文章编号：1007－4627(2003)01－0055－06

形(应)变超晶格的退道效应与系统的全局分叉

林钧锋[1]，庄榕榕[1]，周小方[1]，王海光[1]，付丽萍[1]，罗诗裕[2,3]

(1 漳州师范学院物理系，福建 漳州 363000；
2 东莞理工学院计算机系，广东 东莞 523106；
3 龙岩学院物理系，福建 龙岩 364000)

摘　要：把超晶格“折沟道”对粒子的作用等效为形状相似的弱周期调制. 利用正弦平方势把粒子运动方程化为具有外周期弱调制的非线性微分方程，导出了退道系数与晶格畸变的关系. 利用多尺度法研究了系统的主共振和子共振，并利用 Melnikov 方法分析了系统的全局分叉和出现 Smale 马蹄的临界条件.

关 键 词：超晶格；分叉；共振；微分方程；退道效应

中图分类号：O471.5；O571.33　　**文献标识码**：A

1　引言

人们在研究带电粒子的面沟道效应或沟道辐射时，常常假设带电粒子同晶面之间的相互作用势是平面连续势，而且进一步假设粒子运动无阻尼. 在低能和小振幅情况下，这两条假设是很好成立的.

本文讨论超晶格中粒子的运动行为. 所谓超晶格就是将两种晶格常数不同的材料交替生长而成的多层薄膜结构. 比如，选择 GaP 作基片，沿[100]方向生长等厚的 GaP 和 $GaAs_xP_{1-x}$薄层，由于在生长方向上晶格失配，沿生长方向的各层将交替产生伸长和压缩形变，导致(110)平面沟道扭折，使直沟道变成了锯齿状的“折沟道”. 这种沟道的特点是在界面处沟道平面连续，一阶导数不存在. 注意到粒子在(110)面沟道中运动时，由于不断受到“折沟道”对它的作用，它的横向动量在界面处发生突变，其效果等效于在直沟道中运动的粒子受到如“折沟道”相似的相互作用势的调制. 调制的强弱与晶格畸变有关. 当然与平面连续势相比，它只是一个小量. 正是在这一基本假设下，本文对超晶格的退道效应进行了分析，并导出了形变参数与退道系数之间的关系. 我们从一般运动方程出发，把“折沟道”的退道效应等效为面沟道粒子受到弱的周期调制，利用我们曾经提出的正弦平方势[1]，把粒子运动方程化为具有外周期弱调制的非线性微分方程，利用多尺度法研究了系统的主共振和子共振，并利用 Melnikov 方法分析了系统的全局分叉和 Smale 马蹄出现的临界条件.

2　运动方程

以超晶格面沟道效应为例来说明沟道粒子的共振行为. 假设带正电的粒子运动在 (x, z) 平面内，其中 z 是沿沟道中心线方向，x 是粒子在沟道平面内离开 z 轴的距离. 注意到超晶格的沟道不再是直沟道，而是轴线呈锯齿状的折沟道，于是，粒子与晶面的相互作用势就不再是平面的，而是受到折沟道调制的非平面连续势；再注意到任何假设都是近似的，没有近似就没有认识. 不妨也让我们假设[1]

$$V(x) = V_0(x) + V_1(x)W(z) ,$$

其中 $V_0(x)$是直沟道中的平面连续势，$V_1(x)W(z)$是沟道偏折引起的扰动项. $W(z)$是以层厚 l_0 为周期的锯齿形函数，且有 $\int_0^1 W(z)\mathrm{d}z=0$；$V_1(x)$与沟道的具体畸变状态有关. 仅当沟道势的振幅被调制时，$V_1(x)\sim V_0(x)$；仅当沟道轴形变时，$V_1(x)\sim(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)V_0(x)$. 通常两种情况都存在，于是扰动算符可表示为

收稿日期：2002－09－16；**修改日期**：2002－12－12
作者简介：林钧锋(1954—)，男(汉族)，福建长泰人，副教授，从事辐射与物质相互作用研究.

$$V_1(x)W(z) = \left(a_1 V_0(x) + a_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} V_0(x)\right) W(z) , \quad (1)$$

其中 a_1 和 a_2 是比例常数.

