

# 卫星姿态直接自适应模糊预测控制

孙光<sup>1</sup> 霍伟<sup>1</sup>

**摘要** 对具有模型不确定性和未知外干扰的卫星姿态系统提出了多输入多输出直接自适应模糊预测跟踪控制设计方法. 此方法先基于卫星姿态动力学模型设计出非线性广义预测控制律, 再构造直接自适应模糊控制器逼近预测控制律中因模型不确定性引起的未知项. 文中证明了所设计的控制律能使卫星跟踪给定的期望姿态轨迹, 跟踪误差收敛到原点的小邻域内. 仿真结果验证了此方法的有效性.

**关键词** 卫星姿态控制, 非线性广义预测控制, 自适应模糊控制  
**中图分类号** TP273

## Direct Adaptive Fuzzy Predictive Control of Satellite Attitude

SUN Guang<sup>1</sup> HUO Wei<sup>1</sup>

**Abstract** A multi-input multi-output direct adaptive fuzzy predictive tracking control method for a satellite attitude systems with parametric uncertainty and external disturbance is presented. First, a nonlinear generalized predictive controller is designed based on the satellite attitude model; then, a direct adaptive fuzzy controller is constructed to approximate the unknown terms in the predictive control law caused by system model uncertainties. It is proved that the proposed controller can make satellite track the desired attitude trajectory and force the tracking error to converge to a small neighborhood of the origin. Simulation results show the effectiveness of the method.

**Key words** Satellite attitude control, nonlinear generalized predictive control, adaptive fuzzy control.

预测控制是具有模型预测、滚动优化和反馈校正功能的控制算法,因具有良好控制效果得到广泛应用,被控对象已从线性系统扩展到非线性系统. 为进一步减少预测控制在线计算量以适用于快变的非线性被控对象,近年来对具有封闭解析形式的非线性广义预测控制律的研究引起了很大关注. 文献[1, 2]利用Volterra级数的有限项截取来近似输出预测值,求出了当控制阶数为零(即级数近似表达式中只含控制的零阶导数)时非线性系统解析形式的最优广义预测控制律. 因为控制阶数限制了输出预测值的近似精度,所以这种方法不适用于预测时域较长的情况. 但选择小的预测时域,又会在系统相对阶较大时导致闭环系统不稳定. 文献[3]对光滑仿射非线性控制系统利用当前输出的各阶导数构造未来输出的Taylor级数预测模型,导出了以预测输出跟踪误差范数最小为指标的广义预测控制解析解,并计算出不同系统相对阶和控制阶数下闭环系统稳定表,很好解决了用高的控制阶数提高输出预测精度的问题. 在文献[3]的基础上,文献[4]对受外界干扰的非线性系统提出了带有非线性干扰观测器的PID预测控制律. 此后,这种

方法被应用到具有特定结构的机械系统和力学系统中[5, 6].

然而,上述这些方法有三个共同的不足:一是被控非线性系统模型中除干扰外未包含其它模型不确定性;二是在预测控制指标中未明显包含对控制量的要求;三是观测器的理论证明是在所受干扰导数等于零的假设下完成. 这些不足限制了上述方法的应用.

预测控制和模糊控制都是控制不确定系统的有效方法,实践证明将两者合理结合可进一步提高不确定系统的控制效果[7, 8]. 近两年来,该方法在航天控制方面的应用也相应出现,方炜等利用文献[3]的方法结合模糊逼近原理研究了空天飞行器的姿态控制,取得了很好的效果[9, 10].

本文以刚体卫星姿态系统为对象,研究了含模型不确定和未知外干扰时这一多输入多输出非线性系统的最优跟踪问题,提出了一种直接自适应模糊预测控制器,力图结合具体对象为解决非线性预测控制的上述三个不足提供思路. 基本思路是:考虑到力学系统中加速度与控制能量成正比,将姿态跟踪加速度误差引入性能指标反映卫星控制能耗,先利用文献[3]的思路推导出卫星姿态模型的非线性广义预测控制律,再根据模糊逻辑系统对未知非线性函数的逼近能力,构造自适应模糊控制器去逼近用系统标称值计算出的预测控制律与理想预测控制律间的误差. 文中证明了直接自适应模糊预测控制闭环系统跟踪误差

收稿日期 2009-01-15 收修改稿日期 2009-10-30  
Received January 15, 2009; in revised form October 30, 2009  
空间智能控制技术国家级实验室项目资助  
Supported by a grant from National Laboratory of Space Intelligent Control.  
1. 北京航空航天大学第七研究室 北京 100191.  
1. The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191.  
DOI: 10.1360/aas-007-xx

的收敛性,并仿真验证了所提出方法的可行性.

## 1 问题的描述

当卫星姿态用Euler角 $\mathbf{q}(t) = [\varphi, \theta, \psi]^T$ 表示时,其角速度在星体坐标系中的表达式为

$$\boldsymbol{\omega} = B(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (1)$$

式中 $B(\mathbf{q})$ 当 $\mathbf{q}$ 在一定区间变化时是可逆阵,本文只研究 $B(\mathbf{q})$ 可逆的情况.由Euler方程可推导出卫星的姿态动力学方程为:

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + S(\boldsymbol{\omega})J\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (2)$$

其中 $J$ 为卫星的惯性张量阵, $S(\boldsymbol{\omega})$ 为 $\boldsymbol{\omega}$ 所应的反对称叉乘矩阵, $\mathbf{u}$ 为施加到卫星上的控制力矩, $\mathbf{d}$ 为卫星受到的外部干扰力矩.将(2)式代入(1)式可知卫星的姿态动力学方程可表示为

$$JB\ddot{\mathbf{q}} + [J\dot{B} + S(B\dot{\mathbf{q}})JB]\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (3)$$

通常卫星的惯性张量阵 $J$ 和所受的干扰力矩 $\mathbf{d}$ 均不是精确已知的,本文假设 $J$ 和 $\mathbf{d}$ 满足以下条件:

1)  $J = J_0 + \Delta J$ 是对称正定阵,其已知标称值 $J_0 = \text{diag}\{J_{11}, J_{22}, J_{33}\}$ 是正对角阵,未知部分 $\Delta J = [\Delta_{ij}]$ 是对称阵,存在已知矩阵 $\bar{\Delta J} = [\bar{\Delta}_{ij}]$ ,使得 $|\Delta_{ij}| \leq \bar{\Delta}_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ .

2)  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \Delta \mathbf{d}$ 的各阶导数存在,其已知标称值是 $\mathbf{d}_0$ ,未知部分 $\Delta \mathbf{d} = [\Delta d_1, \Delta d_2, \Delta d_3]^T$ 具有已知上界,即存在已知常向量 $\bar{\Delta \mathbf{d}} = [\bar{\Delta d}_1, \bar{\Delta d}_2, \bar{\Delta d}_3]^T$ ,使得 $|\Delta d_i| \leq \bar{\Delta d}_i (i=1, 2, 3)$ .

