

单模光纤波导模的傍轴传输特性*

陈悠杰^{1,2}, 段开棕², 吕百达¹, 赵 卫²

(1. 四川大学 激光物理与化学研究所 成都 610064; 2. 中国科学院 西安光学精密机械研究所, 西安 710119)

摘要: 将 LP₀₁ 模表示成用拉盖尔-高斯基线性叠加的形式, 利用柯林斯公式推导出单模光纤波导模通过傍轴 ABCD 光学系统的解析传输公式。用所得的解析公式对 LP₀₁ 模在自由空间的传输和聚焦特性作了研究, 并和高斯基模进行了比较。数值计算结果表明, 用高斯基模描述 LP₀₁ 模会产生一定误差。LP₀₁ 模经过透镜聚焦后存在焦移, 且焦移随着菲涅尔数传输特性的减小而增大。选择合适的菲涅尔数聚焦后, LP₀₁ 模会出现长焦深, 这是与聚焦的高斯基模所不同的。

关键词: 单模光纤; 光纤激光器; 光纤波导模; 焦移; 传输特性

中图分类号: O435 **文献标志码:** A **doi:** 10.3788/HPLPB20102202.0257

光纤激光器由于具有效率高, 结构紧凑, 散热性能好, 光束质量好等优点, 近年来发展迅速^[1]。目前光纤激光器已广泛应用于光纤通讯、激光加工、医疗等领域。为了更好的设计和应用光纤激光器, 有必要对光纤激光的传输特性进行研究。而光纤激光器作为波导激光器的一种, 应为波导模, 其光场表达式中含有复杂的贝塞尔函数, 在积分计算中难以求得解析表达式。为了简化问题, 常将波导模近似为高斯基模, 但这种方法存在一定误差。本文基于模分解理论将光纤波导模 LP₀₁ 模表示成用拉盖尔-高斯基的线性叠加。利用柯林斯公式推导出 LP₀₁ 模傍轴 ABCD 光学系统的传输公式, 对 LP₀₁ 模和高斯基模近似的 LP₀₁ 模的自由空间和聚焦场传输特性进行数值计算和比较分析。所得结果对光纤激光器的设计和应用有一定指导意义。

1 理论分析

1.1 光纤波导模的拉盖尔-高斯基展开和高斯基近似

光纤激光器纤芯中的传输模式为波导模, 在弱导近似下, 单模光纤波导模可用 LP₀₁ 模来描述^[2]

$$E(r) = \begin{cases} J_0\left(\frac{U}{a}r\right), & r \leq a \\ \frac{J_0(U)}{K_0(W)}K_0\left(\frac{W}{a}r\right), & r > a \end{cases} \quad (1)$$

式中: J₀ 和 K₀ 分别为零阶贝塞尔函数和零阶修正贝塞尔函数; U 为径向归一化传播常数; W 为径向归一化衰减常数; a 为纤芯半径。归一化频率为 $V = (U^2 + W^2)^{1/2}$ 。由于式(1)包含复杂的贝塞尔函数, 不便于分析波导模的空间传输特性, 因此在实际应用中常用高斯基模近似^[3]代替式(1)

$$E(r) = \exp(-r^2/\omega_g^2) \quad (2)$$

式中: $\omega_g \approx (0.65 + 1.619/V^{3/2} + 2.87/V^6)$ 。为了较为精确描述光纤波导模经过光学系统的传输, 根据模分解理论, 将 LP₀₁ 模展开成一正交归一化模系 $\Psi_p(r)$ 的叠加^[4-6]

$$E(r) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \Psi_p(r) \quad (3)$$

式中:

$$\Psi_p(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega_0} L_p\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right) \quad (4)$$

式中: $\Psi_p(r)$ 即是拉盖尔-高斯基; L_p 是 p 阶拉盖尔多项式; ω_0 是束腰宽度; A_p 为第 p 个拉盖尔-高斯基光束的权重因子, 它可以表示为:

$$A_p(r) = 2\pi \int_0^a J_0\left(\frac{U}{a}r\right) \Psi_p(r) r dr + 2\pi \frac{J_0(U)}{K_0(W)} \int_a^{\infty} K_0\left(\frac{W}{a}r\right) \Psi_p(r) dr \quad (5)$$

* 收稿日期: 2009-04-14; 修订日期: 2009-09-16

基金项目: 中国科学院西部之光联合学者项目(0729591213); 国家自然科学基金重点项目(60537060, 10874125)