利用我们曾经提出的正弦平方势，可将平面连续势 $V_0(x)$ 表示为[1]

$$V_0(x) = K\beta_1 \sin^2\left(\frac{\pi x}{d_p}\right) , \quad (2)$$

其中 $K\beta_1$ 是势阱深度，β_1 是势参数，且

$$K = \pi Z_1 Z_2 e^2 N d_p^2 ,$$

而 d_p 是平面间距，Z_1 和 Z_2 是入射粒子和晶体的原子序数，e 是电子电荷，N 是靶原子密度，将式(2)代入式(1)可得

$$V_1(X) = a_3[(1-\cos(\pi X)] + a_4 \sin(\pi X) , \quad (3)$$

其中

$$a_3 = \frac{a_1 K\beta_1}{2},\ a_4 = \frac{\pi a_2 K\beta_1}{d_p},\ X = \frac{2x}{d_p} . \quad (4)$$

在偶极近似下，粒子运动规律可用经典方法描述，且可表示为

$$m\gamma \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\mu_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \nabla V(x) = 0 , \quad (5)$$

其中 m 是粒子静止质量，γ 是相对论因子，x 和 X 之间的关系由式(4)给出. 考虑到沟道粒子同电子云相互作用而损失能量，单位长度上的能损为 $2\mu_0\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，其中 μ_0 由文献[2—4]给出，且可表示为

$$\mu_0 = \frac{2\pi L r_e r_p j Z_2^2}{e\gamma^2 A\beta}\left(\frac{c}{v^*}\right)^3 , \quad (6)$$

A 是靶原子量，且

$$\left.\begin{aligned} r_e &= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}, \quad r_p = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_p c^2} , \\ j &= Z_1 e n_e \beta c , \quad L \cong \ln\left[\frac{\lambda_D\left(\frac{v^*}{c}\right)^2}{2Z_2 r_e}\right] , \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

r_e 和 r_p 分别是经典的电子和质子半径，n_e 是晶体的电子云密度，j 是粒子束流密度，v^* 是粒子和电子之间的相对热速度，λ_D 是 Debye 屏蔽距离，β 是无量纲的粒子速度，c 是光速.

将式(2)和(3)展开，并略去高阶项，则力函数 $\nabla V(x)$ 可表示为

$$\nabla V(x) = \frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = U_0(x - a_0 x^3) + U_0 c_0 (1 + c_1 x - c_2 x^2 - c_3 x^3) W(z) , \quad (8)$$

其中

$$U_0 = \frac{8\pi^2 K\beta_1}{d_p^2},\ a_0 = \frac{32\pi^3 U_0}{3d_p^3},\ c_0 = \frac{d_p a_4}{2\pi\beta_1},$$

$$c_1 = \frac{4\pi a_3}{d_p a_4},\ c_2 = \frac{8\pi^2}{d_p^2},\ c_3 = \frac{32\pi^3 a_3}{3d_p^2 a_4}, \quad (9)$$

令

$$\tau = \left(\frac{U_0}{m\gamma}\right)^{1/2} t . \quad (10)$$

将式(8)代入式(5)，引进小参数 ε，可将无量纲的粒子运动方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}\tau^2} + X + 2\mu\varepsilon \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\tau} - aX^3 + \varepsilon(p_1 + p_2 X - \varepsilon p_3 X^2 - \varepsilon^2 p_4 X^3) W(z) = 0 , \quad (11)$$

其中小参数 ε 仅在形式上表示各项的大小，且

$$\varepsilon\mu = \frac{\mu_0}{(m\gamma U_0)^{1/2}},\ a = a_0 x_{\max}^2,\ \varepsilon p_1 = \frac{c_0}{x_{\max}} ,$$

$$\varepsilon p_2 = c_0 c_1,\ \varepsilon^2 p_3 = 3c_0 c_2 x_{\max},$$

$$\varepsilon^3 p_4 = c_0 c_3 x_{\max}^2,\ x_{\max} = \frac{d_p}{2} , \quad (12)$$