控制任务是:在存在模型不确定性和未知外部干扰的情况下,设计控制律使卫星姿态 $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ 跟踪期望的姿态轨迹 $(\mathbf{q}_r(t), \dot{\mathbf{q}}_r(t))$ ,即使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_r(t)) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{\mathbf{q}}(t) - \dot{\mathbf{q}}_r(t)) = 0$$

## 2 广义预测控制律设计

先对系统(3)设计广义预测控制律,即给定期望的光滑参考轨迹 $\mathbf{q}_r(t)$ ,定义 $t + \tau$ 时刻姿态 $\mathbf{q}(t + \tau)$ 的预测值为 $\hat{\mathbf{q}}(t + \tau)$ ,预测误差 $\mathbf{e}(t + \tau) \triangleq \hat{\mathbf{q}}(t + \tau) - \hat{\mathbf{q}}_r(t + \tau)$ ,预测时长为 $T$ ,设计控制律使滚动优化性能指标

$$I = \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \mathbf{e}^T(t + \tau) \mathbf{e}(t + \tau) + \dot{\mathbf{e}}^T(t + \tau) \dot{\mathbf{e}}(t + \tau) + \lambda \ddot{\mathbf{e}}^T(t + \tau) \ddot{\mathbf{e}}(t + \tau) \right] d\tau \quad (4)$$

取最小值,其中常值加权因子 $\lambda \geq 0$ .在指标(4)中,含 $\mathbf{e}$ 和 $\dot{\mathbf{e}}$ 的项反映了对闭环系统状态的优化要求,含 $\ddot{\mathbf{e}}$ 的项间接反映了对控制能量的优化要求.

应用Taylor公式, $t + \tau$ 时刻姿态 $\mathbf{q}(t + \tau)$ 及其一、二阶导数的预测值可近似写为:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}(t + \tau) \approx \sum_{i=0}^4 \frac{\tau^i}{i!} \mathbf{q}^{(i)}(t) \triangleq H_1(\tau) \mathbf{y} \\ \hat{\dot{\mathbf{q}}}(t + \tau) \approx \sum_{i=1}^4 \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} \mathbf{q}^{(i)}(t) \triangleq H_2(\tau) \mathbf{y} \\ \hat{\ddot{\mathbf{q}}}(t + \tau) \approx \sum_{i=2}^4 \frac{\tau^{i-2}}{(i-2)!} \mathbf{q}^{(i)}(t) \triangleq H_3(\tau) \mathbf{y} \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\mathbf{y} = [\mathbf{q}(t)^T, \dot{\mathbf{q}}(t)^T, \ddot{\mathbf{q}}(t)^T, \mathbf{q}^{(3)}(t)^T, \mathbf{q}^{(4)}(t)^T]^T$ , $H_1(\tau) = [I_3, \tau I_3, \frac{\tau^2}{2} I_3, \frac{\tau^3}{6} I_3, \frac{\tau^4}{24} I_3]$ , $H_2(\tau) = [0_{3 \times 3}, I_3, \tau I_3, \frac{\tau^2}{2} I_3, \frac{\tau^3}{6} I_3]$ , $H_3(\tau) = [0_{3 \times 3}, 0_{3 \times 3}, I_3, \tau I_3, \frac{\tau^2}{2} I_3]$ , $I_3$ 为3阶单位阵, $0_{3 \times 3}$ 为3阶零矩阵.同理, $t + \tau$ 时刻期望参考姿态 $\mathbf{q}_r(t + \tau)$ 及其一、二阶导数也可近似写为:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_r(t + \tau) = H_1(\tau) \mathbf{y}_r \\ \hat{\dot{\mathbf{q}}}_r(t + \tau) = H_2(\tau) \mathbf{y}_r \\ \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_r(t + \tau) = H_3(\tau) \mathbf{y}_r \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{y}_r = [\mathbf{q}_r(t)^T, \dot{\mathbf{q}}_r(t)^T, \ddot{\mathbf{q}}_r(t)^T, \mathbf{q}_r^{(3)}(t)^T, \mathbf{q}_r^{(4)}(t)^T]^T$ .根据(5)式和(6)式,性能指标(4)可近似写为:

$$I = \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r)^T R (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r)$$

式中 $R = \int_0^T [H_1^T H_1 + H_2^T H_2 + \lambda H_3^T H_3] d\tau$ 是一 $15 \times 15$ 常值对称阵.

对卫星姿态向量 $\mathbf{q}(t)$ 连续求导至4阶得到:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{m}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + (JB)^{-1}(\mathbf{u} + \mathbf{d}) \\ \mathbf{q}^{(3)}(t) = \mathbf{m}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{p}_1 + (JB)^{-1}(\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{d}}) \\ \mathbf{q}^{(4)}(t) = \mathbf{m}_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{p}_2 + (JB)^{-1}(\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{d}}) \end{cases} \quad (7)$$

式中: $\mathbf{m}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -(JB)^{-1}[J\dot{B} + S(B\dot{\mathbf{q}})JB]\dot{\mathbf{q}}$ , $\mathbf{m}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathbf{m}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}}$ , $\mathbf{m}_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathbf{m}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}}$ , $\mathbf{p}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) = \frac{\partial \mathbf{m}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial [(JB)^{-1}]}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{u} + \mathbf{d})$ , $\mathbf{p}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}^{(3)}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) = \frac{\partial \mathbf{m}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{p}}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) + \frac{\partial [(JB)^{-1}]}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{d}})$ .定义 $\bar{\mathbf{y}} = [\mathbf{q}^T - \mathbf{q}_r^T, \dot{\mathbf{q}}^T - \dot{\mathbf{q}}_r^T]^T$ , $\bar{\mathbf{q}}_r = [\ddot{\mathbf{q}}_r^T, \mathbf{q}_r^{(3)T}, \mathbf{q}_r^{(4)T}]^T$ ,由(7)式知

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}_r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}} \\ \mathbf{m} - \bar{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{d}}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中 $\bar{\mathbf{u}} = [\mathbf{u}^T, \dot{\mathbf{u}}^T, \ddot{\mathbf{u}}^T]$ , $\bar{\mathbf{d}} = [\mathbf{d}^T, \dot{\mathbf{d}}^T, \ddot{\mathbf{d}}^T]$ , $\mathbf{m} = [\mathbf{m}_1^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad \mathbf{m}_2^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad \mathbf{m}_3^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]^T$ , $\mathbf{n}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{d}}) = \begin{bmatrix} (JB)^{-1}(\mathbf{u} + \mathbf{d}) \\ \mathbf{p}_1 + (JB)^{-1}(\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{d}}) \\ \mathbf{p}_2 + (JB)^{-1}(\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{d}}) \end{bmatrix}$ .又令 $R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{bmatrix}$ ;

$R_{11} \in \mathbf{R}^{6 \times 6}$ ,  $R_{12} \in \mathbf{R}^{6 \times 9}$ ,  $R_{22} \in \mathbf{R}^{9 \times 9}$ , 则由(8)式知

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \frac{\partial (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r)^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}} R (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r) = \left[ \frac{\partial \mathbf{n}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{d}})}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \right]^T \times \left( \left[ R_{12}^T \quad R_{22} \right] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}} \\ \mathbf{m} - \bar{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix} + R_{22} \mathbf{n}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{d}}) \right) \quad (9)$$

将(8)式中 $\mathbf{n}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{d}})$ 对 $\bar{\mathbf{u}}$ 求偏导知:

$$\frac{\partial \mathbf{n}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{d}})}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} (JB)^{-1} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ * & (JB)^{-1} & 0_{3 \times 3} \\ * & * & (JB)^{-1} \end{bmatrix}$$