作者简介: 陈悠杰(1986-), 男, 硕士研究生, 主要从事激光光束传输与变换研究; littlefat1986@126.com。

通信作者: 吕百达(1943-), 男, 教授, 博导; baidalu0@tom.com。

由于单模光纤输出是近高斯分布,为了使最低阶的高斯模 $\Psi_0(r)$ 在 LP_{01} 模中占主导地位,选取 ω_0 使权重因子 A_0 得到最大值,因此 ω_0 需满足 $dA_0/d\omega_0=0$ 。

1.2 波导模通过傍轴 ABCD 光学系统的传输

考虑光束通过无光阑限制的傍轴 ABCD 光学系统的传输。由柯林斯公式^[7],在某一 z 面上的场分布可表示为

$$E(r, z) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \Psi_p'(r) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \frac{i}{\lambda B} \exp(-ikz) \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \Psi_p(r_0) \times \exp\left\{-\frac{ik}{2B}[Ar_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0 + Dr^2)]\right\} r_0 dr_0 d\varphi \quad (6)$$

式中:已将 $z=0$ 面上的场分布用式(3)表示。利用积分公式^[8]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[ix \cos(\theta - \theta_0)] d\theta = J_0(x) \quad (7)$$

和

$$\int_0^{\infty} x^{m/2+n} \exp(-\alpha x) J_m(2\beta x^{1/2}) dx = n! \alpha^{-n-m-1} \beta^n \exp(-\beta^2/\alpha) L_n^m(\beta^2/\alpha) \quad (8)$$

式(8)中: J_m 为 m 阶贝塞尔函数; L_n^m 为拉盖尔多项式。对式(6)积分得

$$E(r, z) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \frac{ik}{2B} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega_0} \exp(-ikz) \exp\left[-\frac{ikD}{2B}r^2\right] \sum_{s=0}^p (-1)^s \left(\frac{2}{\omega_0^2}\right)^2 \binom{p}{p-s} \left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{ikA}{2B}\right)^{-s-1} \times \exp\left[-\frac{\left(\frac{kr}{2B}\right)^2}{\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{ikA}{2B}}\right] L_s\left[\frac{\left(\frac{kr}{2B}\right)^2}{\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{ikA}{2B}}\right] \quad (9)$$

式(9)即单模光纤激光波导模通过无光阑限制的傍轴 ABCD 光学系统的传输公式。令 $A=1, B=z, D=1$ 则得到波导模在自由空间的傍轴传输公式。

设焦距为 f 的透镜置于 $z=0$ 面,从透镜到 z 面的传输矩阵可以写为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta z & \frac{\omega_0^2}{N_w \lambda} (1 + \Delta z) \\ -\frac{N_w \lambda}{\omega_0^2} & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中: $\Delta z = (z-f)/f, N_w = \omega^2/\lambda f$ 为非涅尔数。

将式(10)代入式(9),得到无光阑限制的光纤波导模经透镜聚焦的公式

$$E(r, \Delta z) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \Psi_p'(r) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \frac{ikN_w \lambda}{2\omega_0^2 (1 + \Delta z)} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{1}{\omega_0} \exp[-ikf(1 + \Delta z)] \exp\left[-ik\left(\frac{N_w \lambda}{2\omega_0^2 (1 + \Delta z)}\right)r^2\right] \times \sum_{s=0}^p (-1)^s \left(\frac{2n}{\omega_0^2}\right)^s \binom{p}{p-s} (\Phi)^{-s-1} \exp\left[-\frac{(kr/2B)^2}{\Phi}\right] L_s\left[\frac{(kr/2B)^2}{\Phi}\right] \quad (11)$$

其中

$$\Phi = \frac{1}{\omega_0^2} - \frac{ik\Delta z N_w \lambda}{2\omega_0^2 (1 + \Delta z)} \quad (12)$$

聚焦光强分布为

$$I(r, \Delta z) = E(0, \Delta z) E^*(0, \Delta z) \quad (13)$$

2 数值计算和分析

当 $V=1.8$ 时,由(5)式可计算得到展开式(3)中各项系数为 $A_0=1.6467a, A_1=-0.2455 \times 10^{-3}a, A_2=0.1847a, A_3=-0.03761a, A_4=0.02455a, A_5=-0.03293a$ 。利用上面得到的系数,计算可以知式(3)中前 6 项包含了 LP_{01} 模能量的 99.9%^[9],在数值计算中,式(3) p 只需取到 5,更高阶的拉盖尔-高斯模对总光场的贡献可忽略不计。另外,从上面的各展开式的权重系数比较可以看出, LP_{01} 模中的高斯基模在叠加式中占主要成分,所以 LP_{01} 模的传输特性上高斯基模相似,一般情况下可利用高斯基模来近似代替 LP_{01} 模,但由于 LP_{01} 模中