$x_{\max}$ 是粒子偏离沟道中心平面的最大距离. 考虑到 $W(z)$ 是 z 的周期函数，则 $W(z)$ 可展开为

$$W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\omega z) , \quad (13)$$

其中

$$b_n = \frac{a}{l}\int_{-l/2}^{l/2} W(z)\cos\left(\frac{2\pi n z}{l}\right)\mathrm{d}z , \quad (14)$$

$$\omega = \frac{2\pi v}{l}\sqrt{\frac{m\gamma}{U_0}} . \quad (15)$$

注意到，对于薄层等厚的超晶格，沟道轴的方向与 z 轴的关系呈锯齿状，我们假设调制函数 $W(z)$ 也具有相似形状，且可用阶跃函数表示为

$$W(z) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{l}{2} + z\right) , & -l \leqslant z \leqslant 0 \\ \varphi\left(\frac{l}{2} - z\right) , & 0 \leqslant z \leqslant l \end{cases} \quad (16)$$

其中 φ 是斜率. 将式(16)代入式(14)，可得

$$b_n = \begin{cases} \frac{4\varphi l}{(n\pi)^2} , & n\ 为奇数 \\ 0 , & n\ 为偶数 \end{cases} \quad (17)$$

将方程(13)代入方程(11)，并注意到式(17)，我们就可用摄动法对方程(11)进行求解.

3　系统的主共振和子共振

采用多尺度法求解运动方程(11). 将 X 和 τ 表示为

$$\left.\begin{array}{l} X = X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \cdots\cdots, \\ T_0 = \tau\ ,\ T_1 = \varepsilon\tau,\ T_2 = \varepsilon^2\tau\ ,\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{18}$$

将式(18)代入方程(11)，并注意到方程(13)，比较方程两端 ε 的同次幂系数，可得

$$\left.\begin{array}{l} D_0^2 X_0 + X_0 = 0\ , \\ D_1^2 X_1 + X_1 = -2\mu D_0 X_0 - 2D_0 D_1 X_0 - \\ \qquad aX_0^3 - (p_1 + p_2 X_0)\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\,\omega\tau_0)\ , \\ D_2^2 X_2 + X_2 = -2D_0 D_1 X_1 - D_1^2 X_0 - \\ \quad 2D_0 D_2 X_0 - 2\mu D_0 X_1 - 2\mu D_1 X_0 - \\ \quad (p_2 X_1 - p_3 X_0^2)\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\,\omega\tau_0)\ , \end{array}\right\} \tag{19}$$

其中 $D_n = \dfrac{\partial}{\partial T_n}$, $\omega\tau = 2\pi\dfrac{z}{l}$, $z = vt$.

由方程(19)的第一方程可得系统零级参数解：

$$\left.\begin{array}{l} X_0 = A(T_1,\ T_2)e^{iT_0} + c\cdot c\cdot \\ A(T_1,\ T_2) = \dfrac{1}{2}ae^{i\beta_0} \end{array}\right\}, \tag{20}$$

其中 $c\cdot c\cdot$ 表示与前项复共轭的项，a 和 β_0 是 T_1 和 T_2 的函数. 将式(20)代入方程(19)的第二个方程，可得

$$\begin{aligned} D_0^2 X_1 + X_1 = &\left(-2i\mu A - 2i\frac{\partial A}{\partial T_1} + 3aA^2\overline{A}\right)e^{iT_0} + \\ & aA^3 e^{3iT_0} - \frac{1}{2}p_1\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{in\omega T_0} - \\ & \frac{A}{2}p_2\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{i(n\omega+1)T_0} - \\ & \frac{\overline{A}}{2}p_2\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{i(n\omega-1)T_0} + c\cdot c\cdot . \end{aligned} \tag{21}$$

由方程(21)可直接看出，当

$$\omega = \frac{1}{n},\ \frac{2}{n}\quad (n = 1,\ 2,\ 3\cdots) \tag{22}$$

时，系统出现共振. 因为它在该系统中起主要作用，这类共振又称为主共振. 对于我们感兴趣的薄层等厚超晶格，式(22)中的 n 只能取奇数.