故 $\frac{\partial \mathbf{n}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{d}})}{\partial \bar{\mathbf{u}}}$ 是可逆矩阵. 考虑到 $R_{22}$ 也是可逆阵, 则可由(9)式和性能指标 $I$ 最小的必要条件 $\frac{\partial I}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = 0$ , 得到等价的 $I$ 最小的必要条件为:

$$\mathbf{n}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{d}}) = -R_{22}^{-1} R_{12}^T \bar{\mathbf{y}} - (\mathbf{m} - \bar{\mathbf{q}}_r) \quad (10)$$

定义 $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}_r(t) - \mathbf{q}(t)$ ,  $K_1$ 为 $R_{22}^{-1} R_{12}^T$ 的前三行前三列构成的方阵,  $K_2$ 为 $R_{22}^{-1} R_{12}^T$ 前三行后三列组成的方阵, 则由(10)式的前三行可得到使性能指标(4)最小的预测控制律为:

$$\mathbf{u}^*(t) \triangleq J(B\ddot{\mathbf{q}}_r + K_2\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_1\tilde{\mathbf{q}}) + \dot{B}\dot{\mathbf{q}} + S(B\dot{\mathbf{q}})JB\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{d} \quad (11)$$

因 $JB$ 是可逆的, 将预测控制律(11)代入卫星姿态方程(3)可得到闭环系统方程为:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) + K_2\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) + K_1\tilde{\mathbf{q}}(t) = 0 \quad (12)$$

定义 $\bar{T} = TI_3$ , 根据 $K_1$ 和 $K_2$ 的定义, 可计算出:

$$\begin{aligned} K_1 &= 42\bar{T}^2(25T^8 + 4140T^6 + 672(325\lambda + 78)T^4 + \\ & 5019840\lambda T^2 + 25401600\lambda^2)/(25T^{12} + 5460T^{10} + \\ & 180(2009\lambda + 756)T^8 + 64(233893\lambda + 5293)T^6 + \\ & 640(276507\lambda^2 + 71442\lambda)T^4 + 975421440\lambda^2 T^2 + \\ & 2133734400\lambda^3) \\ K_2 &= 52.5\bar{T}(5T^{10} + 988T^8 + 144(392\lambda + 153)T^6 + \\ & 64(36689\lambda + 756)T^4 + 6912(2009\lambda^2 + 679\lambda) \times \\ & T^2 + 40642560\lambda^2)/(25T^{12} + 5460T^{10} + 180 \times \\ & (2009\lambda + 756)T^8 + 64(233893\lambda + 5292)T^6 + \\ & 640(276507\lambda^2 + 71442\lambda)T^4 + 975421440\lambda^2 T^2 + \\ & 2133734400\lambda^3) \end{aligned}$$

因为 $K_1$ 和 $K_2$ 均为正定对角阵, 所以由(12)式很容易证明:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) = 0$ , 即闭环系统(12)是全局渐近稳定的. 这表明: 尽管控制律(11)是从使有限区间上滚动优化指标(4)最小导出的, 但它可保证闭环系统的全局稳定性.

### 3 直接自适应模糊控制器设计

因为求出的控制律(11)中含有模型不确定和未知外部干扰, 所以是不能实施的. 本文采用自适应模糊逻辑系统来逼近控制律 $\mathbf{u}^*(t)$ 中的未知项, 以达到使所施加的控制逼近理想预测控制律(11)的目的.

利用关于 $J$ 和 $\mathbf{d}$ 的假设将(11)写为如下形式:

$$\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma} \quad (13)$$

式中 $\tilde{\mathbf{u}} = J_0(B\ddot{\mathbf{q}}_r^* + \dot{B}\dot{\mathbf{q}}) + S(B\dot{\mathbf{q}})J_0B\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{d}_0$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_r^* = \ddot{\mathbf{q}}_r + K_2\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_1\tilde{\mathbf{q}}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = \Delta J(B\ddot{\mathbf{q}}_r^* + \dot{B}\dot{\mathbf{q}}) + S(B\dot{\mathbf{q}}) \times \Delta JB\dot{\mathbf{q}} - \Delta \mathbf{d}$ . 以下利用自适应模糊逻辑系统构成的向量和跟踪误差信号来逼近 $\boldsymbol{\sigma}$ .

#### 3.1 模糊控制器设计

自适应模糊逻辑系统所采用的规则库形如<sup>[11]</sup>:

$R^l$ : 若 $\hat{x}_1$ 为 $F_1^l, \dots, \hat{x}_n$ 为 $F_n^l$ , 则 $\hat{y}$ 为 $G^l, l = 1, \dots, m$  其中 $m$ 为规则库中模糊规则数,  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n]^T$ 表示 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ 模糊化后所得的模糊变量,  $\hat{y}$ 表示输出语言变量,  $F_i^l (i = 1, \dots, n)$ 和 $G^l$ 均为模糊集合, 其对应的隶属函数 $\mu_{F_i^l}(x_i)$ 和 $\mu_{G^l}(\hat{y})$ 均取为高斯型. 采用单值模糊产生器、中心平均模糊消除器和乘积推理规则, 则模糊逻辑系统输出可表示为<sup>[11]</sup>:

$$\hat{f}(\mathbf{x} | \Theta) = \Theta^T \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) \quad (14)$$

其中 $\Theta = [\theta_1, \dots, \theta_m]^T, \theta_l = \hat{y}^l$ 为 $\mu_{G^l}(\hat{y})$ 取最大值时对应的点,  $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) = [\gamma_1(\mathbf{x}), \dots, \gamma_m(\mathbf{x})]^T$ ,  $\gamma_l(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i)}{\sum_{i=1}^m \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i)}$ 为模糊基函数. 定义 $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$ , 利用三个形如式(14)的模糊逻辑系统构成模糊控制器

$$\mathbf{u}_c = \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ u_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}(\tilde{\mathbf{x}} | \Theta_1) \\ \hat{f}(\tilde{\mathbf{x}} | \Theta_2) \\ \hat{f}(\tilde{\mathbf{x}} | \Theta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_1^T \mathbf{\Gamma}_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \Theta_2^T \mathbf{\Gamma}_2(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \Theta_3^T \mathbf{\Gamma}_3(\tilde{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \quad (15)$$

来逼近未知向量 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^T$ , 将控制律取为

$$\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_s \quad (16)$$

式中 $\mathbf{u}_s$ 是待设计的监督控制. 将控制(16)代入卫星姿态方程(3)可得到闭环误差方程为

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = -K_2\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - K_1\tilde{\mathbf{q}} + (JB)^{-1}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{u}_c - \mathbf{u}_s) \quad (17)$$

或等价地写为状态方程形式:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}} + D(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{u}_c - \mathbf{u}_s) \quad (18)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_3 \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix}_{6 \times 6}, \quad D = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ (JB)^{-1} \end{bmatrix}_{6 \times 3}$$

因 $K_1$ 和 $K_2$ 均为正定阵, 易证 $A$ 是稳定的, 故任取正定阵 $Q$ , 李亚普诺夫方程

$$A^T P + PA = -Q \quad (19)$$

均存在唯一正定阵解 $P$ . 定义 $V_{\tilde{x}} = \frac{1}{2} \tilde{x}^T P \tilde{x}$ , 将 $V_{\tilde{x}}$ 沿闭环系统(18)求导可得

$$\dot{V}_{\tilde{x}} = -\frac{1}{2} \tilde{x}^T Q \tilde{x} + \tilde{x}^T P D (\sigma - u_c - u_s) \quad (20)$$