含有少量成分的高阶拉盖尔-高斯模，LP₀₁ 模会与高斯基模存在一定误差。

图 1(a)为利用式(1)和式(3)前 6 阶拉盖尔-高斯模叠加计算的 LP₀₁ 模在光纤出射面的归一化场分布，图 1 (b)经过自由空间传输后在 $z=100 \mu\text{m}$ 面处计算的归一化光强分布，计算参数为 $V=1.8$ (单模光纤 $V < 2.405$), $\lambda=1.06 \mu\text{m}$, $a=5 \mu\text{m}$ 。为比较起见，利用式(2)高斯基模的计算结果也画于图中。可以看出，前 6 阶叠加的电场与 LP₀₁ 模的精确电场分布拟合很好，高斯基模与 LP₀₁ 模存在差异。因此，要较为精确地描述 LP₀₁ 模应当使用式(3)的前 6 阶拉盖尔-高斯模的叠加场。

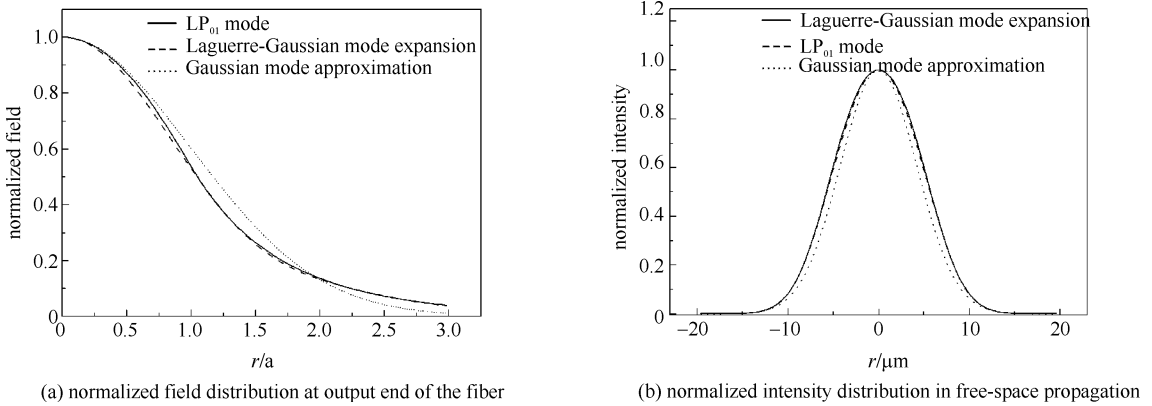


Fig. 1 Normalized field distribution at output end of fiber and normalized intensity distribution in free-space propagation

图 1 LP₀₁ 模在光纤出射面的光场分布与经过自由空间传输后的归一化光强分布

为了研究 LP₀₁ 模在传输时的束宽变化，使用二阶矩定义束宽^[10]

$$w(z) = \sqrt{\frac{2 \int_0^\infty |E(r, z)|^2 r^3 dr}{\int_0^\infty |E(r, z)|^2 r dr}} \quad (14)$$

将式(9)代入式(14)，用拉盖尔-高斯模展开作为 LP₀₁ 模的计算结果如图 2 所示。为比较起见，图 2 也给出了利用式(2)计算的高斯基模束宽变化，计算参数与图 1 相同。结果表明，当传输距离较短时，LP₀₁ 模与高斯基模的束宽相同，但随着传输距离增加 ($z \geq 40 \mu\text{m}$)，LP₀₁ 模与高斯基模的束宽差别增大。