方程(21)的解可表示为

$$\begin{aligned} X_1 = &-\frac{1}{8}aA^3 e^{3iT_0} - \frac{1}{2}p_1\sum_{n=1}^{\infty} b_n\frac{e^{in\omega T_0}}{1 - n^2\omega^2} - \\ & \frac{1}{2}p_2\overline{A}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n e^{i(n\omega-1)T_0}}{1 - (n\omega - 1)^2} - \\ & \frac{1}{2}p_2 A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n e^{i(n\omega+1)T_0}}{1 - (n\omega + 1)^2}\ . \end{aligned} \tag{23}$$

将式(20)和(23)的解代入方程(19)的第3个方程，可得

$$\begin{aligned} D_2^2 X_2 + X_2 = &\left(-\frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} - 2i\frac{\partial A}{\partial T_2} + \frac{3}{8}aA^3\overline{A}^2 - 2\mu\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)e^{iT_0} + \left(\frac{9}{4}ia\frac{\partial A}{\partial T_1} + \frac{3}{4}i\mu aA^3 + \frac{3}{4}aA^4\overline{A}\right)e^{3iT_0} + \\ & \frac{5}{8}aA^5 e^{5iT_0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{i\omega n\mu p_1 - 3ap_1 - A\overline{A}}{1 - n^2\omega^2} + p_3 A\overline{A}\right)e^{in\omega T_0} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left[\frac{ip_1\dfrac{\partial A}{\partial T_1} + i\mu p_2 A(n\omega + 1)}{1 - (n\omega + 1)^2} - \frac{3ap_2 A^2\overline{A}(3n\omega - 2)}{2n\omega(4 - n^2\omega^2)}\right]e^{i(n\omega+1)T_0} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left[\frac{i(n\omega - 1)\left(p_1\dfrac{\partial A}{\partial T_1} - \mu p_2\overline{A}\right)}{1 - (n\omega - 1)^2} - \frac{3ap_2 A\overline{A}^2(3n\omega - 2)}{2n\omega(4 - n^2\omega^2)}\right]e^{i(n\omega-1)T_0} + \\ & \frac{1}{2}A^2\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(p_3 - \frac{3ap_1}{1 - n^2\omega^2}\right)e^{i(n\omega+2)T_0} + \frac{1}{2}\overline{A}^2\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(p_3 - \frac{3ap_1}{1 - n^2\omega^2}\right)e^{i(n\omega-2)T_0} - \\ & \frac{1}{16}A^3 p_2\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{24a}{1 - (n\omega + 1)^2} + 1\right)e^{i(n\omega+3)T_0} - \frac{1}{16}\overline{A}^3 p_2\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{24a}{1 - (n\omega + 1)^2} + 1\right)e^{i(n\omega-3)T_0} + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}p_1p_2\sum_{n,n'=1}^{\infty}b_n\left[\frac{b_{n'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(n'+n)T_0}+\overline{b}_{n'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(n-n')T_0}}{1-n^2\omega^2}\right]+\frac{1}{4}p_2^2A\sum_{n,n'=1}^{\infty}b_n\left[\frac{b_{n'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\omega+n'\omega+1)T_0}+\overline{b}_{n'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\omega-n'\omega+1)T_0}}{1-(n\omega+1)^2}\right]+$$
$$\frac{1}{4}p_2^2\overline{A}\sum_{n,n'=1}^{\infty}b_n\left[\frac{b_{n'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\omega+n'\omega-1)T_0}+\overline{b}_{n'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\omega-n'\omega-1)T_0}}{1-(n\omega-1)^2}\right]+c\cdot c\cdot. \tag{24}$$

由上式可以看出，当

$$\omega=\frac{3}{n},\ \frac{4}{n},\ \frac{1}{|n\pm n'|},\ \frac{2}{|n\pm n'|} \tag{25}$$

时，系统出现子共振.

我们讨论 $n=1$ 时的主共振情形. 由式(22)可知，当 $n=1$ 时，$\omega=1$ 和 2 分别对应于 $l_0=\lambda$ 和 $\lambda/2$. 当 $l_0=\lambda$ 时，粒子穿过一薄层正好在相平面上围绕原点旋转一周；当粒子穿过边界层时，在相平面上粒子的横向动量(或发散角)由正变负；当粒子穿过下一层界面时，粒子的横向动量由负变正；当粒子穿过不同的薄层时，系统始终处于这两种状态之间. 结果粒子始终保持在沟道内部运动，这一现象称为共振沟道. 当 $l_0=\lambda/2$ 时，粒子穿过一薄层正好在相平面上围绕原点旋转半周；当粒子穿过边界时，在相平面上粒子横向动量(或发散角)的绝对值变大，当粒子穿过下一层界面时，粒子横向动量的绝对值变得更大；当粒子穿过不同薄层时，粒子的横向动量(或发散角)绝对值变得越来越大，以至于跑出沟道外面，这一现象称为共振退道. 粒子的退道系数可以表示为

