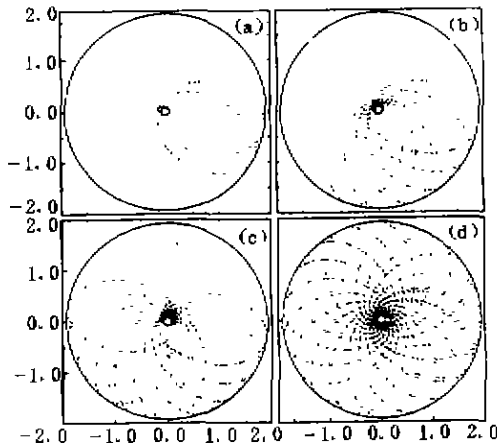


图 1 在 $r-\theta$ 平面内屏蔽 Coulomb 势(2)式的非闭合轨道进动($\lambda=0.2, E=-0.5$ 和 $\kappa=1/2+\sqrt{2}/100$)

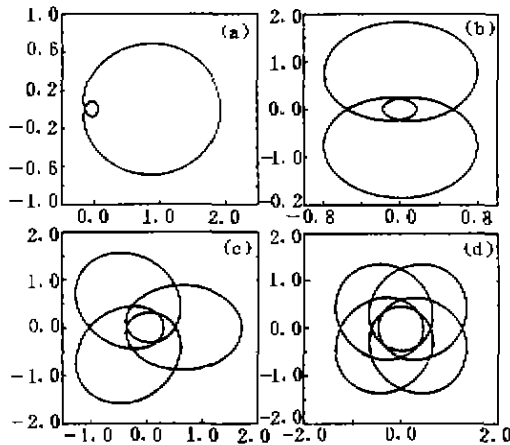


图 2 在 $r-\theta$ 平面内屏蔽 Coulomb 势(2)式的闭合轨道($\lambda=0.2$ 和 $E=-0.5$)

(a) $\kappa=1/2 (L=2/3 \sqrt{6\lambda})$; (b) $\kappa=2/3 (L=3/5 \sqrt{10\lambda})$;
(c) $\kappa=3/4 (L=4/7 \sqrt{14\lambda})$; (d) $\kappa=4/5 (L=5/3 \sqrt{2\lambda})$.

轨道的进动都限制在近日点圆 ($r_p = \frac{1}{2|E|} \cdot [1 - \sqrt{1 - 2\kappa^2 L^2 |E|}]$) 和远日点圆 ($r_a = \frac{1}{2|E|} \cdot [1 + \sqrt{1 - 2\kappa^2 L^2 |E|}]$) 之间. 但当 κ 取有理数时, 仍存在闭合轨道, 一些例子参见图 2(a)~(d). 轨道的几何依赖于角动量 L , 而与能量 E 无关. 近日点坐标为 $\theta_p - \theta_0 = 2n\pi/\kappa$. 远日点坐标为 $\theta_a - \theta_0 = (2n+1)\pi/\kappa$. 此时 Runge-Lenz 矢量不是守恒量, 但存在矢量

$$\mathbf{R} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \left(1 + \frac{2\lambda}{r}\right) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (4)$$

在近日点和远日点满足 $d\mathbf{R}/dt=0$, 并且 $|\mathbf{R}| = \sqrt{2(H - \frac{\lambda}{r^2})L^2 + (1 + \frac{2\lambda}{r})^2}$ 分别保持不变^[5]. 该广义 Runge-Lenz 矢量表明系统仍具有高于几何对称性的动力学对称性.

(2)屏蔽的各向同性谐振子势可写为

$$V(r) = r^2 - \frac{\lambda}{r^2}, \quad (5)$$

轨道方程可写为

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{L^2 \kappa^2} [E + \sqrt{E^2 - 2L^2 \kappa^2} \cdot \cos 2\kappa(\theta - \theta_0)], \quad (6)$$

这里 $\kappa = \sqrt{1 - 2\lambda/L^2}$. 同样当 κ 取有理数时, 轨道是闭合的. 近日点坐标为 $\theta_p - \theta_0 = n\pi/\kappa$, 远日点坐标为 $\theta_a - \theta_0 = (n+1/2)\pi/\kappa$. 当 κ 取 $1/2, 2/3, 3/4$ 和 $4/5$ 时, 运动轨道参见图 3(a)~(d).

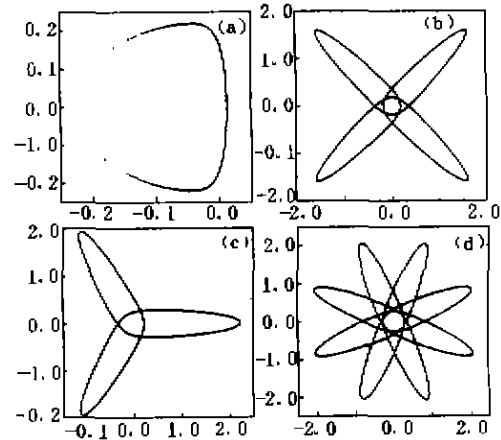


图 3 在 $r-\theta$ 平面内屏蔽各向同性谐振子势(5)式的闭合轨道 ($\lambda=0.2$ 和 $E=5$)

3 径向 Schrödinger 方程的因式分解

对于组合中心势 $V(r) = W(r) + b/r^2$, 当 $W(r)$ 为 Coulomb 场或各向同性谐振子势, 径向 Schrödinger 方程的因式分解产生能量升降算子, 但不能产生角动量的升降算子.