令 $P$ 的后三列为 $\bar{P} \in \mathbf{R}^{6 \times 3}$ , 则

$$\tilde{x}^T P D = \tilde{x}^T \bar{P} B^{-1} (J_0 + \Delta J)^{-1} \triangleq \mathbf{p}^T (I_3 + H)$$

其中 $\mathbf{p}^T = \tilde{x}^T \bar{P} B^{-1} J_0^{-1} = [p_1, p_2, p_3]$ ,  $H = (I_3 + \Delta J J_0^{-1})^{-1} - I_3$ . 由 $\Delta J$ 的有界性知 $H = [h_{ij}]$ 的各元素均有界, 即可找到所有元素均非负的3阶方阵 $\bar{H} = [\bar{h}_{ij}]$ , 使得 $|h_{ij}| \leq \bar{h}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). 因此,

$$\begin{aligned} \tilde{x}^T P D (\sigma - u_c - u_s) &= \mathbf{p}^T (I_3 + H) (\sigma - u_c - u_s) \\ &= \mathbf{p}^T \begin{bmatrix} (1 + h_{11})(\sigma_1 - u_{c1} - u_{s1}) + h_{12}(\sigma_2 - \\ u_{c2} - u_{s2}) + h_{13}(\sigma_3 - u_{c3} - u_{s3}) \\ h_{21}(\sigma_1 - u_{c1} - u_{s1}) + (1 + h_{22})(\sigma_2 - \\ u_{c2} - u_{s2}) + h_{23}(\sigma_3 - u_{c3} - u_{s3}) \\ h_{31}(\sigma_1 - u_{c1} - u_{s1}) + h_{32}(\sigma_2 - u_{c2} - \\ u_{s2}) + (1 + h_{33})(\sigma_3 - u_{c3} - u_{s3}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

若选取 $u_{si} = k_i \text{sgn}(p_i)$ ;  $k_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 则可知

$$\begin{aligned} \tilde{x}^T P D (\sigma - u_c - u_s) &= \mathbf{p}^T \begin{bmatrix} (1 + h_{11})(\sigma_1 - u_{c1}) + h_{12}(\sigma_2 - u_{c2} - \\ k_2 \text{sgn}(p_2)) + h_{13}(\sigma_3 - u_{c3} - k_3 \times \\ \text{sgn}(p_3)) - (1 + h_{11})k_1 \text{sgn}(p_1) \\ h_{21}(\sigma_1 - u_{c1} - k_1 \text{sgn}(p_1)) + (1 + h_{22}) \\ (\sigma_2 - u_{c2}) + h_{23}(\sigma_3 - u_{c3} - k_3 \times \\ \text{sgn}(p_3)) - (1 + h_{22})k_2 \text{sgn}(p_2) \\ h_{31}(\sigma_1 - u_{c1} - k_1 \text{sgn}(p_1)) + h_{32}(\sigma_2 - \\ u_{c2} - k_2 \text{sgn}(p_2)) + (1 + h_{33})(\sigma_3 - \\ u_{c3}) - (1 + h_{33})k_3 \text{sgn}(p_3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由上式知只要选取 $\mathbf{k} \triangleq [k_1, k_2, k_3]^T$ 满足:

$$\begin{aligned} (1 + \bar{h}_{11})(|u_{c1}| + \bar{\sigma}_1) + \bar{h}_{12}(|u_{c2}| + \bar{\sigma}_2 + k_2) + \\ \bar{h}_{13}(|u_{c3}| + \bar{\sigma}_3 + k_3) &= (1 - \bar{h}_{11})k_1 \\ \bar{h}_{21}(|u_{c1}| + \bar{\sigma}_1 + k_1) + (1 + \bar{h}_{22})(|u_{c2}| + \bar{\sigma}_2) + \\ \bar{h}_{23}(|u_{c3}| + \bar{\sigma}_3 + k_3) &= (1 - \bar{h}_{22})k_2 \\ \bar{h}_{31}(|u_{c1}| + \bar{\sigma}_1 + k_1) + \bar{h}_{32}(|u_{c2}| + \bar{\sigma}_2 + k_2) + \\ (1 + \bar{h}_{33})(|u_{c3}| + \bar{\sigma}_3) &= (1 - \bar{h}_{33})k_3 \end{aligned}$$

即:

$$(I_3 - \bar{H})\mathbf{k} = (I_3 + \bar{H})\boldsymbol{\delta} \triangleq \bar{\boldsymbol{\delta}}; \boldsymbol{\delta} \triangleq [|\mathbf{u}_c| + \bar{\boldsymbol{\sigma}}] \quad (21)$$

式中 $|\cdot|$ 表示向量或矩阵所有元素取绝对值,  $\boldsymbol{\sigma}$ 界的估值 $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = [\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3]^T \triangleq \overline{\Delta \mathbf{d}} + \overline{\Delta J} |B \ddot{\mathbf{q}}_r^* + \dot{B} \dot{\mathbf{q}}| + |S(B \dot{\mathbf{q}})| \overline{\Delta J} |B \dot{\mathbf{q}}|$ . 则可保证

$$\tilde{x}^T P D (\sigma - u_c - u_s) \leq 0 \quad (22)$$

方程(21)非负解 $\mathbf{k}$ 的存在性由以下Frobenius-Perron定理保证.

Frobenius-Perron定理<sup>[12]</sup>. 若 $\mathbf{b}$ 是所有分量均非负的向量,  $A$ 是所有元素均非负的同维方阵, 则 $A$ 的最大实特征值 $\rho_1$ 非负, 且当 $\rho > \rho_1$ 时, 方程

$$(I - \rho^{-1}A)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

存在唯一解 $\mathbf{x}$ , 且其所有分量均非负.

本文附录中证明了: 若定义 $J_m = \min\{J_{ii}\}$  ( $i = 1, 2, 3$ );  $\bar{\Delta} = \max\{\bar{\Delta}_{ij}\}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ), 选取 $\bar{H} = [\bar{h}_{ij}]$ 中所有元素的值均为 $\frac{3\bar{\Delta}}{J_m - 3\bar{\Delta}}$ , 则当不确定性上界满足 $\bar{\Delta} < J_m/12$ 时,  $\bar{H} = [h_{ij}]$ 满足 $|h_{ij}| \leq \bar{h}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), 且 $\bar{H}$ 的最大实特征值 $\rho(\bar{H}) < 1$ . 这时由Frobenius-Perron定理知方程

$$(I_3 - \bar{H})\mathbf{k} = \bar{\boldsymbol{\delta}}$$

存在唯一非负解 $\mathbf{k}$ .