$$\eta=\begin{cases}1-X_c\left[1-\left(\dfrac{\Psi_0(j)}{\Psi_c}\right)^2\right]^{1/2}, & \left|\dfrac{\Psi_0(j)}{\Psi_c}\right|\leqslant 1\\ 1\quad , & \left|\dfrac{\Psi_0(j)}{\Psi_c}\right|>1\end{cases} \tag{26}$$

其中，Ψ_c 是沟道临界角，$\Psi_0(j)=j\Delta\Psi$ 是粒子进入第 j 层时的初始角，$\Delta\Psi$ 是沟道偏折角，且随 j 的增加，第 j 层的入射角(发散角)越来越大. 当 $\Psi_0(j)\geqslant\Psi_c$ 时，$\eta=1$ 粒子全部退道.

4 系统的全局分叉

令

$$\Psi=\sqrt{a}X,\ \delta_1=\sqrt{a}p_1,\ \delta_2=p_2,$$
$$\delta_3=\frac{\varepsilon p_3}{\sqrt{a}},\ \delta_4=\frac{\varepsilon^2p_4}{a}, \tag{27}$$

则方程(11)可化为

$$\ddot{\Psi}+\Psi-\Psi^3=\varepsilon\{-2\mu\dot{\Psi}-(\delta_1+\delta_2\Psi-\delta_3\Psi^2-\delta_4\Psi^3)\}W(\tau)=0, \tag{28}$$

其中 τ 由式(10)给出. 我们讨论系统(28)的全局分叉. 为此，我们首先找出系统的分界线和它内部的周期解；然后构造相应的 Melnikov 函数；再根据 Melnikov 函数的特征，讨论系统稳定和不稳定流形的横向交截条件，然后判断系统是否存在 Smale 马蹄.

令方程(28)中的 $\varepsilon=0$，可得无扰动系统

$$\ddot{\Psi}+\Psi-\Psi^3=0. \tag{29}$$

引入积分常数 h，并分两种情况讨论.

(1) $h=1/4$

方程(29)的解可表示为[5]

$$\left.\begin{aligned}&\Psi=\pm\tanh\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right),\\&\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\tau}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\operatorname{sech}^2\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

式(30)对应于系统(29)的分界线，粒子运动周期为无穷. 与分界线(30)对应的 Melnikov 函数可表示为

$$M(\tau_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\tau}\left[-2\mu\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\tau}-(\delta_1+\delta_2\Psi-\delta_3\Psi^2-\delta_4\Psi^3)W(\tau-\tau_0)\right]\mathrm{d}\tau. \tag{31}$$

将式(13)和(30)代入方程(31)，并令 $n=1$，完成积分，可得

$$\begin{aligned}M(\tau_0)=&-\frac{4\sqrt{2}}{3}\mu\pm\sqrt{2}\pi\omega b_1\delta_1\operatorname{cosech}\left(\frac{\omega\pi_0}{\sqrt{2}}\right)\cdot\\&\cos(\omega\pi_0)+\{2\sqrt{2}\delta_2b_1\omega\sin(\omega\pi_0)\pm\\&\frac{2}{3}\delta_3b_1(\omega^2-2)\cos(\omega\pi_0)+\\&\frac{2}{3}\delta_4b_1(\omega^4-4)\sin(\omega\pi_0)\}\cdot\\&B\left(1+\frac{\mathrm{i}\omega}{\sqrt{2}},1-\frac{\mathrm{i}\omega}{\sqrt{2}}\right),\end{aligned} \tag{32}$$

其中，$B(1+(\mathrm{i}\omega/\sqrt{2}),1-(\mathrm{i}\omega/\sqrt{2}))$ 是 β 函数[6]，b_1 是 $W(z)$ 的傅立叶展开一次项系数(见式(13—

15)). 由式(32)可得稳定和不稳定流形横向交截的必要条件是

$$\left|\frac{b_1}{\mu}\right| \geqslant \left|\frac{b_{1c}}{\mu}\right|, \tag{33}$$