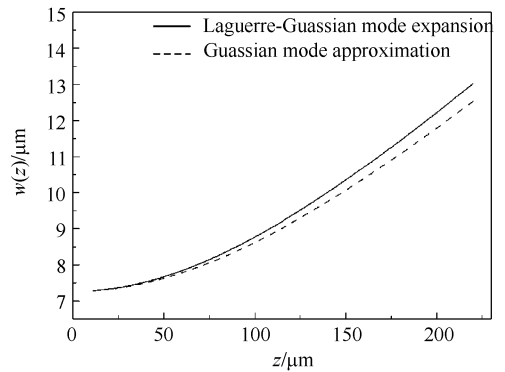


Fig. 2 Beam width vs propagation distance in free-space

图 2 自由空间中束宽随传输距离的变化

为了研究光纤波导模的聚焦场特性，改变透镜焦距 f ，在不同菲涅尔数下利用式(13)计算 LP₀₁ 模轴上光强分布图，并与式(2)的高斯基模进行比较，如图 3 所示。计算参数为 (a) $N_w=1.00$, (b) $N_w=0.10$, (c) $N_w=0.35$ ，其它计算参数与图 1 相同。从图 3 可以看出，波导模轴上光强最大值位置与透镜焦点 $\Delta z=0$ 并不重合，而是更靠近透镜，即波导模经透镜聚焦后也存在焦移^[11-12]。定义相对焦移量为 $|\Delta z_f| = |(z_{\text{max}} - f) / f|$ (z_{max} 为实际焦点，即光强最大值的位置)，发现相对焦移随着菲涅尔数 N_w 的减小而增大，这和高斯基模是一致的，但两者轴上光强分布差异较大，焦移并不相等。特别是当选取 N_w

为了研究光纤波导模的聚焦场特性，改变透镜焦距 f ，在不同菲涅尔数下利用式(13)计算 LP₀₁ 模轴上光强分布图，并与式(2)的高斯基模进行比较，如图 3 所示。计算参数为 (a) $N_w=1.00$, (b) $N_w=0.10$, (c) $N_w=0.35$ ，其它计算参数与图 1 相同。从图 3 可以看出，波导模轴上光强最大值位置与透镜焦点 $\Delta z=0$ 并不重合，而是更靠近透镜，即波导模经透镜聚焦后也存在焦移^[11-12]。定义相对焦移量为 $|\Delta z_f| = |(z_{\text{max}} - f) / f|$ (z_{max} 为实际焦点，即光强最大值的位置)，发现相对焦移随着菲涅尔数 N_w 的减小而增大，这和高斯基模是一致的，但两者轴上光强分布差异较大，焦移并不相等。特别是当选取 N_w

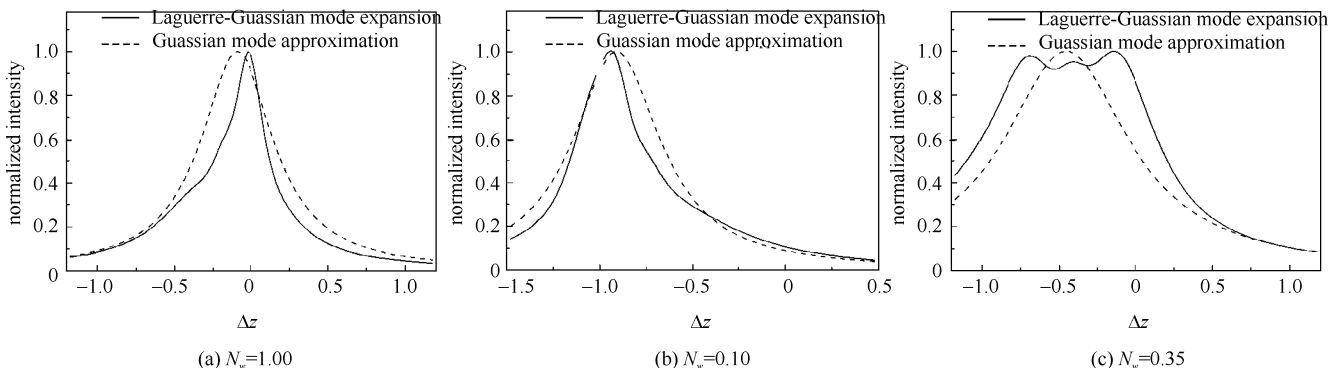


Fig. 3 Normalized on-axis intensity distributions of focused LP₀₁ and Gaussian modes

图 3 聚焦 LP₀₁ 模和高斯基模归一化轴上光强分布

$=0.35$ 时, LP_{01} 模聚焦后轴上光强出现较为平坦的一段, 说明此时 LP_{01} 模的聚焦光场具有长的焦深, 这与高斯基模明显不同。 LP_{01} 模这种长焦深现象在激光的工业应用如激光切割, 激光焊接等有重要实际意义。