当从方程求出非负解 $\mathbf{k}$ 后, 按文献[11]的方法, 将监督控制 $\mathbf{u}_s$ 取为如下形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s &= I^* \text{diag}\{\text{sgn}(p_1), \text{sgn}(p_2), \text{sgn}(p_3)\} \mathbf{k} \\ &= I^* \text{diag}\{\text{sgn}(p_1), \text{sgn}(p_2), \text{sgn}(p_3)\} \times \\ &\quad (I_3 - \bar{H})^{-1} (I_3 + \bar{H}) [|\mathbf{u}_c| + \bar{\boldsymbol{\sigma}}] \end{aligned} \quad (23)$$

其中, 当 $V_{\tilde{x}} > \bar{V}$  ( $\bar{V}$ 为事先任意选定的一个正数)时,  $I^* = 1$ ; 否则 $I^* = 0$ . 这样可以得到

$$\dot{V}_{\tilde{x}} \leq -\frac{1}{2} \tilde{x}^T Q \tilde{x} < 0, \quad \text{当 } V_{\tilde{x}} > \bar{V} \quad (24)$$

从而经过有限时间后总能有 $V_{\tilde{x}} \leq \bar{V}$ , 这保证了 $\tilde{x}$ , 即 $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ 的有界性.

### 3.2 模糊自适应算法

记 $\tilde{x}$ 在有界集 $M_{\tilde{x}}$ 中变化, 假设 $\|\Theta_i\| \leq M_{\Theta_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ,  $M_{\Theta_i}$ 由设计者取定), 定义最优参数估计值

$$\Theta_i^* = \arg \min_{\|\Theta_i\| \leq M_{\Theta_i}} [\sup_{\tilde{x} \in M_{\tilde{x}}} |\hat{f}(\tilde{x} | \Theta_i) - \sigma_i|] \quad (25)$$

和最小近似误差

$$\boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{u}_c^* - \boldsymbol{\sigma} \quad (26)$$

根据(26)式,误差方程(18)可写为

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ (J_0 B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^T \Gamma_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \Phi_2^T \Gamma_2(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \Phi_3^T \Gamma_3(\tilde{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ \varpi \end{bmatrix} - D\mathbf{u}_s(27)$$

式中  $\Phi_i = \Theta_i^* - \Theta_i$ ,  $\varpi = (JB)^{-1}\omega^* + ((JB)^{-1} - (J_0 B)^{-1})(\mathbf{u}_c - \mathbf{u}_c^*) = (J_0 B)^{-1}[\omega^* + H(\mathbf{u}_c - \sigma)]$ .

定义李亚普诺夫函数

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}^T P\tilde{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^3 \frac{J_{ii}^{-1}}{2\gamma_i} \Phi_i^T \Phi_i \quad (28)$$

式中  $\gamma_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ . 将  $V$  沿误差方程(27)求导, 并考虑到  $\tilde{\mathbf{x}}^T P D \mathbf{u}_s \geq 0$  可得

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}^T Q\tilde{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^3 J_{ii}^{-1} \Phi_i^T [\tilde{\mathbf{x}}^T \bar{P} B^{-1}]_i \Gamma_i(\tilde{\mathbf{x}}) - \sum_{i=1}^3 \frac{J_{ii}^{-1}}{\gamma_i} \Phi_i^T \dot{\Theta}_i - \tilde{\mathbf{x}}^T \bar{P} \varpi \quad (29)$$

这里  $[\cdot]_i$  表示取向量第  $i$  个元素. 为了保证参数  $\Theta_i$  有界, 将参数自适应律选为:

$$\dot{\Theta}_i = \begin{cases} \gamma_i [\tilde{\mathbf{x}}^T \bar{P} B^{-1}]_i \Gamma_i(\tilde{\mathbf{x}}), & \text{当 } \|\Theta_i\| < M_{\Theta_i} \text{ 或者} \\ \|\Theta_i\| = M_{\Theta_i} \text{ 且 } [\tilde{\mathbf{x}}^T \bar{P} B^{-1}]_i \Theta_i^T \Gamma_i(\tilde{\mathbf{x}}) \leq 0 \\ \gamma_i [\tilde{\mathbf{x}}^T \bar{P} B^{-1}]_i \left( I_m - \frac{\Theta_i \Theta_i^T}{\|\Theta_i\|^2} \right) \Gamma_i(\tilde{\mathbf{x}}), & \text{当} \\ \|\Theta_i\| = M_{\Theta_i} \text{ 且 } [\tilde{\mathbf{x}}^T \bar{P} B^{-1}]_i \Theta_i^T \Gamma_i(\tilde{\mathbf{x}}) > 0 \end{cases} \quad (30)$$

当  $\dot{\Theta}_i$  取(30)式中第一行时, 由(29)式有

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}^T Q\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}^T \bar{P} \varpi \quad (31)$$

当  $\dot{\Theta}_i$  取(30)式中第二行时, 由(29)式知

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}^T Q\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}^T \bar{P} \varpi + \sum_{i=1}^3 J_{ii}^{-1} \Phi_i^T [\tilde{\mathbf{x}}^T \bar{P} B^{-1}]_i \frac{\Theta_i \Theta_i^T \Gamma_i(\tilde{\mathbf{x}})}{\|\Theta_i\|^2}$$

此时  $\Phi_i^T \Theta_i = (\Theta_i^* - \Theta_i)^T \Theta_i = \frac{1}{2}[\|\Theta_i^*\|^2 - \|\Theta_i\|^2 - \|\Theta_i - \Theta_i^*\|^2] = \frac{1}{2}[\|\Theta_i^*\|^2 - M_{\Theta_i}^2 - \|\Theta_i - \Theta_i^*\|^2] \leq 0$ , 所以同样有(31)式成立.

#### 4 稳定性分析

**定理.** 对含模型不确定性和未知外干扰的卫星姿态动力学方程(2), 当其满足假设条件1)、2)和  $\bar{\Delta} < J_m/12$  时, 如果采用直接自适应模糊预测控制

律(16), 其中  $\mathbf{u}_c(t)$  由(15)式确定,  $\mathbf{u}_s(t)$  由(23)式确定, 参数自适应律为(30)式, 则有

(i)  $\|\Theta_i\| \leq M_{\Theta_i} (i = 1, 2, 3)$ ; 且

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \dot{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix} \right\| + \left( \frac{2\bar{V}}{\lambda_{\min}(P)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\lambda_{\min}(P)$  为  $P$  的最小特征值.

(ii)  $\|\mathbf{u}\| \leq \|\tilde{\mathbf{u}}\| + \sqrt{3}M_{\Theta} + \frac{1+\|\bar{H}\|}{1-\|\bar{H}\|}(\sqrt{3}M_{\Theta} + \|\bar{\sigma}\|)$ , 其中  $M_{\Theta} = \max_{1 \leq i \leq 3} \{M_{\Theta_i}\}$ .

(iii) 当  $\lambda_{\min}(Q) > 1$  时,  $\int_0^t \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 d\tau \leq a + b \int_0^t \|\varpi\|^2 d\tau$ , 其中  $a = \frac{2(\sup_{t \geq 0} V(t) + V(0))}{\lambda_{\min}(Q) - 1}$ ,  $b = \frac{\|\bar{P}\|^2}{\lambda_{\min}(Q) - 1}$ ,  $\lambda_{\min}(Q)$  为  $Q$  的最小特征值. 且当  $\varpi$  平方可积时,  $\tilde{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0$ .