其中 b_{1c}是 b_1 的临界值，

$$\frac{b_{1c}}{\mu} = \frac{4\sinh(\pi\omega/\sqrt{2})}{\pi\omega[3\delta_1 + 3\sqrt{2}\delta_2\omega + \delta_3(\omega^2 - 2) + \delta_4(\omega^2 - 4)]}. \tag{34}$$

由式(32)可知

$$\frac{\mathrm{d}M(\tau_0)}{\mathrm{d}\tau_0} \neq 0, \tag{35}$$

于是系统有简单零点. 方程(35)是系统稳定和不稳定流形横向交截的充分条件. 只要条件式(33)满足，系统将出现 Smale 马蹄.

(2) $0 \leqslant h < 1/4$

方程(29)的解称为旋转周期解，且可表示为

$$\left.\begin{aligned} \Psi &= \frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}} sn(u) \\ \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\sqrt{2}\kappa}{1+\kappa^2} cn(u) dn(u) \end{aligned}\right\}, \tag{36}$$

其中

$$u = \frac{\tau}{\sqrt{1+\kappa^2}},\ h = \frac{\kappa^2}{(1+\kappa^2)^2}, \tag{37}$$

$sn(u)$, $cn(u)$ 和 $dn(u)$ 是 Jacobian 椭圆函数，粒子运动周期

$$T = 4\sqrt{1+\kappa^2}K(\kappa), \tag{38}$$

其中 $K(\kappa)$是第一类全椭圆积分，相关的 Melnikov 函数可表示为(对于 $n=1$，周期 $T = 2\pi m/\omega$ 的次谐波)[6]

$$\begin{aligned} M^{m/1}(\tau_0) &= \int_0^T \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\tau}\Big[-2\mu\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\tau}(\delta_1 + \delta_2\Psi - \\ &\quad \delta_3\Psi^2 - \delta_4\Psi^3)W(\tau - \tau_0)\Big]\mathrm{d}\tau \\ &= -\mu J_1(m,1) - [\delta_1 b_1 J_2(m,1) + \\ &\quad \delta_2 b_1 J_3(m,1)]\cos(\omega\tau_0), \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} J_1(m,1) = &\frac{16}{3(1+\kappa^2)^{3/2}} \cdot \\ &[(\kappa^2 - 1)K(\kappa) + (\kappa^2 + 1)E(\kappa)], \end{aligned} \tag{40}$$

$$J_2(m,1) = \begin{cases} 4\sqrt{2}\pi\omega\,\mathrm{cosech}\left(\dfrac{m\pi K'}{K}\right), & p = 1,\ m \text{ 为奇数} \\ 0, & p \neq 1,\ m \text{ 为偶数} \end{cases} \tag{41}$$

$$J_3(m,1) = \begin{cases} \pi\omega(1-\omega^2)\dfrac{(1+\kappa^2)^{1/2}}{\kappa}\mathrm{cosech}\left(\dfrac{m\pi K'}{K}\right), & p = 1,\ m \text{ 为奇数} \\ 0, & p \neq 1,\ m \text{ 为偶数} \end{cases} \tag{42}$$

式(40)中 $E(\kappa)$是第二类全椭圆积分，而

$$K' = K(\kappa'),\ \kappa' = \sqrt{1-\kappa^2}. \tag{43}$$

利用类似方法可求得系统稳定和不稳定流形横向交截的必要条件

$$\frac{b_1}{\mu} \geqslant \left|\frac{b_{1c}}{\mu}\right|, \tag{44}$$

其中

$$\frac{b_{1c}}{\mu} = \frac{J_1(m,1)}{\delta_2 J_2(m,1) + \delta_1 J_2(m,1)}, \tag{45}$$

而 Smale 马蹄存在的充分条件可直接从

$$\frac{\mathrm{d}M^{m/1}(\tau_0)}{\mathrm{d}\tau_0} \neq 0 \tag{46}$$

看出.