3 结 论

本文用模分解方法将 LP_{01} 模展开为不同权重的拉盖尔-高斯模叠加, 利用柯林斯公式推导出 LP_{01} 模通过无光阑限制的傍轴 $ABCD$ 光学系统的传输公式, 与高斯基模近似进行了比较。结果表明, 用高斯基模描述 LP_{01} 模存在一定差异, 而拉盖尔-高斯模的线性叠加的近似方法能较精确描述 LP_{01} 模。 LP_{01} 模经过透镜聚焦后存在焦移, 且焦移随着菲涅尔数 N_w 的减小而增大, 但焦移量与高斯基模不相等。选择合适的菲涅尔数, 聚焦 LP_{01} 模会出现长焦深现象, 这是高斯基模所不具有的特点。

参考文献:

- [1] Jeong Y, Sahu J, Payne D, et al. Ytterbium-doped large-core fiber laser with 1 kW of continuous output power[J]. *Electron Lett*, 2004, **40**: 470-472.
- [2] 廖延彪. 光纤光学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000. (Liao Yanbiao. Fiber optics. Beijing: Tsinghua University Press, 2000)
- [3] Ankiewicz A, Peng G D. Generalized Gaussian approximation for single-mode fibers[J]. *J Lightwave Technol*, 1992, **10**(1): 22-27.
- [4] Angelis D G, Panariello G, Scaglione A. Improvement of the Gaussian approximation for the field of weakly guiding optical fibers[C]//Proc of SPIE. 1997, **2994**: 340-348.
- [5] Angelis D G, Panariello G, Scaglione A. A variational method to approximate the field of weakly guiding optical fibers by Laguerre-Gauss/Bessel expansion[J]. *J Lightwave Technol*. 1999, **17**: 2665-2674.
- [6] Wang Z H, Yi F Z. Characterization of single-mode graded-index fibers by expanding modal fields in Laguerre-Gaussian function[J]. *Journal of Optoelectronics Laser*, 2002, **13**(8): 795-799.
- [7] Collins S A. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics[J]. *J Opt Soc Am*, 1970, **60**(7): 1168-1177.
- [8] Erdelyi A, Magnus W, Oberhettinger F. Tables of integral transforms[M]. New York: McGraw-Hill. 1954.
- [9] 曹祥杰, 邹快盛, 赵卫, 等. 光纤激光器反馈耦合损耗分析[J]. 光子学报, 2008, **37**(7): 1309-1313. (Cao Xiangjie, Zou Kuaisheng, Zhao Wei, et al. Analysis on coupling loss of fiber lasers. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(7): 1309-1313)
- [10] 吕百达. 激光光学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003. (Lü Baida. Laser optics. Beijing: Higher Education Press, 2003).
- [11] 王喜庆, 吕百达. 厄米-高斯光束的聚焦场特性[J]. 强激光与粒子束, 1996, **8**(1): 24-30. (Wang Xiqing, Lü Baida. Focused field characteristics of Hermite-Gaussian beams. *High Power Laser and Particle Beams*, 1996, **8**(1): 24-30)
- [12] 彭润伍, 吕百达. 拉盖尔-高斯光束通过光阑-透镜分离系统的聚焦特性和焦移[J]. 强激光与粒子束, 2002, **14**(4): 541-545. (Peng Runwu, Lü Baida. Focused field characteristics and focal shift of Laguerre-Gaussian beams passing through an aperture-lens separation system. *High Power Laser and Particle Beams*, 2002, **14**(4): 541-545)

Paraxial propagation properties of waveguide modes in single-mode fiber

Chen Youjie^{1,2}, Duan Kailiang², Lü Baida¹, Zhao Wei²

(1. Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China;

2. State Key Laboratory of Transient Optics and Photonics, Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 030001, China)

Abstract: By expanding the LP_{01} mode into a linear superposition of Laguerre-Gaussian modes and using Collins formula, the analytical propagation equation of wave-guide modes in a single-mode fiber through paraxial $ABCD$ optical systems is derived. The free-space propagation and focusing properties of the LP_{01} mode are studied and compared with those of the fundamental Gaussian mode. It is shown that the Gaussian mode in place of the LP_{01} mode may introduce some errors. In the focused field of the LP_{01} mode there exists the focal shift which increases with decreasing Fresnel number. By a suitable choice of the Fresnel number, a long focusing depth may appear for the LP_{01} mode which is quite different from that of the focused Gaussian mode.

Key words: single-mode fiber; fiber laser; wave-guide mode; focal shift; propagation properties