**证明.** (i) 由(30)式知  $\|\Theta_i\| \leq M_{\Theta_i} (i = 1, 2, 3)$ . 据(24)式知

$$\frac{1}{2}\lambda_{\min}(P)\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 \leq V_{\tilde{\mathbf{x}}} = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}^T P\tilde{\mathbf{x}} \leq \bar{V}$$

利用  $\tilde{\mathbf{x}}$  的定义, 积分上式可得

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix} \right\| + \|\tilde{\mathbf{x}}\| \leq \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \dot{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix} \right\| + \left( \frac{2\bar{V}}{\lambda_{\min}(P)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(ii) 由  $\mathbf{u}_c$  各分量的定义(15)式知它们是  $\Theta_i$  中元素的加权平均, 所以  $\|\mathbf{u}_{ci}\| \leq M_{\Theta_i}$ , 从而可得到  $\|\mathbf{u}_c\| \leq \sqrt{3}M_{\Theta}$ . 又据(23)式可得

$$\|\mathbf{u}_s(t)\| \leq \|(I_3 - \bar{H})^{-1}\| (1 + \|\bar{H}\|)(\sqrt{3}M_{\Theta} + \|\bar{\sigma}\|)$$

由  $\bar{H}$  的定义可算出: 当  $\bar{\Delta} < J_m/12$  时

$$\|\bar{H}\| \leq \frac{9\bar{\Delta}}{J_m - 3\bar{\Delta}} < \frac{9\bar{\Delta}}{12\bar{\Delta} - 3\bar{\Delta}} < 1$$

且这时容易证明<sup>[13]</sup>:  $\|(I_3 - \bar{H})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\bar{H}\|}$ , 故有

$$\|\mathbf{u}_s(t)\| \leq \frac{1 + \|\bar{H}\|}{1 - \|\bar{H}\|}(\sqrt{3}M_{\Theta} + \|\bar{\sigma}\|)$$

从而由(16)式可得

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\| + \|\mathbf{u}_c(t)\| + \|\mathbf{u}_s(t)\| \leq \|\tilde{\mathbf{u}}\| + \sqrt{3}M_{\Theta} + \frac{1 + \|\bar{H}\|}{1 - \|\bar{H}\|}(\sqrt{3}M_{\Theta} + \|\bar{\sigma}\|)$$

(iii) 对(31)式通过配方容易得到:

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q) - 1}{2}\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 + \frac{1}{2}\|\bar{P}\varpi\|^2$$

式中 $\lambda_{\min}(Q)$ 是 $Q$ 的最小特征值, 积分后可得

$$\int_0^t \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 d\tau \leq \frac{2}{\lambda_{\min}(Q) - 1} (V(t) + V(0)) + \frac{\|\bar{P}\|^2}{\lambda_{\min}(Q) - 1} \int_0^t \|\varpi\|^2 d\tau \leq a + b \int_0^t \|\varpi\|^2 d\tau$$

若 $\varpi$ 平方可积, 则 $\tilde{\mathbf{x}}$ 也平方可积. 再由 $\tilde{\mathbf{x}}$ 和 $\mathbf{u}$ 的有界性可知 $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}$ 也是有界的, 故 $\tilde{\mathbf{x}}$ 是一致连续的. 由Barbalat引理知: $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow 0$ , 即 $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}} \rightarrow \dot{\mathbf{q}}_r$ .  $\square$

### 5 仿真研究

设卫星姿态模型(3)中矩阵 $B(\mathbf{q})$ 为:

$$B(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ -\sin \psi & 1 & 0 \\ \cos \psi \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

已知卫星惯性张量阵的标称值 $J_0$ 及不确定 $\Delta J$ 为

$$J_0 = \text{diag}\{11000, 8000, 8000\}(\text{kgm}^2)$$

$$\Delta J = [\Delta J_{ij}](\text{kgm}^2)$$

$$|\Delta J_{11}| \leq 550, |\Delta J_{22}| \leq 400, |\Delta J_{33}| \leq 400$$

$$|\Delta J_{ij}| \leq 200 (i \neq j; i, j = 1, 2, 3)$$

因为 $\bar{\Delta} = \max\{\bar{\Delta}_{ij}\} = 550 < J_m/12 = 666.7$ , 故满足文中 $\bar{\Delta} < J_m/12$ 的条件.

干扰标称值 $\mathbf{d}_0$ 及其不确定性上界 $\bar{\Delta \mathbf{d}}$ 分别为

$$\mathbf{d}_0 = [0.15 \quad 0.15 \quad 0.15]^T \times 10^{-2}(\text{kgm}),$$

$$\bar{\Delta \mathbf{d}} = [0.15 \quad 0.15 \quad 0.15]^T \times 10^{-2}(\text{kgm})$$

该仿真控制的目的是将卫星从初始姿态 $\mathbf{q}_0 = [0, 0, 0]^T, \dot{\mathbf{q}}_0 = [0, 0, 0]^T$ , 控制到期望姿态 $\mathbf{q}_d = [\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{7}]^T, \dot{\mathbf{q}}_d = [0, 0, 0]^T$ . 为此将期望参考轨迹规划为如下形式:

$$\mathbf{q}_r(t) = [1 - (1 + at + 0.5a^2t^2)e^{-at}] \mathbf{q}_d$$

根据以上数据以及假设, 经计算可得

$$\bar{\Delta J} = 100 \begin{bmatrix} 5.5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \bar{H} = 0.26 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = (I_3 - \bar{H})^{-1} (I_3 + \bar{H}) [|\mathbf{u}_c| + \bar{\sigma}]$$

$$= \begin{bmatrix} 3.3636 & 2.3636 & 2.3636 \\ 2.3636 & 3.3636 & 2.3636 \\ 2.3636 & 2.3636 & 3.3636 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\mathbf{u}_{c1}| + \bar{\sigma}_1 \\ |\mathbf{u}_{c2}| + \bar{\sigma}_2 \\ |\mathbf{u}_{c3}| + \bar{\sigma}_3 \end{bmatrix}$$

按(23)式构成监督控制 $\mathbf{u}_s$ .

在性能指标中选取 $\lambda = 2$ , 预测时域 $T = 1$ 秒, 可解得 $K_1 = 0.216I_3, K_2 = 0.558I_3$ . 选取 $Q = 20I_6, \bar{V} = 0.0002$ , 因为所设计的监督控制可保证跟踪误差 $\tilde{\mathbf{x}}$ 的有界性, 根据定理中(1)可以近似计算得到 $\|\tilde{\mathbf{x}}\| \leq 5 \times 10^{-3}$ . 对模糊逻辑系统输入 $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_6]^T$ 各分量作如下——映射:

$$z_i = \frac{\tilde{x}_i}{|\tilde{x}_i| + 0.0001} \quad i = 1, \dots, 6$$

这使得 $z_i \in (-1, 1)$ . 对各分量 $z_i$ 采用3个模糊语言变量: $F_i^1$ (负),  $F_i^2$ (零),  $F_i^3$ (正), 对应的隶属函数为

$$\mu_{F_i^j} = e^{-\frac{1}{2}(\frac{z_i - \mu_j}{0.25})^2} \quad j = 1, 2, 3$$

其中 $\mu_1 = -0.5, \mu_2 = 0, \mu_3 = 0.5$ . 按(15)式构成模糊控制器 $\mathbf{u}_c$ .

自适应参数的初值 $\Theta_i(0) = 0$ , 其他参数设计为 $M_\Theta = 16, a = 0.2, \gamma_i = 40 (i=1, 2, 3)$ , 利用(30)式可确定出自适应参数控制律.