5　结果和讨论

本文从非线性振动理论出发，分析了形变超晶格的共振现象. 结果表明，对于薄层等厚的形变超晶格，当粒子在一层中走过的路程 $l = n\lambda$ 和$(2n+1)\lambda/2$ 时，系统出现了共振沟道和共振退道. 式(26)表明，如果我们能找到(比如测量)粒子的退道系数，再注意到 $\Psi(j) = j\Delta\Psi$，则沟道的偏折角 $\Delta\Psi$ 便可以完全确定. 注意到沟道的偏折角 $\Delta\Psi$ 与两种材料的晶格常数有关，利用 Poisson 效应可将它表示为

$$\Delta\Psi = \arctan\left(\frac{a_{\perp 2}}{a_{/\!/}}\right) - \arctan\left(\frac{a_{\perp 1}}{a_{/\!/}}\right), \tag{47}$$

$a_\perp$ 和 $a_{/\!/}$是垂直和平行(100)面的晶格常数. 上式表明，当用同一种材料生长时，有 $a_{\perp 2} = a_{\perp 1}$，因而有 $\Delta\Psi = 0$，沟道没有被扭折(即通常的直沟道). 注

意到形变量正比于$|a_{\perp 2}-a_{\perp 1}|$，计算表明，当$\Delta\Psi\approx 0.1^{\circ}$—$1^{\circ}$时，超晶格的形变量大约为0.5%—5%.

超晶格的形变量是一个很重要的参量，它直接与超晶格材料的光电性质有关，如何确定这个参量成了人们十分关注的问题，沟道技术是测定这个参数的重要手段之一. 利用沟道技术测定形变量，主要是借助粒子的共振退道效应[7]. 文献[7]用数值方法研究了粒子的共振行为，文献[8]研究了粒子沟道现象. 本文用多尺度法分析了超晶格中的粒子共振退道，并用 Melnicov 方法讨论了系统的全局分叉.

参 考 文 献:

[1] Luo Shiyu , Shao Mingzhu. Sine-squared Potential of Planar Channeled Particles and Kumakhov Radiation of Charged Particles[J]. Chin Phys. USA , 1984, **4**(3): 527.

[2] 邵明珠，Hofmann I，罗诗裕. 一维晶化束的非线性动力学(I)[J]. 物理学报，1990，**39**(8)：1 189.

[3] 邵明珠，Hofmann I，罗诗裕. 一维晶化束的非线性动力学(II)[J]. 物理学报，1990，**39**(8)：1 200.

[4] 邵明珠，Hofmann I，罗诗裕. 一维晶化束的非线性动力学(III)[J]. 物理学报，1990，**39**(8)：1 207.

[5] Luo Shiyu, Shao Mingzhu. Sine -squared Potential and Channeling Effects in Bent Crystal (I)[J]. Radiation Effects Express, 1988, **2**(1): 45.

[6] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series and Products[M]. New York: Academic Press, 1980, 948.

[7] 罗诗裕，马如康，邵明珠. 形变超晶格的沟道效应与系统的相平面特征[J]. 原子核物理评论，2002，**19**(4)：407.

[8] Robin N, Heiland W, Jensen J, *et al*. Channeling Effects Observed in Energy -loss Spectra of Nitrogen Ions Scattered of a Pt (110) Suface[J]. Phys Rev, 2001, **A64**: 052901, 1.

Dechanneling Effects and Global Bifurcations for Strained Superlattice

LIN Jun-feng[1], ZHUANG Rong-rong[1], ZHOU Xiao-fang[1], WANG Hai-guang[1], FU Li-ping[1], LUO Shi-yu[2,3]

(1 *Department of Physics*, *Zhangzhou Normal College*, *Zhangzhou* 363000, *Fujian*, *China*;
2 *Department of Computer*, *Dongguan University of Technology*, *Dogguan* 523106, *Guangdong*, *Ching*;
3 *Department of Physics*, *Longyan College*, *Longyan* 364000, *Fujian*, *China*)

Abstract: The effect of deflected channel on particle motion is equivalent to modulation with a weak-potential having a periodic same as the deflected channel has. The motion equation of a particle has been reduced to the nonlinear differential equation with a weak-periodic modulation by using sine-squared potential. The dechanneling fraction has been derived for a strained superlattice. The main-resonance and sub-resonance have been inverstigated by using multi-scale method, a global bifurcation and the critical conditions with Smale horse shoe have been analysed by using Melnikov method.

Key words: strained superlattice; bifurcation; resonance ; differential equation; dechanneling effect