证明过程可以简述如下:

在守恒量 (H, l^2, l_z) 的完备集下, 径向 Schrödinger 方程可化为

$$D_l'(r)X_{n,l}(r) = -2E_n X_{n,l}(r), \quad (7)$$

这里 $D_l'(r) = d^2/dr^2 - l'(l'+1)/r^2 - 2W(r)$, $l' = -1/2 + (l+1/2)\sqrt{1+2b/(l+1/2)^2}$. 由于 $\Delta l' = \pm 1$ 不能导致 $\Delta l = \pm 1$, 所以不存在角动量的升降算子. 进一步将径向 Schrödinger 方程改写为

$$\bar{D}_s(r)X_{n,l}(r) = l'(l'+1)X_{n,l}(r), \quad (8)$$

这里 $\bar{D}_s(r) = r^2 d^2/dr^2 + 2E_n r^2 - 2W(r)r^2$. 采用 WKB 方法, 可得到能量本征值 $E_n = \alpha_p n^{2p/(p+2)}$ [11,12]. 此时保证 l 不变, 即 l' 不变, 可以得到能量的升降算子.

(1) 当 $a < 0$ 时, 即对应于屏蔽的 Coulomb 场 ($W(r) = a/r$), 式(8)因式分解可得

$$X_{n+1,l}(r) \sim M\left(\frac{n}{n+1}\right) \left[\frac{rd}{dr} - \frac{-a}{nr} + n\right] X_{n,l}(r), \quad (9)$$

$$X_{n-1,l}(r) \sim M\left(\frac{n}{n-1}\right) \left[\frac{rd}{dr} - \frac{a}{nr} - n\right] X_{n,l}(r), \quad (10)$$

这里 $M(k)$ 为一算子, $M(k)f(r) = f(kr)$.

(2) 当 $a > 0$ 时, 即对应于屏蔽的各向同性谐振子势 ($W(r) = ar^2$), 式(8)因式分解可得

$$X_{n+2,l}(r) \sim \left[\frac{rd}{dr} - (2a)^{-1/2}r^2 + \left(2n + \frac{1}{2}\right)\right] X_{n,l}(r), \quad (11)$$

$$X_{n-2,l}(r) \sim \left[\frac{rd}{dr} + (2a)^{-1/2}r^2 - \left(2n + \frac{1}{2}\right)\right] X_{n,l}(r). \quad (12)$$

4 结论和讨论

对于 Coulomb 场和各向同性谐振子势, 经典轨道在连续的能量和角动量下保证是闭合的. 在量子力学中, 能级之间存在能量和角动量的升降算子. 对于组合中心势 $V(r) = W(r) + b/r^2$, $W(r)$ 为 Coulomb 场和各向同性谐振子势, 经典轨道在连续的能量和分力的角动量下仍是闭合的. 在量子力学中, 能级之间存在着能量的升降算子, 不存在角动量的升降算子. 因此, 保证经典轨道闭合的能量和角动量连续取值对应于量子力学中能量和角动量升降算子的存在.

参 考 文 献

- [1] Goldstein H. Classical Mechanics, 2nd ed. Addison-Wesley, New York, 1980.
- [2] DeLange O L, Raab R E. Operator Methods in Quantum Mechanics. Clarendon, Oxford, 1991.
- [3] Cooper F, Khare A, Sukhatme U P. Supersymmetry and Quantum Mechanics. Phys Rep, 1995, 251; 267~385.
- [4] Liu Y F, Lei Y A, Zeng J Y. Factorization of the Radial Schrodinger Equation and Four Kinds of Raising and Lowering Operators of Hydrogen Atoms and Isotropic Harmonic Oscillators. Phys Lett, 1997, \231, 9~12.
- [5] Runge C. Vektoranalysis. Hirzcl, Leipzig, 1919. 1; 70; Lenz W. Über den Bewegungsverlauf und die Quantenzustände der Gestörten Keplerbewegung. Z Phys, 1924, 24; 197~207; Laplace P S. Traite de Méchanique Celeste. Villars, Paris, 1799, 1.
- [6] Pauli W. Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der Neuen Quantenmechanik. Z Phys, 1926, 36; 336~363.
- [7] 曾谨言. 量子力学. 卷二, 北京: 科学出版社, 1997.
- [8] Liu Y F, Huo W J, Zeng J Y. Connection between the Closeness of Classical Orbits and Factorization of the Radial Schrödinger Equation. Phys Rev, 1998, A58; 862~868.
- [9] Wu Z B, Zeng J Y. Extension of Bertrand's Theorem and Fac-

- torization of the Radial Schrödinger Equation. *J Math Phys*, 1998, 39, 5: 253~5 259.
- [10] Wu Z B, Zeng J Y. Modification of Bertrand's Theorem and Extended Runge-Lenz Vector. *Chin Phys Lett*, 1999, 16, 781~783.
- [11] Quigg C, Rosner J L. Quantum Mechanics with Application to Quarkonium. *Phys Rep*, 1979, 56: 167~235.
- [12] 钱伯初, 曾谨言. 量子力学习题精选解析. 北京: 科学出版社, 1990.

Closeness of Classical Orbits and Factorization of Radial Schrödinger Equation *

Wu Zuo-bing^{1,2}, Zeng Jin-yan¹

¹ (*Department of Physics, Peking University, Beijing 100871, China*)

² (*Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

Abstract: It is shown that for a particle with suitable angular momenta in the screened Coulomb potential or isotropic harmonic potential, there still exists closed orbits rather than ellipse, characterized by the conserved perihelion and aphelion vectors, i. e., extended Runge-Lenz vector, which implies a higher dynamical symmetry than the geometrical symmetry SO_3 . For the potential, factorization of the radial Schrödinger equation to produce raising and lowering operators is also pointed out.

Key words: Bertrand's theorem; closed orbits; creation and annihilation operator

* Foundation item: NSFC (19675002), Nonlinear Science Project of China, and Doctoral Program Foundation of Education Committee of China