仿真时设惯性张量阵 $J$ 和所受干扰 $\mathbf{d}$ 分别为

$$J = \begin{bmatrix} 11540 & 194 & 176 \\ 194 & 8260 & 145 \\ 176 & 145 & 7780 \end{bmatrix} (\text{kgm}^2)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0.01 + 0.1 \sin 5t \\ 0.02 + 0.15 \cos(2t + \pi/6) \\ 0.03 + 0.15 \cos(2t + \pi/4) \end{bmatrix} \times 10^{-2}(\text{kgm})$$

仿真结果如下图所示:

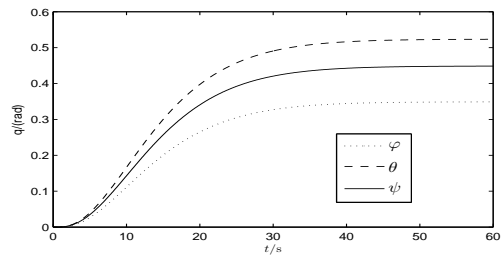


图1 卫星姿态角

Fig. 1 Attitude angular of satellite

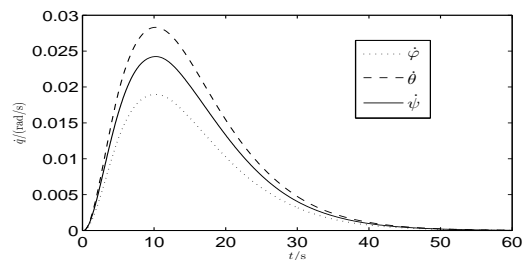


图2 卫星角速度

Fig. 2 Angular velocity of satellite

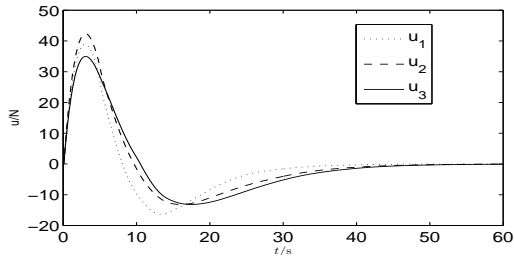


图3 卫星控制力矩

Fig. 3 Control torques of satellite

从图1-3可以看出,尽管模型中存在较大的不确定性和未知外部干扰,但利用本文所设计的直接自适应模糊广义预测控制器能使卫星姿态角和姿态角速度的跟踪具有良好的控制精度和鲁棒性。

为了比较所设计控制律的效果,本文对姿态角跟踪误差  $e(t) = q_r(t) - q(t)$  进行了有无自适应模糊控制两种情况下的仿真,结果见下图:

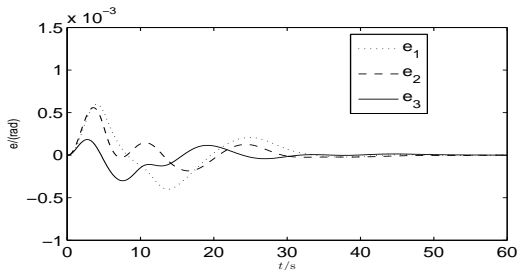


图4 有自适应模糊时的姿态角误差

Fig. 4 Attitude angular error with adaptive fuzzy

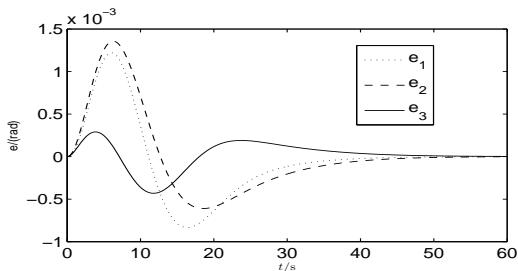


图5 无自适应模糊时的姿态角误差

Fig. 5 Attitude angular error without adaptive fuzzy

从图4和5可看出,本文所设计的控制器能使系统姿态误差更小且收敛更快,系统的动态和稳态性能都得到明显提高。

## 6 结论

本文对其含模型不确定性和受未知外干扰的刚体卫星姿态模型提出了一种直接自适应模糊预测控制方法. 此方法将广义预测控制和自适应模糊系统相结合,使模型不确定和外干扰得到有效抑制,实现了对期望姿态轨迹的跟踪。

## References

- Lu P. Optimal predictive control for continuous nonlinear systems. *International Journal of Control*, 1995, **62**(3): 633-649
- Soroush M, Soroush H M. Input-output linearising nonlinear model predictive control. *International Journal of Control*, 1997, **68**(6): 1449-1473
- Chen Wen-Hua, Balance D J, Gawthrop P J. Optimal control of nonlinear systems: a predictive control approach. *Automatica*, 2003, **39**: 633-641
- Chen Wen-Hua, Balance D J, Gawthrop P J, O'Reilly J. Nonlinear PID predictive controller. *IEE Proceedings of Control Theory Application*, 1999, **146**(6): 603-611
- Chen Wen-Hua, Balance D J, Gawthrop P J, O'Reilly J. A nonlinear disturbance observer for robotic manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2000, **47**(4): 932-937
- Merabet A, Ouhrouche M, Bui R T. Nonlinear predictive control with disturbance observer for induction motor drive. *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, 2006, July 9-12, Montreal, Quebec, Canada, 2006, 86-91
- Zhang Chun-Liang, Mei De-Qing, Chen Zi-Chen. Fuzzy Generalized Predictive Control of Microvibration Isolation System for a Micro-manufacturing Platform. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2007, **43**(12): 194-202(in Chinese)  
(张春良,梅德庆,陈子辰. 微制造隔振平台振动的模糊广义预测控制. *机械工程学报*, 2007, **43**(12): 194-202)
- Shi Wu-Xi, Huo Wei, Wu Hong-Xin. Adaptive Fuzzy Predictive Control of a Micromanipulator with Flexible Joints. *Journal of Dynamics and Control*, 2003, **1**(1): 84-89(in Chinese)  
(师五喜,霍伟,吴宏鑫. 柔性关节微操作机器人自适应模糊预测控制. *动力学与控制学报*, 2003, **1**(1): 84-89)
- Fang Wei, Jiang Chang-Sheng. Nonlinear Predictive Control of an Aerospace Vehicle Based on Adaptive Fuzzy Systems. *ACTA Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2008, **29**(4): 988-994(in Chinese)  
(方炜,姜长生. 基于自适应模糊系统的空天飞行器非线性预测控制. *航空学报*, 2008, **29**(4): 988-994)
- Fang Wei, Jiang Chang-Sheng. Nonlinear Robust Adaptive Predictive Control Based on Fuzzy Systems. *Journal of Xi'an Jiao Tong University*, 2008, **42**(6): 669-673(in Chinese)  
(方炜,姜长生. 一类基于模糊系统的非线性鲁棒自适应预测控制. *西安交通大学学报*, 2008, **42**(6): 669-673)
- Wang Li-Xin. Adaptive Fuzzy Systems and Control-Design and Stability Analysis. Beijing: Natinal Defence Industry Press, 1995(in Chinese)  
(王立新. 自适应模糊系统与控制-设计与稳定性分析. 北京: 国防工业出版社, 1995)
- Slotine J J E, Li W P. *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991
- Huang Lin. *Systems and Control Theory of Linear Algebra*. Beijing: Science Press, 1984(in Chinese)  
(黄琳. 系统与控制理论中的线性代数. 北京: 科学出版社, 1984)

## 附录

引理 1. 当  $\|\Delta J J_0^{-1}\| < 1$  时,  $H = (I_3 + \Delta J J_0^{-1})^{-1} - I_3$  满足:

$$\|H\| \leq \frac{\|\Delta J J_0^{-1}\|}{1 - \|\Delta J J_0^{-1}\|} \quad (A1)$$

证明. 由  $(I_3 + \Delta J J_0^{-1})(I_3 + \Delta J J_0^{-1})^{-1} = I_3$  得

$$(I_3 + \Delta J J_0^{-1})^{-1} = I_3 - \Delta J J_0^{-1} (I_3 + \Delta J J_0^{-1})^{-1} \quad (\text{A2})$$

故有

$$\|(I_3 + \Delta J J_0^{-1})^{-1}\| \leq 1 + \|\Delta J J_0^{-1}\| \times \|(I_3 + \Delta J J_0^{-1})^{-1}\|$$

利用  $\|\Delta J J_0^{-1}\| < 1$  可得

$$\|(I_3 + \Delta J J_0^{-1})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\Delta J J_0^{-1}\|} \quad (\text{A3})$$

再由(A2)和(A3)式可知:

$$\begin{aligned} \|H\| &= \|(I_3 + \Delta J J_0^{-1})^{-1} - I_3\| = \\ &\|-\Delta J J_0^{-1} (I_3 + \Delta J J_0^{-1})^{-1}\| \leq \|\Delta J J_0^{-1}\| \times \\ &\|(I_3 + \Delta J J_0^{-1})^{-1}\| \leq \frac{\|\Delta J J_0^{-1}\|}{1 - \|\Delta J J_0^{-1}\|} \end{aligned}$$

□

引理 2<sup>[13]</sup>. 对角占优方阵是可逆阵.

命题. 定义  $J_m = \min\{J_{ii}\} (i = 1, 2, 3)$ ,  $\bar{\Delta} = \max\{\bar{\Delta}_{ij}\} (i, j \in \{1, 2, 3\})$ ,  $\bar{H} = [\bar{h}_{ij}]$ ,  $\bar{h}_{ij} = \frac{3\bar{\Delta}}{J_m - 3\bar{\Delta}}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), 若惯性张量阵不确定性上界满足  $\bar{\Delta} < \frac{J_m}{12}$ , 则  $H = (I_3 + \Delta J J_0^{-1})^{-1} - I_3 \triangleq [h_{ij}]$  满足  $|h_{ij}| \leq \bar{h}_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ , 且  $\bar{H}$  的最大实特征值  $\rho(\bar{H}) < 1$ .

证明. 不失一般性, 以2范数为例. 由定义及  $\bar{\Delta} < J_m/12$  知:

$$\|\Delta J J_0^{-1}\| \leq \sqrt{9 \left(\frac{\bar{\Delta}}{J_m}\right)^2} = \frac{3\bar{\Delta}}{J_m} < \frac{1}{4} < 1 \quad (\text{A5})$$

故由引理1知:  $\|H\| \leq \frac{\|\Delta J J_0^{-1}\|}{1 - \|\Delta J J_0^{-1}\|}$ , 再利用(A5)式知:

$$\|H\| \leq \frac{\|\Delta J J_0^{-1}\|}{1 - \|\Delta J J_0^{-1}\|} \leq \frac{\frac{3\bar{\Delta}}{J_m}}{1 - \frac{3\bar{\Delta}}{J_m}} = \frac{3\bar{\Delta}}{J_m - 3\bar{\Delta}} \quad (\text{A6})$$

定义3阶方阵  $\bar{H} = [\bar{h}_{ij}]$ ,  $\bar{h}_{ij} = \frac{3\bar{\Delta}}{J_m - 3\bar{\Delta}} (i, j = 1, 2, 3)$ . 由(A6)式显然可知  $H = [h_{ij}]$  满足  $|h_{ij}| \leq \|H\| \leq \bar{h}_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ . 又因  $\bar{\Delta} < J_m/12$  (即  $J_m > 12\bar{\Delta}$ ),

故对任一  $(i, j = 1, 2, 3)$  均成立:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{ii} &= \frac{3\bar{\Delta}}{J_m - 3\bar{\Delta}} < \frac{3\bar{\Delta}}{12\bar{\Delta} - 3\bar{\Delta}} = \frac{1}{3} < 1 \\ |1 - \bar{h}_{ii}| - \sum_{j \neq i, i=1}^3 |\bar{h}_{ij}| &= 1 - \frac{3\bar{\Delta}}{J_m - 3\bar{\Delta}} - \\ &\frac{6\bar{\Delta}}{J_m - 3\bar{\Delta}} = \frac{J_m - 12\bar{\Delta}}{J_m - 3\bar{\Delta}} > 0 \end{aligned}$$

故  $\bar{H}$  的对角元  $\bar{h}_{ii} < 1 (i = 1, 2, 3)$  且  $I_3 - \bar{H}$  是对角占优阵. 因  $\bar{H}$  是全部元素均非零的方阵, 由Frobenius-Perron定理知  $\bar{H}$  的最大实特征值  $\rho(\bar{H}) \geq 0$ . 又因特征值  $\rho(\bar{H})$  满足  $|\rho(\bar{H})I_3 - \bar{H}| = 0$ , 故矩阵  $\rho(\bar{H})I_3 - \bar{H}$  不可逆, 由引理2知  $\rho(\bar{H})I_3 - \bar{H}$  不是对角占优阵, 这表明存在  $i \in \{1, 2, 3\}$  使得

$$|\rho(\bar{H}) - \bar{h}_{ii}| \leq \sum_{j \neq i, j=1}^3 |\bar{h}_{ij}| \quad (\text{A7})$$

假如  $\rho(\bar{H}) > 1$ , 则由  $\bar{h}_{ii} < 1$  和(A7)式知:

$$\begin{aligned} |1 - \bar{h}_{ii}| = 1 - \bar{h}_{ii} &\leq (\rho(\bar{H}) - 1) + 1 - \bar{h}_{ii} \\ &= |\rho(\bar{H}) - \bar{h}_{ii}| \leq \sum_{j \neq i, j=1}^3 |\bar{h}_{ij}| \end{aligned}$$

与  $I_3 - \bar{H}$  是对角占优阵矛盾, 故必有  $\rho(\bar{H}) < 1$ . 根据Frobenius-Perron定理知方程(21)存在唯一非负解  $\mathbf{k}$ . □



孙光 北京航空航天大学第七研究室博士研究生. 研究方向为非线性力学系统控制. 本文通信作者.

E-mail: sunlight17330@ss.buaa.edu.cn

(SUN Guang Ph.D. candidate in the Seventh Research Division of Beijing University of Aeronautics and Astro-

navics. The main interests conclude nonlinear control of mechanical systems. Corresponding author of this paper.)



霍伟 北京航空航天大学第七研究室教授、博士生导师. 主要研究方向为非线性力学系统控制、智能控制等.

E-mail: whuo@163.net

(HUO Wei Professor and supervisor in the Seventh Research Division of Beijing University of Aeronautics and Astro-

navics. The main interests conclude nonlinear control of mechanical systems, intelligent control.)